ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2020. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

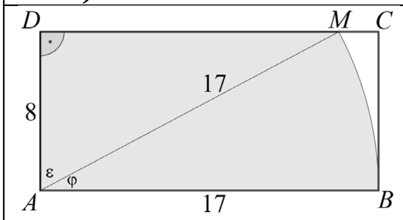
1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

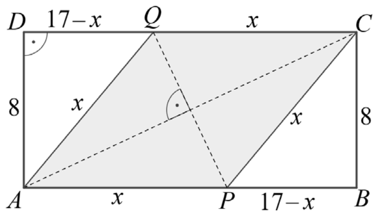
Tartalmi kérések:

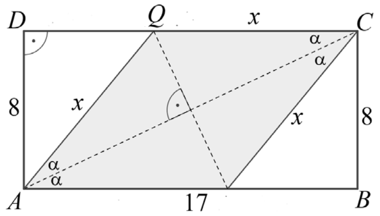
1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
 A feladat feltételeit helyesen tükröző ábra.	1 pont	
(Az ábra jelöléseit használva) az *ADM* derékszögű háromszögből: $DM = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (cm).	1 pont	
Az *ADM* háromszög területe: $\frac{8 \cdot 15}{2} = 60$ (cm^2).	1 pont	
Az *ADM* háromszögből $\cos\varepsilon = \frac{8}{17}$, $\varepsilon \approx 61{,}93°$.	1 pont	
A *BAM* körcikk középponti szöge: $\varphi = 90° - \varepsilon \approx 28{,}07°$,	1 pont	
területe: $\frac{17^2\pi \cdot 28{,}07°}{360°} \approx 70{,}8$ (cm^2).	1 pont	
A téglalapból lefedett rész területe körülbelül: $60 + 70{,}8 = 130{,}8$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b) első megoldás		
 Megfelelő ábra. (A rombusz oldalának hossza *x* cm.)	1 pont	
Az *AQD* derékszögű háromszögben (Pitagorasz-tétellel): $(17-x)^2 + 8^2 = x^2$.	1 pont	
$289 - 34x + x^2 + 64 = x^2$	1 pont	
$34x = 353$ $x = \frac{353}{34} \approx 10{,}38$ (cm)	1 pont	
A rombusz kerülete $4x = \frac{706}{17} \approx 41{,}5$ cm.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

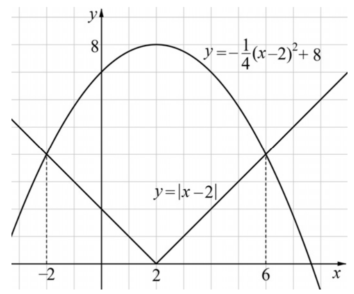
1. b) második megoldás		
 Megfelelő ábra. (A rombusz oldalának hossza x cm.)	1 pont	
Ha $CAB\angle = \alpha$, akkor az ABC derékszögű háromszögben $\mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{17}$, $\alpha \approx 25{,}2°$.	1 pont	
$DAQ\angle = 90° - 2\alpha \approx 39{,}6°$	1 pont*	
Az ADQ háromszögből: $x = \frac{8}{\cos 39{,}6°} \approx 10{,}38$ (cm).	1 pont*	
A rombusz kerülete $4x \approx 41{,}5$ cm.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

$AC = \sqrt{17^2 + 8^2} = \sqrt{353}$ ($\approx 18{,}79$) (cm)	1 pont	
(Szinusztétellel az ACQ háromszögből) $\frac{x}{\sqrt{353}} = \frac{\sin 25{,}2°}{\sin(180° - 2 \cdot 25{,}2°)}$, ahonnan $x \approx 10{,}38$ (cm).	1 pont	

