| | | |
|---|---|---|
| Osztunk $(m+1)^2$-nel, majd szorzunk 4-gyel: $\left(\frac{m}{2}\right)^2+(m+1)=\left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$ $m^2+4(m+1)=(m+2)^2 \Leftrightarrow$ $m^2+4m+4=m^2+4m+4$. | 2 pont | |
| A két oldal egyenlő, és ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát az eredeti állítás minden pozitív egész $n$-re igaz. | 1 pont | *Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem hivatkozik az ekvivalenciára.* |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **9. c) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$-re igaz az állítás $(1 = 1)$. | 1 pont | |
| Ha az állítás valamely $m \in \mathbf{N}^+$-re igaz: $K_m=1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$, | 1 pont | |
| akkor igaz az is, hogy $K_{m+1}=1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3+(m+1)^3=$ $=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2+(m+1)^3=$ | 1 pont | |
| $=(m+1)^2\left(\frac{m^2}{4}+m+1\right)=(m+1)^2\cdot\frac{m^2+4m+4}{4}=$ | 1 pont | |
| $=(m+1)^2\cdot\frac{(m+2)^2}{4}=\left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$. | 1 pont | |
| Az állítás igaz $m + 1$-re is, tehát az eredeti állítás minden pozitív egész $n$-re igaz. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **9. c) harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| A b) feladat megoldása alapján az első $n$ pozitív köbszám összege az első $n$ darab L alakú sávban lévő számok összege, $L_1 + L_2 +\ldots+ L_n$, ami megegyezik a táblázat bal felső $n \times n$-es részében lévő számok összegével. | 2 pont | |
| $(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) + 2\cdot(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) +$ $+ 3\cdot(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) +\ldots+ n\cdot(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) =$ | 1 pont | |
| $= (1 + 2 + 3 +\ldots+ n)\cdot(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) =$ | 1 pont | |
| $=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. | 1 pont | |
| Ezzel az állítást igazoltuk. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |





**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.**

# MATEMATIKA

# EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

# JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA**

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.





| **9. a) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| 1-től 42-ig a 42-höz relatív prímek: 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, ez 12 darab. | 1 pont* | |
| (Ha $k$ relatív prím a 42-höz, akkor $k + 42$ is, ezért) bármelyik 42 egymást követő egész szám között 12 megfelelő szám van. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $999 = 23 \cdot 42 + 33$ | 1 pont | |
| Így 1-től ($23 \cdot 42 =$) 966-ig $23 \cdot 12 = 276$ megfelelő szám van, | 1 pont | |
| 967-től 999-ig pedig annyi, amennyi 1-től 33-ig, azaz 10 darab. | 1 pont | |
| A keresett számok száma ($276 + 10 =$) 286. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó az adott számhoz a nála kisebb relatív prímek számát megadó φ(n) függvényre hivatkozik:*
$\varphi(42) = 42 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 12$.

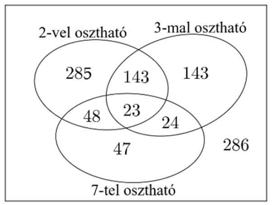
| **9. b)** | | |
|---|---|---|
| Az $n$-edik L alakú sávban a számok összege $n + 2n + 3n + \ldots + (n-1)n + n \cdot n +$ $+ n(n-1) + n(n-2) + \ldots + n \cdot 2 + n =$ | 1 pont | $2 \cdot (n + 2n + 3n + \ldots +$ $+ (n-1)\,n + n \cdot n) - n \cdot n$ |
| $n \cdot ((1 + 2 + \ldots + n-1) \cdot 2 + n) =$ | 1 pont | $2n(1+2+3+\ldots+n) - n^2 =$ |
| $= n \cdot (n(n-1) + n) =$ | 1 pont | $= 2n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n^2 =$ |
| $= n^3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **9. c) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Teljes indukciót alkalmazunk. $n = 1$-re az állítás igaz: $K_1 = 1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2$. | 1 pont | |
| Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $m$ pozitív egészre, azaz $K_m = 1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$. Be kell látni, hogy az állítás ($m + 1$)-re is teljesül, azaz $K_{m+1} = 1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 + (m+1)^3 = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$. Az indukciós feltevést felhasználva tehát igazolandó, hogy: $\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3 = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$. | 2 pont | |

