ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. október 15.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

9. b)		
Domonkos a harmadik és negyedik kérdésre is $\frac{1}{3}$, az ötödik kérdésre pedig $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ad helyes választ.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Domonkos legalább 2 helyes választ ad.) Pontosan 2 helyes válasza akkor lesz, ha mindhárom tippelt kérdést elrontja. Ennek valószínűsége $P(2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(=\frac{2}{9}\right)$.	1 pont	
Pontosan 3 helyes válasza akkor lesz, ha a három tippelt kérdés közül egyet talál el: ez lehet a teszt harmadik, negyedik vagy ötödik kérdése (és ezek egymást kizáró események). Ennek valószínűsége $P(3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(=\frac{4}{9}\right)$.	1 pont	
Pontosan 4 helyes válasza akkor lesz, ha a három tippelt kérdés közül egyet ront el: ez lehet a teszt harmadik, negyedik vagy ötödik kérdése (és ezek egymást kizáró események). Ennek valószínűsége $P(4)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(=\frac{5}{18}\right)$.	1 pont	
5 helyes válasza akkor lesz, ha mindhárom tippelt kérdést eltalálja. $P(5)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{18}\right)$.	1 pont	$P(5) =$ $= 1 - P(2) - P(3) - P(4)$
Domonkos helyes válaszai számának várható értéke: $\frac{2}{9}\cdot 2+\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{5}{18}\cdot 4+\frac{1}{18}\cdot 5=\frac{57}{18}\left(=\frac{19}{6}\right)$.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: A vizsgázó teljes pontszámot kapjon, ha helyesen hivatkozik arra, hogy független valószínűségi változók összegének várható értéke a várható értékeik összege, így a helyes válaszok számának várható értéke az öt kérdésre adott helyes válaszok száma várható értékeinek összegeként is felírható: $1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{19}{6}$.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
$d(10) = -0{,}25 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 + 40 = 215$ (mm)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
A törzs átmérője (centiméterben mérve) 21,5.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

1. b)		
A törzs átmérője a 11. év végén $d(11) \approx 230$ (mm).	1 pont	
A keresztmetszet gyarapodását az $r_{11} \approx 115$ mm és $r_{10} = 107{,}5$ mm sugarú körök által határolt körgyűrű területe adja meg.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak megoldásból derül ki.*
Ennek nagysága $r_{11}^2\pi - r_{10}^2\pi \approx 5200$ (mm²),	1 pont	*r_{11} pontos értékével számolva 5152 mm², a megoldásban írt közelítéssel 5243 mm² a számolás eredménye.*
ez (dm²-ben mérve és egy tizedesjegyre kerekítve) 0,5.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**4 pont**	

1. c)		
Ha a törzs kerülete 1 m = 1000 mm, akkor átmérője $\frac{1000}{\pi} \approx 318$ mm.	1 pont	
$d(x) = -0{,}25x^2 + 20x + 40 = 318$, innen $x^2 - 80x + 1112 = 0$.	2 pont	
$x_1 \approx 17{,}9$ és $x_2 \approx 62{,}1$.	1 pont	
($x_2 > 20$ nem megfelelő, tehát) a fa megközelítőleg 18 éves.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Tehát az első alkalommal 5 tanuló hiányzott, és a dolgozatot ekkor megíró tanulók (helyes) átlageredménye 67,2 pont volt.	1 pont	*Tehát 5 tanuló hiányzott, és a hiányzók nélkül számított helyes átlageredmény* (63 + 4,2 =) 67,2 *pont volt.*
Ellenőrzés a szöveg alapján: 75 tanuló írta meg első alkalommal a dolgozatot, az ő pontszámaik összege $75 \cdot 67{,}2 = 5040$. Ezt a pótdolgozatot író 5 tanuló $5 \cdot 64 = 320$ ponttal növelte. Így a 80 tanuló átlaga $\frac{5360}{80} = 67$ pont lett valóban.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