2. a) első megoldás		
Ha $x > 2$, akkor az eredeti egyenlet: $x - 2 = 7 + x - 0{,}25x^2$;	1 pont	
ha $x \le 2$, akkor pedig az eredeti egyenlet: $2 - x = 7 + x - 0{,}25x^2$.	1 pont	
Nullára rendezve az első esetben $x^2 - 36 = 0$, a második esetben $x^2 - 8x - 20 = 0$ adódik.	1 pont	
Az $x^2 - 36 = 0$ egyenlet gyökei a 6 és a –6,	1 pont	
az $x^2 - 8x - 20 = 0$ egyenlet gyökei a 10 és a –2.	1 pont	
A –6, illetve a 10 nem eleme a kijelölt alaphalmaznak (a 6 és a –2 igen).	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó mind a négy gyököt behelyettesítéssel ellenőrzi, és ez alapján helyesen válaszol.*
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a 6 és a –2 gyöke az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az abszolútértéket indoklás nélkül elhagyja, megoldja a valós számok halmazán az $x - 2 = 7 + x - 0{,}25x^2$ egyenletet, majd ellenőrzi a kapott gyököket, akkor megoldására legfeljebb 3 pontot kaphat.

2. a) második megoldás		
$7+x-0{,}25x^2=-\frac{1}{4}(x-2)^2+8$	1 pont	
Az f: $x\mapsto \lvert x-2\rvert$ függvény ábrázolása.	1 pont	
A g: $x\mapsto -\frac{1}{4}(x-2)^2+8$ függvény ábrázolása (ugyanabban a koordináta-rendszerben).	2 pont	
A metszéspontok első koordinátái: $x_1=-2$ és $x_2=6$.	1 pont	
$f(-2)=g(-2)=4$ és $f(6)=g(6)=4$, tehát az egyenletnek két megoldása van, a –2 és a 6.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. a) harmadik megoldás		
$7+x-0{,}25x^2=-\frac{1}{4}(x-2)^2+8$	1 pont	
Mivel $(x-2)^2=\lvert x-2\rvert^2$, így $\lvert x-2\rvert=-\frac{1}{4}\lvert x-2\rvert^2+8$.	1 pont	
Az adott egyenlet $\lvert x-2\rvert$-re nézve másodfokú: $\lvert x-2\rvert^2+4\lvert x-2\rvert-32=0$.	1 pont	
Az egyenlet gyökei $\lvert x-2\rvert=4$ vagy $\lvert x-2\rvert=-8$.	1 pont	
Az első esetből $x_1=-2$ vagy $x_2=6$,	1 pont	
a második eset viszont nem lehetséges ($\lvert x-2\rvert\ge 0$).	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. b) első megoldás		
Értelmezési tartomány: $x^2-200>0$ (azaz $x^2>200$).	1 pont	
A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ezért az eredeti egyenlőtlenségből $x^2-200<2^{20}$, azaz $x^2<2^{20}+200$ következik,	1 pont	
tehát $200<x^2<2^{20}+200$, azaz $\sqrt{200}<\lvert x\rvert<\sqrt{2^{20}+200}$ ($\approx$ 1024,1).	1 pont	
(Mivel x egész szám, ezért) $15\le\lvert x\rvert\le 1024$.	1 pont	
$\lvert x\rvert$ lehetséges értékeinek száma 1024 – 14 (= 1010).	1 pont	
Mivel x negatív egész szám is lehet, az egyenlőtlenség megoldásainak száma $2\cdot(1024-14)=2020$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b) **második megoldás**		
Értelmezési tartomány: $x^2-200>0$ (azaz $x^2>200$).	1 pont	
A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ezért az eredeti egyenlőtlenségből $x^2-200<2^{20}$, azaz $x^2<2^{20}+200$ következik,	1 pont	
1-től 200-ig 14 darab pozitív négyzetszám van $(14^2=196)$.	1 pont	*x^2 legkisebb értéke 15^2.*
Mivel $(2^{10})^2<2^{20}+200<(2^{10}+1)^2$, ezért x^2 legnagyobb értéke $(2^{10})^2$.	1 pont	$2^{20}+200=1\,048\,776$, $(2^{10}+1)^2=1\,050\,625$
x^2 lehetséges értékeinek száma $2^{10}-14\ (=1010)$.	1 pont	
Mivel x negatív egész szám is lehet, az egyenlőtlenség megoldásainak száma $2\cdot(2^{10}-14)=2020$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. a)		
Ha 67 000 fő az álláskeresők 26,0%-a, akkor az álláskeresők 1%-a $\left(\dfrac{67\,000}{26}\approx\right)$2577 fő,	1 pont	Az álláskeresők száma $\dfrac{67\,000}{0,26}\approx 257\,692$,
az összes álláskereső száma pedig kb. 257 700,	1 pont	
ami tízezer főre kerekítve 260 ezer fő.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: *A* 26,0% *kerekített érték, ezért az álláskeresők számára (á) nézve fennáll:* $\dfrac{67\,000}{0,2605}<á\le\dfrac{67\,000}{0,2595}$*, vagyis* $257\,197\le á\le 258\,189$.