<table>
<tr><td colspan="3">8. c) harmadik megoldás</td></tr>
<tr><td>(Megkeressük $m$-hez a megfelelő $n$ értéket.)<br>Az első néhány eset táblázatokba foglalva:
<table>
<tr><td>$m$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>…</td></tr>
<tr><td>$2+\frac{m(m+1)}{2}$</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td><td>12</td><td>17</td><td>23</td><td>…</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$n$ (a szó hossza)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$\frac{n^2-5n+10}{2}=$</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td><td>12</td></tr>
</table></td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A két táblázat alapján az sejthető, hogy az $m$-hez tartozó pontszámot az $n = m + 3$ hosszúságú szóra kapjuk meg ($m = 0$ esetén $n = 3$, $m = 1$ esetén $n = 4$, $m = 2$ esetén $n = 5$ megfelelő, és így tovább).</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{(m+3)^2-5(m+3)+10}{2}=\frac{m^2+6m+9-5m-15+10}{2}=$</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>$=\frac{m^2+m+4}{2}=\frac{4+m(m+1)}{2}=2+\frac{m(m+1)}{2}$,</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>így az $n = m + 3$ valóban minden $m$ esetén megfelelő választás.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>7 pont</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">9. a) első megoldás</td></tr>
<tr><td>$42 = 2\cdot 3\cdot 7$, így azokat az 1000-nél kisebb pozitív egész számokat keressük, melyek nem oszthatók sem 2-vel, sem 3-mal, sem 7-tel.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>1-től 999-ig 2-vel osztható szám 499 darab,<br>3-mal osztható 333 darab,<br>7-tel osztható 142 darab van;</td><td>1 pont</td><td rowspan="2">A 500 darab páratlan szám között 167 darab 3-mal osztható és 71 darab 7-tel osztható van,</td></tr>
<tr><td>2-vel és 3-mal (azaz 6-tal) osztható szám 166 darab,<br>2-vel és 7-tel (azaz 14-gyel) osztható szám 71 darab,<br>3-mal és 7-tel (azaz 21-gyel) osztható szám 47 darab;</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>végül 2-vel, 3-mal és 7-tel (azaz 42-vel) osztható szám 23 darab van.</td><td>1 pont</td><td>a 3-mal és 7-tel is oszthatók száma pedig 24.</td></tr>
<tr><td>A keresett számok száma (logikai szita formulával)<br>999 – (499 + 333 + 142) + (166 + 71 + 47) – 23 =</td><td>1 pont*</td><td>500 – 167 – 71 + 24 =</td></tr>
<tr><td>= 286.</td><td>1 pont*</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>6 pont</td><td></td></tr>
</table>

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó a megfelelő halmazábra részhalmazai elemszámának összeadásával jut helyes eredményre:*
999 – (285 + 143 + 47 + 143 + 24 + 48 + 23) = 286.

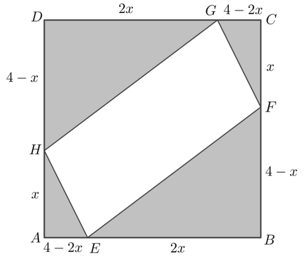







6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a $\pi$ és az $e$ szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

# I.

| 1. a) | | |
|---|---|---|
| (A paralelogramma területét megkapjuk, ha az $ABCD$ négyzet területéből levonjuk a négy derékszögű háromszög területét.)   $BF = DH = 4 - x$ és $AE = CG = 4 - 2x$. | 1 pont | |
| $T(x) = 16 - 2\cdot\frac{x(4-2x)}{2} - 2\cdot\frac{2x(4-x)}{2}$ | 1 pont | |
| $T(x) = 16 - 4x + 2x^2 - 8x + 2x^2$ | 1 pont | |
| Összevonás után: $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$, ami a bizonyítandó állítás volt. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 1. b) első megoldás | | |
|---|---|---|
| $T(x) = 4(x^2-3x+4) = 4(x-1{,}5)^2 + 7$ | 2 pont | |
| A másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért a $T$-nek minimuma van az $x = 1{,}5$ helyen (ami a $0 < x < 2$ feltételnek megfelel). | 2 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

*Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha megállapítja, hogy a $4x^2 - 12x + 16$ kifejezésnek minimuma van (mert a főegyüttható pozitív), és akkor minimális, ha $x = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{8} = 1{,}5$ (ami a $0 < x < 2$ feltételnek megfelel).*

| 1. b) második megoldás | | |
|---|---|---|
| $T$-nek ott lehet minimuma, ahol az első deriváltja 0. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $T'(x) = 8x - 12 = 0$ | 1 pont | |
| $x = 1{,}5$ (ami a $0 < x < 2$ feltételnek megfelel). | 1 pont | |
| $T''(1{,}5) = 8 > 0$ miatt itt valóban minimuma van $T$-nek. | 1 pont | *A $T'$ negatívból pozitívba megy át $x = 1{,}5$-nél, ezért $T$-nek itt minimuma van.* |
| **Összesen:** | **4 pont** | |