9. a) második megoldás		
Jelölje x a hiányzó tanulók számát (x pozitív egész szám, $x < 80$), az első alkalommal megírt dolgozatok pontszámának összegét pedig P. Ekkor az első információ alapján $\frac{P}{80} + 4{,}2 = \frac{P}{80 - x}$. Másrészt a teljes tizedik évfolyam átlageredménye: $\frac{P + x \cdot 64}{80} = 67$ pont volt.	1 pont	
(Megoldandó tehát a két egyenletből álló egyenletrendszer.) Az első egyenletből $P \cdot x + 336x = 26\,880$, a másodikból pedig $P + 64x = 5360$.	1 pont	
Innen $P = 5360 - 64x$, amit az első egyenletbe visszahelyettesítünk. Rendezés után $0 = 64x^2 - 5696x + 26880$, azaz $0 = x^2 - 89x + 420$ adódik.	2 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = 5$ és $x_2 = 84$ (utóbbi nem megfelelő).	2 pont	
Ha $x = 5$, akkor $P = 5040$.	1 pont	
Tehát az első alkalommal 5 tanuló hiányzott, és a dolgozatot ekkor megíró tanulók (helyes) átlageredménye $\left(\frac{5040}{80 - 5} =\right)$ 67,2 pont volt.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: 75 tanuló írta meg első alkalommal a dolgozatot, az ő pontszámaik összege $75 \cdot 67{,}2 = 5040$. Ezt a pótdolgozatot író 5 tanuló $5 \cdot 64 = 320$ ponttal növelte. Így a 80 tanuló átlaga $\frac{5360}{80} = 67$ pont lett valóban.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

8. c) második megoldás		
Képzeljük úgy, hogy mindenképp lejátszanak 12 játszmát, még akkor is, ha Bori korábban eléri már a 10 pontot.	2 pont	
Annak a valószínűségét kell így meghatározni, hogy Bori a 12 játszmából 10, 11 vagy 12 játszmát nyer meg.	1 pont	
Ehhez ki kell számolni és összeadni az $n = 12$ és $p = 0{,}6$ paraméterű binomiális eloszlás megfelelő tagjait.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$P(10)=\binom{12}{10}\cdot 0{,}6^{10}\cdot 0{,}4^{2}$ ($\approx 0{,}064$) $P(11)=\binom{12}{11}\cdot 0{,}6^{11}\cdot 0{,}4^{1}$ ($\approx 0{,}017$) $P(12)=\binom{12}{12}\cdot 0{,}6^{12}\cdot 0{,}4^{0}$ ($\approx 0{,}002$)	2 pont	
A keresett valószínűség az előző valószínűségek összege, azaz kb. 0,083.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. a) első megoldás		
Jelölje az első alkalommal hiányzó tanulók számát x (x pozitív egész szám, $x < 80$), a dolgozatot első alkalommal megírók (helyes) átlageredményét pedig y ($y > 4{,}2$). A pontszámok összegét kétféleképpen felírva $(80 - x)y = 80(y - 4{,}2)$ adódik. A teljes tizedik évfolyam átlageredménye pedig $\frac{(80-x)y+64x}{80}=67$ pont volt.	2 pont	*Az első alkalommal hiányzók száma x, a rosszul kiszámolt átlageredmény pedig r pont volt.* $80r = (80 - x)(r + 4{,}2)$ *és* $80r + 64x = 80\cdot 67$.
(Megoldandó tehát a két egyenletből álló egyenletrendszer.) Az első egyenletből $xy = 336$, a második egyenletből $80y - xy + 64x = 5360$.	1 pont	*Az első egyenletből* $336 - 4{,}2x - rx = 0$, *a második egyenletből* $r = 67 - 0{,}8x$.
Behelyettesítve xy értékét $80y + 64x = 5696$, azaz $5y + 4x = 356$. Innen $x = 89 - 1{,}25y$, így $(89 - 1{,}25y)\cdot y = 336$, vagyis $1{,}25y^2-89y+336=0$.	2 pont	*Ezt az első egyenletbe helyettesítve:* $0{,}8x^2-71{,}2x+336=0$.
Az egyenlet gyökei $y_1 = 67{,}2$ és $y_2 = 4$ (ez utóbbi nem megfelelő).	1 pont	*Ennek gyökei 5 és 84 (ez utóbbi nem megfelelő).*
$x=\frac{336}{67{,}2}=5$	1 pont	$r = 67 - 0{,}8\cdot 5 = 63$