Ha a hírben szereplő 67 000 *fő ezresre kerekített, akkor ez a szám a* $[66\,500; 67\,499]\cap\mathbf{N}$ *halmaz egyik eleme, és így* $255\,279\le á\le 260\,112$ *adódik.* A 260 000 *fő tehát ebben az esetben is helyes válasz a feladat kérdésére.*

3. b) **első megoldás**		
Az álláskeresők száma (*á*) a munkavállalási korú népesség létszámával (*m*) kifejezve: $á=m\cdot 0{,}038$, a gazdaságilag aktív népesség létszámával (*g*) kifejezve pedig: $á=g\cdot 0{,}056$.	1 pont	
$m\cdot 0{,}038=g\cdot 0{,}056$	1 pont	
$g=m\cdot\dfrac{0,038}{0,056}\left(=m\cdot\dfrac{19}{28}\right)\approx m\cdot 0{,}679$.	1 pont	
A munkavállalási korú népességnek kb. 68%-a volt a gazdaságilag aktív népesség.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó további szöveges indoklás nélkül, csak a 3,8 *és az* 5,6 *(vagy a* 0,038 *és a* 0,056*) hányadosának kiszámításával ad választ a feladat kérdésére, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.*

3. b) **második megoldás**		
(Az álláskeresők száma az a) feladat alapján 260 000 fő, ezért), a gazdaságilag aktív népesség létszáma $260\,000 : 0{,}056 \approx 4\,640\,000$ fő,	1 pont	
a munkavállalási korú népesség létszáma $260\,000 : 0{,}038 \approx 6\,840\,000$ fő.	1 pont	
A két szám aránya: ($4\,640\,000 : 6\,840\,000 \approx$) 0,678.	1 pont	
A munkavállalási korú népességnek kb. 68%-a volt a gazdaságilag aktív népesség.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az a) feladatban hibásan állapította meg az álláskeresők számát, de a hibás adattal helyesen számol (és így helyes végeredményre is jut), akkor teljes pontszámot kapjon.

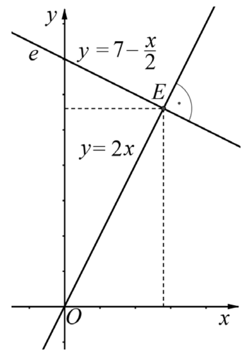
3. c)		
Például 1, 2, 3, 4, 5, 6, 21.	2 pont	
Ebben a példában a medián 4, az átlag $\left(\frac{1+2+3+4+5+6+21}{7} = \frac{42}{7} =\right) 6$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó olyan számokat ad meg, amelyek között egyenlők is vannak, akkor összesen legfeljebb 2 pontot kaphat.