| 8. c) első megoldás | | |
|---|---|---|
| Megmutatjuk, hogy az $\frac{n^2-5n+10}{2} = 2 + \frac{m(m+1)}{2}$ egyenletnek minden $m \in \mathbf{N}$ paraméter esetén van megoldása az $n \geq 3$ egészek körében. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Nullára rendezve: $n^2 - 5n + (6 - m - m^2) = 0$. | 1 pont | $n^2 - 5n + 10 = 4 + m(m+1)$ |
| A megoldóképletet felírva: $n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6 - m - m^2)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1 + 4m + 4m^2}}{2}$. | 1 pont | $n^2 - 5n + 6 = m(m+1)$ |
| A négyzetgyök alatti kifejezés (a diszkrimináns) teljes négyzet, így $n_{1,2} = \frac{5 \pm (1 + 2m)}{2}$. | 1 pont | $(n-3)(n-2) = m(m+1)$ |
| Az egyenlet gyökei tehát $3 + m$ és $2 - m$. | 1 pont | *Mivel $n \geq 3$, ezért a jobb oldalon és a bal oldalon is két szomszédos természetes szám szorzata áll.* |
| A $3 + m$ mindig 2-nél nagyobb egész szám (a $2 - m$ pedig soha), | 1 pont | *Az egyenlőség teljesül, ha $n - 3 = m$, azaz $n = m + 3$,* |
| ezért igaz, hogy tetszőleges $m$ természetes szám esetén a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| 8. c) második megoldás | | |
|---|---|---|
| Megmutatjuk, hogy az $\frac{n^2-5n+10}{2} = 2 + \frac{m(m+1)}{2}$ egyenletnek minden $m \in \mathbf{N}$ paraméter esetén van megoldása az $n \geq 3$ egészek körében. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Rendezve: $n^2 - 5n + 10 = m^2 + m + 4$. | 1 pont | |
| Mindkét oldalt 4-gyel szorozva: $4n^2 - 20n + 40 = 4m^2 + 4m + 16$, amiből $4n^2 - 20n + 25 = 4m^2 + 4m + 1$. | 1 pont | |
| $(2n-5)^2 = (2m+1)^2$ | 1 pont | |
| $2n - 5 = 2m + 1$ vagy $2n - 5 = -2m - 1$ | 1 pont | |
| $n = m + 3$, amely mindig legalább 3, ezért megfelel (vagy $n = 2 - m$, de ez mindig legfeljebb 2, ezért nem felel meg). | 1 pont | |
| Tehát igaz, hogy tetszőleges $m$ természetes szám esetén a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **8. a)** | | |
|---|---|---|
| Megoldandó az $\frac{n^2-5n+10}{2}=26$ egyenlet.<br>Nullára rendezve $n^2-5n-42=0$. | 1 pont | |
| Ennek a gyökei (kb. 9,45 és –4,45) nem egészek, | 1 pont | |
| így nincs olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

*Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha megállapítja, hogy a kilencbetűs szóért 23, a tízbetűsért 30 pont jár (1 pont), majd a b) feladat állítására hivatkozva (1 pont) bizonyítottnak tekinti, hogy 26 pont nem kapható (1 pont).*

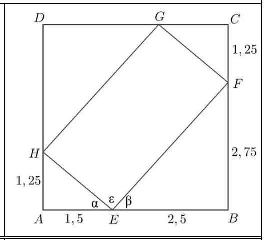
| **8. b)** | | |
|---|---|---|
| Hárombetűs szóért (a képlet alapján) 2 pont jár, és ez több, mint a kétbetűs szóért járó 1 pont. | 1 pont | |
| Legyen $f(n)=\frac{n^2-5n+10}{2}$ (ahol $n \geq 3$ és $n \in \mathbf{N}$).<br>Igazolni kell, hogy $f(n+1) > f(n)$. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $f(n+1)=\frac{(n+1)^2-5(n+1)+10}{2}=\frac{n^2-3n+6}{2}$, | 1 pont* | |
| az $\frac{n^2-3n+6}{2}>\frac{n^2-5n+10}{2}$ egyenlőtlenséget (ekvivalens lépésekkel) átrendezve $n > 2$ adódik.<br>Ez ($n \geq 3$ miatt) teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy hosszabb szóért több pont jár. | 1 pont* | |
| Mivel $n^2-5n=n(n-5)$ két ellentétes paritású tényező szorzata, ezért páros, tehát $f(n)$ egész szám. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| Teljes négyzetté alakítással kapjuk, hogy $f(n)=0,5(n-2,5)^2+1,875$. | 1 pont | |
| Az $x \mapsto 0,5(x-2,5)^2+1,875$ másodfokú függvény szigorúan monoton növekedő, ha $x \geq 2,5$.<br>Ebből következik, hogy $f(n+1) > f(n)$ is teljesül, ha $n \geq 3$ és $n \in \mathbf{N}$. | 1 pont | |