2. a)		
$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi$,	2 pont	
ahol $k\in\mathbf{Z}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó válaszát fokban (helyesen) adja meg, akkor ezért 1 pontot veszítsen.
2. Ha a vizsgázó válaszát periódus nélkül adja meg, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.
3. Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett a $\cos x = 0{,}5$ *egyenletet oldja meg (helyesen), akkor ezért 1 pontot kapjon.*

2. b)		
Értelmezési tartomány: $x \ge 20$.	1 pont	
Négyzetre emelve (az értelmezési tartományon ekvivalens átalakítás): $\frac{x}{5}-4<400$.	1 pont	
$x < 2020$	1 pont	
(Az értelmezési tartománnyal összevetve tehát) az egyenlőtlenség megoldása: $20 \le x < 2020$.	1 pont	$x\in[20;\ 2020[$
Összesen:	**4 pont**	

2. c)		
Értelmezési tartomány: $x > -50$.	1 pont	
(Mivel $0{,}5^{-8} = 256$, ezért) $\log_{0,5}(2x+100)\ge\log_{0,5}256$.	1 pont	
A 0,5 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken,	1 pont	
ezért $2x + 100 \le 256$.	1 pont	
$x \le 78$	1 pont	
Az értelmezési tartománnyal összevetve tehát (a valós számok halmazán) az egyenlőtlenség megoldása: $-50 < x \le 78$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az egyenlőtlenség egész gyökeinek száma 128.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a) első megoldás		
$p=\frac{7}{8}q$ és $r=\frac{5}{3}p=\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{8}q=\frac{35}{24}q$.	2 pont	$q=\frac{8}{7}p$ és $r=\frac{5}{3}p$.
$p+q+r=\frac{7}{8}q+q+\frac{35}{24}q=\frac{80}{24}q=\frac{10}{3}q$	1 pont	$p+q+r=\frac{80}{21}p$
$\frac{10}{3}q=180$, tehát $q = 54$.	1 pont	$\frac{80}{21}p=180$, így $p=\frac{189}{4}$.

$p=\frac{7}{8}\cdot 54=\frac{189}{4}$ $(=47{,}25)$ $r=\frac{5}{3}p=\frac{315}{4}$ $(=78{,}75)$	2 pont	$q = 54$, $r = 78{,}75$
Összesen:	**6 pont**	

3. a) második megoldás		
$p:q=21:24$ és $r:p=35:21$ miatt	1 pont	
$p = 21x$, $q = 24x$, $r = 35x$.	1 pont	$p:q:r=21:24:35$
$p + q + r = 80x = 180$	1 pont	*Osszuk a* 180*-at* 21 + 24 + 35 = 80 *egyenlő részre,*
$x=\frac{180}{80}=\frac{9}{4}$	1 pont	*így egy rész* $\frac{180}{80}=\frac{9}{4}$ *lesz.*
$q=24\cdot\frac{9}{4}=54$ $p=21\cdot\frac{9}{4}=\frac{189}{4}(=47{,}25)$ $r=35\cdot\frac{9}{4}=\frac{315}{4}(=78{,}75)$	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. b) első megoldás		
A lehetséges (egyenlően valószínű) kiválasztások száma $\binom{90}{2}$(= 4005) (összes eset száma).	1 pont	
Kedvezők azok az esetek, amelyekben az egyik kiválasztott szám a 90, a másik tetszőleges, illetve amelyekben a két kiválasztott szám összege 90.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az összes eset között 89 olyan eset van, amelyben az egyik kiválasztott szám a 90,	1 pont	
és 44 olyan eset, amelyben a két kiválasztott szám összege 90 (1 + 89, 2 + 88, …, 44 + 46).	2 pont	
A kedvező esetek száma tehát (89 + 44 =) 133.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{133}{\binom{90}{2}}=\frac{133}{4005}$ (≈ 0,0332).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem foglalkozik azzal az esettel, amikor az egyik kiválasztott szám a 90, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

8. a)		
A *b* jelű ív egyenlete: $y=(x+1)^3$, $-1\le x\le 0$. A *c* jelű ív egyenlete: $y=-(x+1)^3$, $-1\le x\le 0$. A *d* jelű ív egyenlete: $y=(x-1)^3$, $0\le x\le 1$.	4 pont	*Egy jó megoldás esetén 2 pont, két jó megoldás esetén 3 pont jár.*
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzések:
1. Az x-re vonatkozó feltételek hiánya esetén a vizsgázó összesen 1 pontot veszítsen.
2. Az x-re vonatkozó feltételek megállapításánál szigorú egyenlőtlenség is elfogadható.