3. d) **első megoldás**		
Azt, hogy a dolgozók felének legfeljebb (legalább) mennyi a bére, a mediánbér mutatja meg. Az átlagbér nem ad információt a bérek tényleges eloszlásáról. (A mediánbér több vagy kevesebb is lehet, mint az átlagbér.)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3. d) **második megoldás**		
Ha a dolgozók egy (kisebb) részének kiugróan magas a bére (jóval magasabb, mint a medián), akkor az átlagbér magasabb is lehet, mint a mediánbér. Virág úr bére így lehet több, mint a dolgozók felének a bére, de mégis kevesebb, mint az átlagbér.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

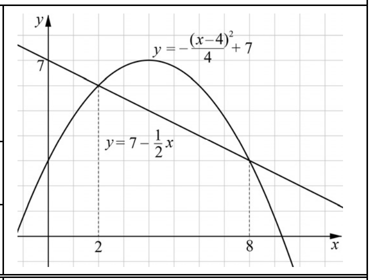
Megjegyzés: A vizsgázó hivatkozhat a c) feladatban adott válaszára is. Például a c) feladat fenti megoldásában adott hét szám esetén a medián 4, *az átlag* 6, *Virág úr fizetésének pedig az* 5 *felel meg: az* 5 *nagyobb, mint az adatok fele, mégis „átlag alatti”.*

4. a)		
(Az e nem megy át az origón.) A négyzet másik átlóegyenesének meredeksége 2; ez az egyenes átmegy az origón, így egyenlete $y = 2x$.	1 pont	
A négyzet E középpontja az átlóegyeneseinek metszéspontja, ennek koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldása adja. $\left.\begin{array}{l} y = 7 - \frac{1}{2}x \\ y = 2x \end{array}\right\}$	1 pont	
(Behelyettesítő módszerrel dolgozva:) $2x = 7 - \frac{1}{2}x$, $x = \frac{14}{5} = 2{,}8$, $y = 2 \cdot 2{,}8 = 5{,}6$. Tehát $E(2{,}8;\ 5{,}6)$.	2 pont	
Az origó és E távolsága: $OE = \sqrt{2{,}8^2 + 5{,}6^2} = \sqrt{39{,}2}$.	1 pont*	
A négyzet területe $\frac{2OE \cdot 2OE}{2} =$	1 pont*	*A négyzet oldala* $a = \sqrt{2} \cdot OE = \sqrt{2} \cdot \sqrt{39{,}2}$,
$= 78{,}4$ (területegység).	1 pont	*területe* $a^2 = 78{,}4$ (te).
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az e egyenlete $x + 2y - 14 = 0$ alakra hozható. (A pont és egyenes távolságképlete szerint) az origó és az e távolsága $\left\lvert \frac{0 + 2 \cdot 0 - 14}{\sqrt{5}} \right\rvert = \frac{14}{\sqrt{5}}$.	1 pont	
A négyzet területe $\left(\frac{14}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot 2 =$	1 pont	$\frac{\left(\frac{28}{\sqrt{5}}\right)^2}{2} =$

Megjegyzés: A négyzet csúcsainak koordinátái (0; 0), (8,4; 2,8), (5,6; 11,2), (–2,8; 8,4).

4. b)		
A két görbe közös pontjainak első koordinátáját a $7-\frac{1}{2}x=-\frac{(x-4)^2}{4}+7$ egyenlet megoldásai adják.	1 pont	
$x^2-10x+16=0$,	1 pont	
innen $x_1=2$, $x_2=8$.	1 pont	
Legyen f: $x\mapsto 7-\frac{1}{2}x$ és g: $x\mapsto -\frac{(x-4)^2}{4}+7$ ($x\in\mathbf{R}$). (Mivel a g grafikonja a metszéspontok között az f grafikonja fölött van, ezért) a kérdezett T területre fennáll: $T=\int_2^8(g-f)$.	1 pont*	$T=\left\lvert\int_2^8(f-g)\right\rvert$
$g(x)-f(x)=-\frac{(x-4)^2}{4}+7-7+\frac{1}{2}x=\frac{-x^2+10x-16}{4}$	1 pont*	
$T=\int_2^8\frac{-x^2+10x-16}{4}\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^3}{12}+\frac{5x^2}{4}-4x\right]_2^8=$	1 pont*	
$=-\frac{8^3}{12}+\frac{5\cdot 8^2}{4}-4\cdot 8-\left(-\frac{2^3}{12}+\frac{5\cdot 2^2}{4}-4\cdot 2\right)=$ $=\frac{16}{3}+\frac{11}{3}=9$ (te)	1 pont*	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