| **1. c) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az ábra jelöléseit használjuk.<br>(Mivel $x = 1,25$, ezért)<br>$HA = 1,25$ és $AE = 4 - 2 \cdot 1,25 = 1,5$,<br>$BE = 2,5$ és $BF = 4 - 1,25 = 2,75$. | 1 pont |  |
| A $HAE$ derékszögű háromszögben<br>$\text{tg}\,\alpha=\frac{1,25}{1,5}=\frac{5}{6}$ ($\approx 0,833$). | 1 pont | |
| Az $FBE$ derékszögű háromszögben: $\text{tg}\,\beta=\frac{2,75}{2,5}=1,1$. | 1 pont | |
| $\alpha \approx 39,8°$ és $\beta \approx 47,7°$. | 1 pont | *Addíciós képlet szerint:*<br>$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{5}{6}+\frac{11}{10}}{1-\frac{5}{6}\cdot\frac{11}{10}}=$<br>$=23,2$. |
| $\alpha+\beta \approx 87,5°$, ezért $\varepsilon \approx 92,5°$. | 1 pont | |
| (A paralelogramma szemközti szögei egyenlők, szomszédos szögei pedig kiegészítő szögek, ezért) a paralelogramma szögei: 87,5°, 92,5°, 87,5°, 92,5°. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **1. c) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az a) feladat szerint a paralelogramma területe ($m^2$-ben) $T(1,25)=4\cdot1,25^2-12\cdot1,25+16=7,25$. | 1 pont | |
| Az ábra jelöléseit használva:<br>$HA = 1,25$ és $AE = 4 - 2 \cdot 1,25 = 1,5$,<br>$BE = 2,5$ és $BF = 4 - 1,25 = 2,75$. | 1 pont | |
| $HE=\sqrt{1,25^2+1,5^2}$ ($\approx 1,953$)<br>$EF=\sqrt{2,75^2+2,5^2}$ ($\approx 3,717$) | 1 pont | $HE=\frac{\sqrt{61}}{4}$, $EF=\frac{\sqrt{221}}{4}$ |
| A paralelogramma egyik szögét jelölje $\varphi$.<br>A paralelogramma területe: $T=\frac{\sqrt{61}}{4}\cdot\frac{\sqrt{221}}{4}\cdot\sin\varphi$,<br>amiből $\sin\varphi=\frac{7,25\cdot16}{\sqrt{61\cdot221}}$ ($\approx 0,9991$). | 1 pont | |
| Ebből $\varphi \approx 87,5°$ vagy $\varphi \approx 180° - 87,5° = 92,5°$. | 1 pont | |
| A paralelogramma szögei: 87,5°, 92,5°, 87,5°, 92,5°. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

## 2. a)

| | | |
|---|---|---|
| Jelölje a mértani sorozat hányadosát $q$. $q^5\left(=\frac{384}{12}\right)=32$, | 1 pont | |
| innen pedig $q = 2$. | 1 pont | |
| A sorozat első hat tagja tehát $\frac{3}{2}$, 3, 6, 12, 24 és 48, | 1 pont | |
| ezek átlaga 15,75. | 1 pont | |
| Az ettől mért átlagos abszolút eltérés: $\frac{\|1,5-15,75\|+\|3-15,75\|+\ldots+\|48-15,75\|}{6}=$ | 1 pont | |
| = 13,5. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

## 2. b)

| | | |
|---|---|---|
| A 12 háromféleképpen állítható elő 1-nél nagyobb számjegyek szorzataként: $12 = 6\cdot 2 = 4\cdot 3 = 3\cdot 2\cdot 2$. | 1 pont | |
| A számjegyek összege akkor lesz 12, ha ezen számjegyek mellett még megfelelő számú 1-es számjegyet tartalmaz a szám. (Tetszőleges számú 1-es hozzávételével a számjegyek szorzata továbbra is 12 marad.) | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Olyan szám, amely 1 db 6-ost, 1 db 2-est, valamint (12 – 6 – 2 =) 4 db 1-est tartalmaz, $6\cdot 5$ (= 30) db van. (A 6-ost hat helyre tehetjük, a 2-est a fennmaradó öt hely bármelyikére.) | 1 pont | $\frac{6!}{4!}$ (= 30) |
| Olyan szám, amely 1 db 4-est, 1 db 3-ast, valamint (12 – 4 – 3 =) 5 db 1-est tartalmaz, $7\cdot 6$ (= 42) db van; | 1 pont | $\frac{7!}{5!}$ (= 42) |
| olyan pedig, amely 2 db 2-est, 1 db 3-ast, valamint ($12 - 2\cdot 2 - 3$ =) 5 db 1-est tartalmaz, $\binom{8}{2}\cdot 6$ (= 168) db van. | 2 pont | $\frac{8!}{2!\cdot 5!}$ (= 168) |
| Összesen tehát 30 + 42 + 168 = 240 olyan szám van, amely a feltételeknek megfelel. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |





## 7. b)

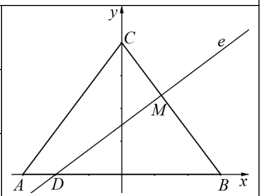
| | | |
|---|---|---|
| Legyen a célállomások száma a két évvel ezelőtti időpontban $n$, jelenleg pedig $1,5n$ ($n$ így páros). A járatok száma korábban $\binom{n}{2}$ volt, jelenleg $\binom{1,5n}{2}$. | 1 pont | *Jelenleg m, két éve $\frac{2}{3}m$ célállomás esetén:* |
| A feltétel szerint $\binom{n}{2}+60=\binom{1,5n}{2}$. | 1 pont | $\binom{\frac{2}{3}m}{2}+60=\binom{m}{2}$. |
| $\frac{n(n-1)}{2}+60=\frac{1,5n(1,5n-1)}{2}$ | 1 pont | $\frac{\frac{2}{3}m\left(\frac{2}{3}m-1\right)}{2}+60=\frac{m(m-1)}{2}$ |
| Nullára rendezve: $0=1,25n^2-0,5n-120$. | 1 pont | $0=\frac{5}{9}m^2-\frac{1}{3}m-120$ |
| Ennek egyik gyöke –9,6, ami nem megoldása a feladatnak, a másik gyöke pedig 10. | 1 pont | *A* –14,4 *nem megoldás, a másik gyök pedig* 15. |
| Jelenleg ($10\cdot 1,5$ =) 15 célállomásra közlekednek. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: két éve 45, jelenleg 105 járatot közlekedtetnek, és 105 = 45 + 60 valóban igaz. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az* $\binom{n}{2}$ *értékeinek felsorolása* (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, …) *alapján megállapítja, hogy* 10 *korábbi és* 15 *jelenlegi célállomás megfelel a feladat feltételeinek* ($10\cdot 1,5 = 15$, *illetve* 105 – 45 = 60)*, akkor erre a gondolatmenetére 3 pontot kapjon.*
*További 4 pontot kapjon, ha bizonyítja, hogy nincs más megoldása a feladatnak.*
*Például: Az n (a feladat szövege alapján) páros, ezért* $n = 2k$ *és* $1,5n = 3k$ ($k \in \mathbf{N}^+$).
$\binom{3k}{2}-\binom{2k}{2}=2,5k(k-0,2)$ *(2 pont),*
*ami* $k \geq 1$ *esetén szigorúan monoton növekszik (1 pont), tehát más megoldás nincs (1 pont).*

## 7. c)

| | | |
|---|---|---|
| A modell szerint 0,968 annak a valószínűsége, hogy valaki megjelenik az indulásnál. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Annak a valószínűsége, hogy 169 utas jelenik meg: $P(169)=\binom{170}{169}\cdot 0,968^{169}\cdot 0,032\approx 0,022$. | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy 170 utas jelenik meg: $P(170)=0,968^{170}\approx 0,004$. | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége tehát, hogy legfeljebb 168 utas jelenik meg: $1 - P(169) - P(170) \approx 0,974$. | 1 pont | |
| A légitársaság által fizetendő kártérítés várható értéke: $P(169)\cdot 600 + P(170)\cdot 1200 \approx 18$ euró. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

## 6. b)

| | | |
|---|---|---|
| Az $e$ egyenes az $x$ tengelyt a $D(-4; 0)$ pontban (az $y$ tengelyt pedig a $(0; 3)$ pontban) metszi. | 1 pont |   |
| (Keressük $BC$ és az $e$ egyenes $M$ metszéspontját.) A $BC$ egyenes egy normálvektora $(4; 3)$, | 1 pont | |
| egyenlete $4x + 3y = 24$. | 1 pont | |
| A $BC$ és az $e$ egyenes $M$ metszéspontját a $\left.\begin{matrix} 4x+3y=24 \\ 3x-4y=-12 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldása adja. Az első egyenlet 4-szeresének és a második egyenlet 3-szorosának összegét véve: $25x = 60$. | 1 pont | *Az első egyenletből* $x = 6 - 0{,}75y$, *amit a másodikba helyettesítve:* $18 - 6{,}25y = -12$. $6{,}25y = 30$ |
| $x = 2{,}4$ és $y = 4{,}8$, tehát $M(2{,}4; 4{,}8)$. | 1 pont | |
| A $DBM$ háromszög területe: $\frac{10 \cdot 4{,}8}{2} = 24$. | 1 pont | |
| Mivel az $ABC$ háromszög területe: $\frac{12 \cdot 8}{2} = 48$, az $e$ valóban felezi az $ABC$ háromszög területét. | 1 pont | |
| (A Pitagorasz-tételből) $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, az $ABC$ háromszög kerülete ezért $2 \cdot 10 + 12 = 32$. | 1 pont | |
| $BM = \sqrt{3{,}6^2 + 4{,}8^2} = 6$, $DB + BM = 10 + 6 = 16$, | 1 pont | |
| tehát az $e$ egyenes valóban felezi az $ABC$ háromszög kerületét is. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **10 pont** | |

## 7. a)

| | | |
|---|---|---|
| Az I. állítás hamis. | 1 pont | |
| Az öt számjegy között biztosan lesz három azonos paritású, így az ezeknek megfelelő csúcsok egy hárompontú kört alkotnak a gráfban, ezért az nem lehet fagráf. | 1 pont | |
| A II. állítás igaz. | 1 pont | |
| Egy megfelelő példa. (Ha például egy páros és négy páratlan számjegyet írunk le, akkor a páros számnak megfelelő csúcs a gráfban izolált pont lesz, ezért ez a gráf nem összefüggő.) | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |





## 3. a)

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 324$ | 1 pont | |
| $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x}$, így $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 324$, azaz $\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 324$. | 2 pont | |
| $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 729$ | 1 pont | |
| ($729 = 9^3$ és az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $x = -3$. | 1 pont | $x = \log_{\frac{1}{9}} 729 = -3$ |
| Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

## 3. b) első megoldás

| | | |
|---|---|---|
| (Négyzetre emelve:) $6x - 24 = 2x - 7 + 1 - 2\sqrt{2x-7}$ | 1 pont | |
| $2\sqrt{2x-7} = 18 - 4x$ | 1 pont | |
| (Kettővel osztva, négyzetre emelve és rendezve:) $2x - 7 = 81 - 36x + 4x^2$, azaz $4x^2 - 38x + 88 = 0$. | 1 pont | |
| A másodfokú egyenlet egyik gyöke $x = 4$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet (mindkét oldal értéke 0). | 2 pont | |
| A másik gyök $x = 5{,}5$. Behelyettesítéssel látható, hogy ez nem megoldása az eredeti egyenletnek (a bal oldal értéke 3, a jobb oldal értéke 1). | 2 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **3. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Értelmezési tartomány: $x \geq 4$.<br>Ezen a halmazon mindkét oldal nemnegatív, így a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. | 1 pont | |
| $6x - 24 = 2x - 7 + 1 - 2\sqrt{2x-7}$ | 1 pont | |
| $2\sqrt{2x-7} = 18 - 4x$ | 1 pont | |
| A bal oldal nemnegatív, ezért szükséges, hogy a jobb oldal is nemnegatív legyen, tehát $x \leq 4{,}5$.<br>A kapott egyenlet mindkét oldala nemnegatív a [4; 4,5] halmazon, ezért itt (2-vel osztás után) a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. | 1 pont | |
| $2x - 7 = 81 - 36x + 4x^2$,<br>azaz $4x^2 - 38x + 88 = 0$. | 1 pont | |
| A másodfokú egyenlet gyökei $x = 4$ és $x = 5{,}5$. | 1 pont | |
| Az 5,5 nem eleme a [4; 4,5] halmaznak, a 4 viszont igen, és mivel ezen a halmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk, ez egyben az egyenlet egyetlen megoldása. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **3. b) harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Értelmezési tartomány: $x \geq 4$. | 1 pont | |
| $\sqrt{6x-24} + 1 = \sqrt{2x-7}$<br>Négyzetre emelve: $6x - 24 + 2\sqrt{6x-24} + 1 = 2x - 7$. | 1 pont | |
| $\sqrt{6x-24} = 8 - 2x$ | 1 pont | $\sqrt{6(x-4)} = 2(4-x)$ |
| (Behelyettesítéssel látható, hogy) $x = 4$ megoldása az egyenletnek és az eredeti egyenletnek is. | 1 pont* | |
| (Az értelmezési tartományon) a $\sqrt{6x-24} = 8 - 2x$ egyenlet bal oldala szigorúan monoton növekedő, a jobb oldala pedig szigorúan monoton csökkenő, | 2 pont* | *Ha $x > 4$, akkor az egyenlet bal oldala pozitív, jobb oldala pedig negatív,* |
| ezért más megoldása nincs az egyenletnek. | 1 pont* | *ezért 4-nél nagyobb szám nem lehet gyöke az egyenletnek.* |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

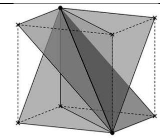
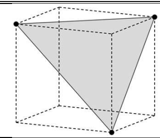
*Megjegyzés: A *-gal jelzett pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| Az egyenlet bal oldalán nemnegatív szám áll, ezért a jobb oldalon is ennek kell teljesülnie: | 1 pont | |
| $8 - 2x \geq 0$, vagyis $x \leq 4$. | 1 pont | |
| Ezt az értelmezési tartománnyal összevetve adódik, hogy csak $x = 4$ lehet megoldása az egyenletnek. | 1 pont | |
| Behelyettesítéssel látható, hogy a 4 valóban megoldása az eredeti egyenletnek. | 1 pont | |



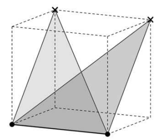
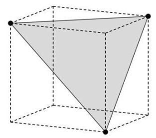