8. b)		
A tábla jobb felső negyedében a sötétített rész területe: $\int_0^1(1-x)^3\,dx=\int_0^1(1-3x+3x^2-x^3)dx=$	1 pont	$\int_0^1(1-x)^3\,dx=$
$=\left[x-\frac{3}{2}x^2+x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=$	1 pont	$=\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1=$
$=\frac{1}{4}$.	1 pont	
A tábla fehér részének területe tehát $\left(2\cdot2-4\cdot\frac{1}{4}=\right)3\text{ dm}^2$.	1 pont	
4000 táblán tehát 12 000 dm² területet kell bevonni, ehhez (12 000 : 1200 =) 10 kg festékre van szükség.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. c) első megoldás		
Annak a valószínűségét kell meghatározni, hogy legfeljebb 12 játszmából Bori eléri a 10 pontot, tehát 10-0 vagy 10-1 vagy 10-2 lesz a játék végeredménye.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$P(10\text{-}0) = 0{,}6^{10}$ (≈ 0,006)	1 pont	
11 játszma után ér véget a játék, ha az első 10 játszmából Bori 9-et nyer, egyet elveszít, és a 11. játszmát ismét ő nyeri.	1 pont	
$P(10\text{-}1)=\binom{10}{9}\cdot0{,}6^9\cdot0{,}4\cdot0{,}6$ (≈ 0,024)	1 pont	
12 játszma után fejeződik be a játék, ha az első 11 játszma közül Bori 9-et nyer, kettőt elveszít, és a 12. játszmát is ő nyeri.	1 pont	
$P(10\text{-}2)=\binom{11}{9}\cdot0{,}6^9\cdot0{,}4^2\cdot0{,}6$ (≈ 0,053)	1 pont	
A keresett valószínűség az előző valószínűségek összege, azaz kb. 0,083.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Ebből $n = -1$ adódik.	1 pont	
Ez ellentmond az $n > 2$ feltételnek, tehát valóban nincs a feltételnek megfelelő egész szám.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. b)

A számtani sorozat tulajdonságai miatt: $\binom{n}{4}+\binom{n}{6}=2\binom{n}{5}$.	1 pont	
A binomiális együtthatókat kifejtve: $\frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}+\frac{n!}{(n-6)!\cdot 6!}=2\cdot\frac{n!}{(n-5)!\cdot 5!}$.	2 pont*	
Mindkét oldalt $n!$-sal osztva és 6!-sal szorozva: $\frac{5\cdot 6}{(n-4)!}+\frac{1}{(n-6)!}=\frac{2\cdot 6}{(n-5)!}$.	2 pont*	
Mindkét oldalt $(n-4)!$-sal szorozva: $30+(n-4)(n-5)=12(n-4)$.	1 pont*	
A műveleteket elvégezve és rendezve: $n^2-21n+98=0$,	1 pont	
ahonnan $n = 7$ vagy 14.	1 pont	
Ellenőrzés: mindkettő valóban megoldás, hiszen $\binom{7}{4}=35$, $\binom{7}{5}=21$ és $\binom{7}{6}=7$ ($d = -14$), valamint $\binom{14}{4}=1001$, $\binom{14}{5}=2002$ és $\binom{14}{6}=3003$ ($d = 1001$).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A binomiális együtthatókat kifejtve: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-5)}{6!}=$ $=2\cdot\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-4)}{5!}$.	2 pont	
Mindkét oldalt $n(n-1)(n-2)(n-3)$-mal osztva és 4!-sal szorozva: $1+\frac{(n-4)(n-5)}{6\cdot 5}=2\cdot\frac{n-4}{5}$.	2 pont	
Mindkét oldalt 30-cal szorozva: $30+(n-4)(n-5)=12(n-4)$.	1 pont	