(A metszéspontok közötti parabolaív az x tengely fölött van, ezért) a parabolaív alatti terület: $\int_2^8\left(-\frac{(x-4)^2}{4}+7\right)\mathrm{d}x=\int_2^8\left(-\frac{1}{4}x^2+2x+3\right)\mathrm{d}x=$ $=\left[-\frac{x^3}{12}+x^2+3x\right]_2^8=$	1 pont	$\int_2^8\left(-\frac{(x-4)^2}{4}+7\right)\mathrm{d}x=$ $=\left[-\frac{(x-4)^3}{12}+7x\right]_2^8=$
$=-\frac{8^3}{12}+8^2+3\cdot 8-\left(-\frac{2^3}{12}+2^2+3\cdot 2\right)=\frac{136}{3}-\frac{28}{3}=36$.	1 pont	$=\frac{152}{3}-\frac{44}{3}=36$
A metszéspontok közötti (az x tengely fölött elhelyezkedő) szakasz alatti derékszögű trapéz párhuzamos oldalainak hossza ($f(2)=$) 6, illetve ($f(8)=$) 3, magassága 6, területe pedig $\frac{6+3}{2}\cdot 6=27$.	1 pont	
A kérdezett terület nagysága 36 – 27 = 9 (te).	1 pont	

II.

5. a) **első megoldás**		
Ha a sorozat első tagja az 1, akkor a következő 10 lehetőség van: 1, 3, 5, 7; 1, 3, 5, 8; 1, 3, 5, 9; 1, 3, 6, 8; 1, 3, 6, 9; 1, 3, 7, 9; 1, 4, 6, 8; 1, 4, 6, 9; 1, 4, 7, 9; 1, 5, 7, 9.	2 pont*	
Ha a sorozat első tagja a 2, akkor a következő 4 lehetőség van: 2, 4, 6, 8; 2, 4, 6, 9; 2, 4, 7, 9; 2, 5, 7, 9.	1 pont	
Ha a sorozat első tagja a 3, akkor egyetlen lehetőség van: 3, 5, 7, 9.	1 pont	
(A sorozat első tagja nem lehet 3-nál nagyobb.) Összesen tehát (10 + 4 + 1 =) 15 lehetőség van a sorozat első négy tagjának megválasztására.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: Hibát követ el a vizsgázó, ha a felsorolt négy szám között vannak szomszédosak, ha 10-nél kevesebb lehetőséget ad meg, vagy ha 10 lehetőséget ad meg, de ezek között azonosak is vannak. Egy vagy két hiba esetén a *-gal jelölt 2 pontból 1 pontot kapjon, több hiba esetén pedig 0 pontot.*

5. a) **második megoldás**		
Rendezzük nagyság szerint növekedő sorrendbe az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz elemeit, majd ebben a sorban jelölje $\bullet$ a kiválasztott, $\times$ pedig a nem kiválasztott számokat. (Ezzel a jelöléssel például az $\bullet \times \bullet \times \times \bullet \times \bullet \times$ jelsorozat az 1, 3, 6, 8 „jó” választásnak felel meg.)	1 pont	
A követelményeknek eleget tevő minden egyes számnégyesnek kölcsönösen egyértelműen feleltethető meg egy olyan 9 hosszúságú jelsorozat, amelyben 5 darab $\times$ és 4 darab $\bullet$ van, és a $\bullet$ jelek között nincsenek szomszédosak.	1 pont	
Az 5 darab $\times$ megadása 6 lehetőséget ad meg a 4 darab $\bullet$ helyének megválasztására ($*\times*\times*\times*\times*\times*$).	1 pont*	
Összesen tehát $\binom{6}{4} = 15$ lehetőség van a sorozat első négy tagjának megválasztására.	2 pont*	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A 4 darab • elhelyezése után 3 darab ×-et tegyünk közéjük: • × • × • × •. A fennmaradó 2 darab × a • jelek által meghatározott 5 hely bármelyikére tehető, ismétléssel is.	1 pont	
Ez 5 elem másodosztályú ismétléses kombinációja, összesen tehát $\binom{5+2-1}{2}=\binom{6}{2}=15$ lehetőség van.	2 pont	