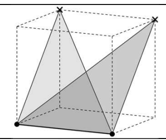
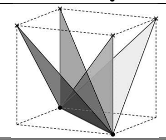
| | | |
|---|---|---|
| Tehát $(4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 =)$ 16 megfelelő háromszög van, melynek az alsó lapon van két csúcsa, és ugyanígy 16 megfelelő háromszög van, melynek a felső lapon van két csúcsa. | 1 pont | |
| Összesen tehát 32 megfelelő háromszög van. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **5. c) negyedik megoldás** | | |
|---|---|---|
| A téglatest egy kiválasztott testátlójának két végpontjához a téglatest maradék 6 csúcsának bármelyike választható a háromszög harmadik csúcsának. | 1 pont |  |
| (A téglatestnek 4 testátlója van, ezért) ilyen háromszögből összesen $6 \cdot 4 = 24$ darab van. | 1 pont | |
| Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik testátlója, akkor (nincs olyan oldala sem, amelyik a téglatest valamelyik éle, ezért) mindhárom oldala lapátló.<br>Ilyen háromszögből 8 darab van. | 1 pont |  |
| A megfelelő háromszögek száma 24 + 8 = 32. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **6. a)** | | |
|---|---|---|
| A háromszög kerülete 30 egység.<br>Jelölje az oldalak hosszát $x$, $x$ és $30 - 2x$. | 1 pont | |
| A szórás miatt:<br>$\sqrt{\frac{(10-x)^2 + (10-x)^2 + (2x-20)^2}{3}} = 3\sqrt{2}$. | 1 pont | |
| $200 - 40x + 2x^2 = 18$<br>$2x^2 - 40x + 182 = 0$<br>$x^2 - 20x + 91 = 0$ | 1 pont | $\sqrt{2(10-x)^2} = 3\sqrt{2}$<br>$\sqrt{(10-x)^2} = 3$<br>$\lvert 10 - x \rvert = 3$ |
| $x = 7$ vagy $x = 13$ | 1 pont | |
| A háromszög oldalai az első esetben 7, 7, 16 egység, a második esetben 13, 13, 4 egység. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: Az első eset nem lehetséges, mert nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A második eset lehetséges, mert teljesül a háromszög-egyenlőtlenség (és a szórás $\sqrt{\frac{3^2 + 3^2 + 6^2}{3}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ valóban). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

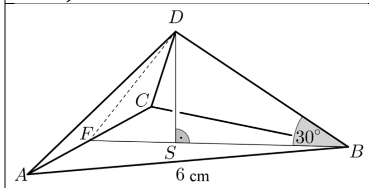
| **5. c) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A téglatest 8 csúcsa összesen $\binom{8}{3}=56$ háromszöget határoz meg. | 1 pont | |
| Ezek közül le kell vonni azokat, melyeknek síkja egybeesik a téglatest valamelyik lapjának síkjával. Mind a hat lapon négy ilyen háromszög van, összesen tehát 24. | 2 pont | |
| A megfelelő háromszögek száma (56 – 24 =) 32. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **5. c) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| (A feladat szerint nem választható olyan háromszög, amelynek két oldala a téglatest két élével azonos.) Ha a háromszög egyik oldala a téglatest egy éle, akkor ennek két végpontjához kétféleképpen választhatjuk a háromszög harmadik csúcsát (mert a kiválasztott élben csatlakozó két lap egyik csúcsa sem választható a háromszög harmadik csúcsaként). | 1 pont |  |
| (A téglatestnek 12 éle van, ezért) ilyen háromszögből összesen $12 \cdot 2 = 24$ darab van. | 1 pont | |
| Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik élével azonos, akkor mindhárom oldala a téglatest egy-egy lapjának átlója. A téglatest egy adott csúcsából kiinduló három él nem közös végpontjai egy megfelelő háromszöget határoznak meg. (A téglatestnek 8 csúcsa van, ezért) ilyen háromszögből 8 darab van. | 1 pont |  |
| A megfelelő háromszögek száma 24 + 8 = 32. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **5. c) harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| A téglatest „alsó” lapjáról két szomszédos csúcsot 4-féleképpen választhatunk, ezekhez a feltételnek megfelelően a „felső” lapjáról 2-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot. | 1 pont |  |
| Az alsó lapról két átellenes csúcsot 2-féleképpen választhatunk, ezekhez a felső lapról 4-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot. | 1 pont |  |





| **4. a)** | | |
|---|---|---|
|  Az ábra jelöléseit használjuk. A gúla *ABC* alaplapjának középpontja (súlypontja) *S*. *DS* merőleges az alaplapra, a feltétel szerint pedig $SBD\angle = 30°$. | 1 pont | |
| *BS* az *ABC* szabályos háromszög magasságának (súlyvonalának) kétharmada: $BS=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=2\sqrt{3}\,(\approx 3{,}46)$ (cm). | 2 pont | |
| A gúla testmagassága $DS = BS \cdot \mathrm{tg}30° = 2$ (cm). | 1 pont | |
| Az *ABC* háromszög területe: $T=\frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{6^2\cdot\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$ (≈ 15,59) (cm²). | 1 pont | |
| A gúla térfogata: $V=\frac{T\cdot DS}{3}=6\sqrt{3}$ (≈ 10,4) cm³. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **4. b)** | | |
|---|---|---|
| Ha az 1-es, a 2-es és a 3-as dobás valószínűsége *p*, akkor a 4-es dobás valószínűsége 5*p*. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $p + p + p + 5p = 8p = 1$, ezért $p=\frac{1}{8}$. | 1 pont | |
| (A dobott számok összege akkor lehet 6, ha az egyik tetraéderrel 2-t, a másikkal pedig 4-et, vagy ha mindkettővel 3-at dob a bűvész.) Annak a valószínűsége, hogy az egyik tetraéderrel 2-t, a másikkal pedig 4-et dob a bűvész, $2\cdot p\cdot 5p=10p^2=\frac{10}{64}$, | 1 pont | |
| annak a valószínűsége pedig, hogy mindkét tetraéderrel 3-at dob, $p\cdot p=p^2=\frac{1}{64}$. | 1 pont | |
| A kérdezett valószínűség ezek összege: $\frac{11}{64}$ (≈ 0,172). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