3. b) második megoldás

Akkor lesz a kiválasztott két szám egy derékszögű háromszög két szöge, ha vagy elsőre a 90-et választjuk (és másodikra bármelyik másikat), vagy másodikra választjuk a 90-et (és elsőre bármelyik másikat), vagy az elsőnek választott számot a második 90-re egészíti ki.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\frac{1}{90}$ a valószínűsége, hogy elsőre a 90-et választjuk.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy másodikra választjuk a 90-et: $\frac{89}{90}\cdot\frac{1}{89}=\frac{1}{90}$.	1 pont	*Annak a valószínűsége, hogy másodikra választjuk a 90-et ugyanannyi, mint annak, hogy elsőre.*
(A 45-öt nem lehet egy másik számmal 90-re kiegészíteni.) $\frac{88}{90}$ annak a valószínűsége, hogy elsőre nem a 90-et és nem a 45-öt választjuk,	1 pont	
és ekkor $\frac{1}{89}$ annak a valószínűsége, hogy a másodiknak választott szám az elsőként választott számot 90-re egészíti ki.	1 pont	
Ennek az esetnek $\frac{88}{90}\cdot\frac{1}{89}$ a valószínűsége.	1 pont	
A keresett valószínűség tehát $\frac{1}{90}+\frac{1}{90}+\frac{88}{90}\cdot\frac{1}{89}=\frac{133}{4005}$ (≈ 0,0332).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a)

hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	*P*	*N*	*N*	0	*P*
f'' előjele	*N*	*N*	*P*	*P*	*P*

(táblázat fent)	4 pont	*7 jó válaszért 3 pont, 5-6 jó válaszért 2 pont, 3-4 jó válaszért 1 pont, 3-nál kevesebb helyes válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**4 pont**	

4. b) első megoldás

(A keresett egyenes nem párhuzamos az adott parabola tengelyével.) Úgy kell meghatározni k értékét, hogy az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy (rendezett valós számpár) megoldása legyen. $\left.\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+8 \\ 4x-y=k \end{array}\right\\}$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

A második egyenletből kifejezzük y-t, és behelyettesítjük az első egyenletbe: $y = 4x - k$, így $4x - k = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 8$.	1 pont	$x = \frac{y+k}{4}$ $y = -\frac{1}{4}\left(\frac{y+k}{4} - 2\right)^2 + 8$
Nullára rendezve: $-\frac{1}{4}x^2 - 3x + 7 + k = 0$.	1 pont	$-\frac{1}{64}y^2 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{32}k\right)y +$ $+\left(7 + \frac{k}{4} - \frac{1}{64}k^2\right) = 0$
A másodfokú egyenletnek akkor lesz egy megoldása, ha a diszkriminánsa nulla:	1 pont	
$9 - 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(7+k) = 0$.	1 pont	$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{32}k\right)^2 +$ $+\frac{1}{16}\left(7 + \frac{k}{4} - \frac{1}{64}k^2\right) = 0$
Innen $16 + k = 0$, azaz $k = -16$.	1 pont	$1 + \frac{1}{16}k = 0$, $k = -16$
A $-\frac{1}{4}x^2 - 3x - 9 = 0$ egyenlet (egyetlen) gyöke $x = -6$,	1 pont	
és ekkor y $(= 4x - k = 4\cdot(-6) - (-16)) = -8$.	1 pont	
Az érintési pont $(-6; -8)$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

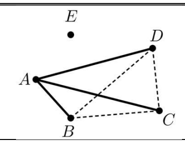
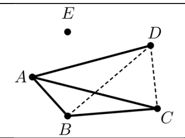
4. b) második megoldás

Az érintő egyenlete $y = 4x - k$, így az érintő meredeksége 4.	1 pont	
Ezért az érintési pontban az $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 8$ $(x \in \mathbf{R})$ másodfokú függvény deriváltjának értéke 4.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + 7\right)' = -\frac{1}{2}x + 1$	2 pont	$f'(x) = -\frac{1}{4}\cdot 2\cdot(x-2) =$ $= -\frac{1}{2}x + 1$
Így $-\frac{1}{2}x + 1 = 4$, azaz $x = -6$.	1 pont	
$f(-6)\left(= -\frac{1}{4}(-6-2)^2 + 8\right) = -8$	1 pont	
Az érintési pont $(-6; -8)$.	1 pont	
Az érintési pontba húzható érintő egyenlete $y + 8 = 4(x + 6)$, azaz $y = 4x + 16$.	1 pont	
A k valós szám értéke tehát -16.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Matematika — emelt szint	Javítási-értékelési útmutató