5. a) harmadik megoldás		
Ha a sorozat második tagjából 1-et, a harmadik tagjából 2-t, a negyedik tagjából pedig 3-at levonunk, akkor egy olyan szigorúan monoton növekedő sorozat első négy tagját kapjuk, amely tagokat az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmazból választottuk.	2 pont	
Fordítva, ha az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmazból választott, nagyság szerint növekedő sorrendben megadott négy szám közül a másodikhoz 1-et, a harmadikhoz 2-t, a negyedikhez 3-at adunk, akkor olyan négy számot kapunk, amely a sorozat első négy tagja lehet.	1 pont	
Ennek a négy tagnak a megválasztására $\binom{6}{4}=15$ lehetőségünk van. (A kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés miatt tehát) összesen 15 különböző lehetőség van a sorozat első négy tagjának megválasztására.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

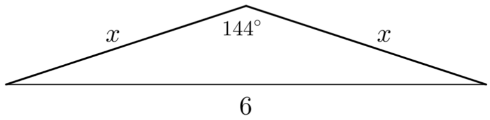
5. a) negyedik megoldás		
Jelölje $f(n, k)$ azoknak a szigorúan monoton növekvő sorozatoknak a számát, amelyek első k tagját az $\{1; 2; \dots ; n\}$ halmazból választjuk ki, és a sorozat tagjai között nincsenek szomszédos egész számok. A feladat $f(9, 4)$ meghatározása. Fennáll az $f(n, k) = f(n-1, k) + f(n-2, k-1)$ összefüggés. Ugyanis, ha n nincs a sorozat első k tagja között, akkor az $\{1; 2; \dots ; n-1\}$ halmazból kell k darab elemet kiválasztani; míg ha n tagja a sorozatnak, akkor az $n-1$ nem lehet tagja, és így az $\{1; 2; \dots ; n-2\}$ halmazból kell $k-1$ darab elemet kiválasztani.	2 pont	

A kezdeti értékek: $f(n, 1) = n$, továbbá $f(7, 4) = f(5, 3) = f(3, 2) = f(1, 1) = 1$. A rekurziós formulát alkalmazva: $f(9, 4) = f(8, 4) + f(7, 3)$, ahol $f(8, 4) = f(7, 4) + f(6, 3) = 1 + f(6, 3)$ és $f(7, 3) = f(6, 3) + f(5, 2)$. $f(6, 3) = f(5, 3) + f(4, 2) = 1 + f(4, 2)$, $f(5, 2) = f(4, 2) + f(3, 1) = f(4, 2) + 3$, és végül $f(4, 2) = f(3, 2) + f(2, 1) = 1 + 2 = 3$. Innen „visszafelé lépkedve”: $f(5, 2) = 6$, $f(6, 3) = 4$, $f(7, 3) = 10$, $f(8, 4) = 5$, $f(9, 4) = 15$.	3 pont	$f(9, 4) =$ $= 1 + 2f(6, 3) + f(5, 2) =$ $= 6 + 3f(4, 2) =$ $= 6 + 3 \cdot 3 = 15$
Összesen:	**5 pont**	