# II.

| 5. a) | | |
|---|---|---|
| (A szakaszok hosszát cm-ben mérve)<br>$2a + c = 18$ miatt $c = 18 - 2\cdot 7 = 4$. | 1 pont | |
| $a + 2b + c = 33$ miatt $b = \frac{33-7-4}{2} = 11$. | 1 pont | |
| A téglatest térfogata: $abc = 7\cdot 11\cdot 4 = 308$ cm$^3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 5. b) első megoldás | | |
|---|---|---|
| (A térfogatot az egyik él hosszának segítségével fejezzük ki.)<br>A $\left.\begin{array}{r}2a+c=18\\ a+2b+c=33\end{array}\right\}$<br>egyenletrendszer első egyenletéből: $c = 18 - 2a$. | 1 pont | |
| A második egyenletbe helyettesítve:<br>$2b = 33 - a - c = 33 - a - (18 - 2a) = a + 15$,<br>ezért $b = \frac{a}{2} + 7,5$. | 1 pont | |
| $V = abc = a\left(\frac{a}{2}+7,5\right)(18-2a)$ $(0 < a < 9)$ | 1 pont | |
| A $V(a) = a\left(\frac{a}{2}+7,5\right)(18-2a)$; $0 < a < 9$<br>függvénynek ott lehet maximuma, ahol $V'(a) = 0$. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $V(a) = -a^3 - 6a^2 + 135a$ | 1 pont | |
| $V'(a) = -3a^2 - 12a + 135 = -3(a^2 + 4a - 45)$ | 1 pont | |
| $a^2 + 4a - 45 = 0$ gyökei 5 és –9<br>(a –9 nem lehetséges, az 5 pedig megfelel). | 1 pont | |
| $V''(a) = -6a - 12$ és így $V''(5) < 0$,<br>tehát $V$-nek (abszolút) maximuma van $a = 5$-nél. | 1 pont | *Az $a = 5$ helyen a $V'$ függvény pozitívból negatívba megy át, ezért itt $V$-nek maximuma van.* |
| A téglatest térfogata maximális (400 cm$^3$),<br>ha éleinek hossza $a = 5$ cm, $b = 10$ cm és $c = 8$ cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |





| 5. b) második megoldás | | |
|---|---|---|
| (A térfogatot az egyik él hosszának segítségével fejezzük ki.)<br>A $\left.\begin{array}{r}2a+c=18\\ a+2b+c=33\end{array}\right\}$ egyenletrendszer két egyenletének különbségéből: $a - 2b = -15$, vagyis $a = 2b - 15$. | 1 pont | |
| Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy<br>$c = 18 - 2(2b - 15) = 48 - 4b$. | 1 pont | |
| A téglatest térfogata $V = abc = (2b - 15)b(48 - 4b)$<br>(ahol $7,5 < b < 12$). | 1 pont | |
| A $V(b) = 4b(2b - 15)(12 - b)$; $7,5 < b < 12$<br>függvénynek ott lehet maximuma, ahol $V'(b) = 0$. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $V(b) = -8b^3 + 156b^2 - 720b$ | 1 pont | |
| $V'(b) = -24b^2 + 312b - 720 = 24(-b^2 + 13b - 30)$ | 1 pont | |
| $-b^2 + 13b - 30 = 0$ gyökei a 10 és a 3 (a 3 nincs a $V$ értelmezési tartományában, a 10 pedig megfelel). | 1 pont | |
| A $b = 10$ helyen a $V'$ függvény pozitívból negatívba megy át, ezért itt $V$-nek (abszolút) maximuma van. | 1 pont | *$V''(b) = 24(-2b+13)$ és $V''(10) = -168 < 0$, ezért $V$-nek itt maximuma van.* |
| A téglatest térfogata maximális (400 cm$^3$),<br>ha éleinek hossza $b = 10$ cm, $a = 5$ cm és $c = 8$ cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

*Megjegyzések:*

1. *Ha a vizsgázó válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.*
2. $V(c) = \frac{1}{8}(c^3 - 66c^2 + 864c)$, *ahol* $0 < c < 18$;

   $V'(c) = \frac{3}{8}(c^2 - 44c + 288)$;

   *A* $c^2 - 44c + 288 = 0$ *egyenlet gyökei* 8 *és* 36
   *(a* 36 *nincs a V értelmezési tartományában, a* 8 *pedig megfelel);*

   $V''(c) = \frac{3}{4}(c - 22)$ *és* $V''(8) = -10,5 < 0$.