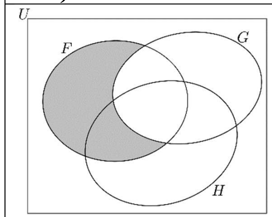
Így összesen $\binom{5}{3}\cdot 5! =$	1 pont	
$= 1200$-féle útvonal lehetséges.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

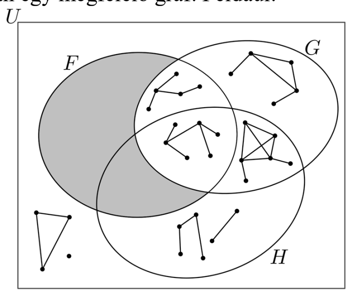
6. d)

(Indirekt bizonyítás.) Tegyük fel, hogy nincs olyan háromszög, amelynek mindhárom éle ugyanolyan színű, de az ötszög egyik, pl. A csúcsából kiinduló AB, AC és AD szakaszok egyforma színűek, például mindhárom zöld. (A bizonyítás szempontjából az AE szakasz színe ekkor közömbös.)	1 pont	
A BCD háromszög mindhárom oldala nem lehet kék, mert akkor azonos színűek lennének a BCD háromszög oldalai.	1 pont	
Ezért a BC, CD, DB szakaszok közül legalább az egyik zöld színű. Legyen ilyen például a BC.	1 pont	
Ekkor azonban az ABC háromszög mindhárom oldala zöld, ami ellentmond a kiindulási feltételnek.	1 pont	
Az indirekt feltevés tehát hamis, így az eredeti állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a)

(Indirekt bizonyítás.) Tegyük fel, hogy létezik ilyen n egész szám $(n \geq 3)$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ekkor a mértani sorozat tulajdonságai miatt: $\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{3} = \binom{n}{2}^2$.	1 pont	
(A binomiális együtthatókat kifejtve $n\cdot\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!} = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\cdot\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}$, majd a törtek egyszerűsítése után:) $n\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$.	2 pont	
Mindkét oldalt $n^2\cdot(n-1)$-gyel osztva: $\frac{n-2}{6} = \frac{n-1}{4}$.	1 pont	

6. a)		
	1 pont	
$F \setminus G = \{\ \}$	1 pont	$F \cap \overline{G} = \emptyset$
Összesen:	**2 pont**	

6. b)		
A Venn-diagram minden egyes további részében pontosan egy megfelelő gráf. Például: 	5 pont	Az $\overline{F \setminus G}$-ben *minden hiányzó vagy hibás gráf esetén 1 pontot (összesen legfeljebb 5 pontot) veszítsen a vizsgázó.*
Összesen:	**5 pont**	

6. c) első megoldás		
Az M, N, O, P, Q épületek közül 3 különbözőt $5 \cdot 4 \cdot 3$ (= 60)-féle sorrendben járhat be az őr.	1 pont	
A három kiválasztott épület elé, közé vagy mögé 4 helyre sorolható a K, majd az így kapott négy épülethez képest 5 helyre sorolható az L épület.	1 pont	
Így összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$	1 pont	
= 1200-féle útvonal lehetséges.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. c) második megoldás		
Az M, N, O, P, Q épületek közül 3-at $\binom{5}{3}$-féleképpen választhat ki az őr.	1 pont	
A három épülethez hozzávéve K-t és L-et, megkapja az 5 ellenőrizendő épületet, amelyek bejárási sorrendje 5!-féle lehet.	1 pont	

II.

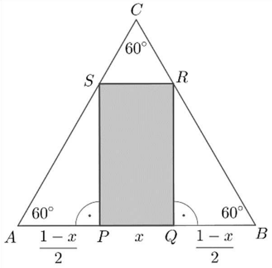
5. a) első megoldás		
(A szokásos jelölésekkel) legyen például $m_a = m_b$. A háromszög területére: $\frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2}$,	2 pont	
amiből $a = b$ következik.	1 pont	
A háromszög tehát egyenlő szárú, az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. a) második megoldás		
(A szokásos jelölésekkel) legyen például $m_a = m_b$. Bármely háromszögben $c \cdot \sin\beta = m_a$ és $c \cdot \sin\alpha = m_b$, így $c \cdot \sin\beta = c \cdot \sin\alpha$, azaz $\sin\beta = \sin\alpha$.	2 pont	
$\beta = 180° - \alpha$ nem lehetséges, mert a háromszög szögeinek összege 180°.	1 pont	
Így $\alpha = \beta$, a háromszög valóban egyenlő szárú.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b)		
A szinusztétel szerint: $\frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$.	1 pont	
$\sqrt{3} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$	1 pont	
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,	1 pont	
vagyis $\alpha = 30°$.	1 pont	
$\beta = 2 \cdot 30° = 60°$, a harmadik szög pedig 90°-os.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

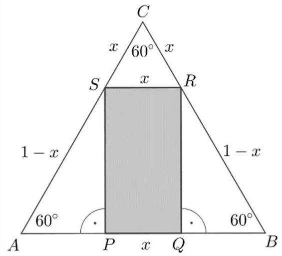
Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{27}}{3} = \sqrt{3}$ *miatt a 2a oldalú szabályos háromszögre (annak „felére”) hivatkozik, és ez alapján azt állítja, hogy* 30°, 60° *és* 90° *lehetnek a háromszög szögei, de nem bizonyítja, hogy más eset nem lehetséges, akkor erre a gondolatmenetre legfeljebb 2 pontot kaphat.*
2. Ha a vizsgázó közelítő értékekkel helyesen számol, akkor teljes pontszámot kapjon.

5. c) **első megoldás**		
 (A feladat megértését tükröző ábra.) Legyen a PQ szakasz hossza x $(0 < x < 1)$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen dolgozik.* *Ha $AP = QB = d$,*
ekkor $AP = QB = \frac{1-x}{2}$,	1 pont	*akkor $PQ = 1 - 2d$, és*
és $PS = QR = \sqrt{3}AP = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$.	1 pont	$PS = QR = \sqrt{3}AP = \sqrt{3}d$.
A $PQRS$ téglalap területét a $T(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$ $(0 < x < 1)$ függvény adja meg.	1 pont	$t(d) = \sqrt{3}d(1-2d)$ $(0 < d < 0{,}5)$
Az $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$ másodfokú függvény maximumhelye a két zérushelyének (0 és 1) számtani közepe: 0,5. (Ez a T maximumhelye is.)	2 pont*	*A $d \mapsto 2\sqrt{3}d\left(\frac{1}{2}-d\right)$ másodfokú függvény maximumhelye a két zérushelyének (0 és 0,5) számtani közepe: $\frac{1}{4}$.* *(Ez a t maximumhelye is.)*
Tehát a maximális terület: $T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ $(\approx 0{,}217)$.	1 pont	$t\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

$T'(x) = -\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ és $T''(x) = -\sqrt{3}$.	1 pont	
Mivel $T'(0{,}5) = 0$ és $T''(0{,}5) < 0$ (vagy: az első derivált pozitívból negatívba megy át), ezért T-nek 0,5-ben maximuma van.	1 pont	

5. c) **második megoldás**		
 (A feladat megértését tükröző ábra.) Legyen a PQ szakasz hossza x $(0 < x < 1)$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen dolgozik.*
A $PQRS$ téglalap területét megkapjuk, ha az ABC háromszög területéből levonjuk az $SC = x$ és az $AS = 1 - x$ oldalú szabályos háromszögek területét.	1 pont	
A levonandó területek összege $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 2x + 1)$.	1 pont	
A $PQRS$ téglalap területét a $T(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$ $(0 < x < 1)$ függvény adja meg.	1 pont	*A téglalap területe maximális, ha az* $L(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 2x + 1)$ $(0 < x < 1)$ *függvény minimális.*
Az $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$ másodfokú függvény maximumhelye a két zérushelyének (0 és 1) számtani közepe: 0,5. (Ez a T maximumhelye is.)	2 pont*	*Az L képe felfelé nyitott parabolaív, minimumhelye* $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ *(ami eleme az L értelmezési tartományának).*
Tehát a maximális terület $T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ $(\approx 0{,}217)$.	1 pont	*A maximális terület* $\frac{\sqrt{3}}{4} - L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt $x(1-x) \le \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.	1 pont	
Egyenlőség $x = \frac{1}{2}$ esetén van (és ez eleme a T értelmezési tartományának).	1 pont	