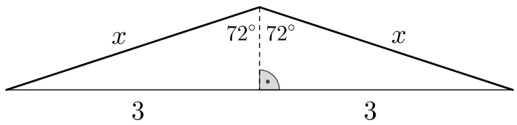
5. b)		
A háromjegyű számok száma 900 (összes eset).	1 pont	
Legyenek a, b és c szomszédos számjegyek ($b = a + 1$ és $c = b + 1 = a + 2$). Ekkor a keresett szám lehet $\overline{abc}$ vagy $\overline{cba}$ alakú.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\overline{abc}$ alakú megfelelő háromjegyű számból 7 darab van (mert ekkor $1 \le a \le 7$), $\overline{cba}$ alakú megfelelő számból 8 darab van (mert ekkor $0 \le a \le 7$). Összesen tehát 15 darab megfelelő szám van (kedvező esetek száma).	2 pont	$\overline{abc}$ *alakú*: 789, 678, 567, 456, 345, 234, 123; $\overline{cba}$ *alakú*: 210, 321, 432, 543, 654, 765, 872, 981. *Ez összesen 15 megfelelő szám.*
A kérdezett valószínűség $\frac{15}{900} = \frac{1}{60}$ ($\approx 0{,}017$).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

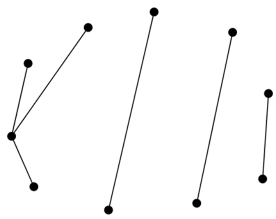
5. c)		
$b = a + 1$, $c = a + 2$ és $d = a + 3$. (A kilences számrendszer helyiértékei 1, 9 és 81, így) $N = 81a + 9(a + 1) + (a + 2)$; (a nyolcas számrendszer helyiértékei 1, 8 és 64, így) $N = 64(a + 1) + 8(a + 2) + (a + 3)$.	2 pont	
$81a + 9(a + 1) + (a + 2) = 64(a + 1) + 8(a + 2) + (a + 3)$	1 pont	
$91a + 11 = 73a + 83$ $18a = 72$, azaz $a = 4$.	1 pont	
A tízes számrendszerben $N = (91a + 11 =)\ 375$.	1 pont	
Ellenőrzés: $375_{10} = 456_9 = 567_8$, és ezek valóban megfelelőek a kilences és nyolcas számrendszerben.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha a szóba jöhető öt, nyolcas számrendszerbeli szám kilences számrendszerbeli alakját ellenőrizve helyes választ ad
($123_8 = 83_{10} = 102_9$, $234_8 = 156_{10} = 183_9$, $345_8 = 229_{10} = 274_9$, $456_8 = 302_{10} = 365_9$, $567_8 = 375_{10} = 456_9$).

6. a)		
A szabályos tízszög egy belső szöge 144°-os.	1 pont	
 A tízszög oldalának (cm-ben mért) hosszát jelölje x. Koszinusztétellel: $6^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 144° = 2 \cdot (1 - \cos 144°) \cdot x^2$,	2 pont*	
ahonnan ($x > 0$ miatt) $x \approx 3{,}15$ (cm).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelzett 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

 Ha a tízszög oldalának hossza x cm, akkor az ábrán látható derékszögű háromszögből: $\sin 72° = \frac{3}{x}$,	2 pont	*A legrövidebb átló által levágott egyenlő szárú háromszög másik két szöge 18°-os. A tízszög oldalának (cm-ben mért) hosszát jelölje x. Szinusztétellel:* $\frac{x}{6} = \frac{\sin 18°}{\sin 144°}$,

6. b)		
Nem igaz.	1 pont	
Jó ellenpélda, például: 	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. c) első megoldás		
Egy olyan él, amelynek nincs közös csúcsa a piros éllel, a maradék ($n-2$) pontú teljes gráf egyik éle. Ilyen élből $\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ van.	2 pont	
A piros él mindkét végpontjából $n-2$ további él indul, tehát $2(n-2)$ olyan él van, melynek van közös csúcsa az elsőnek kiválasztott éllel.	2 pont	
Mivel $P(A) = P(B)$, és az összes eset száma megegyezik,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

ezért ugyanannyi-féleképpen választható a piros éllel közös csúcsú él, mint olyan él, amelynek azzal nincs közös csúcsa: $\frac{(n-2)(n-3)}{2}=2(n-2)$.	2 pont	
Mivel $n-2\neq 0$, ezért $\frac{n-3}{2}=2$.	1 pont	
$n=7$ (tehát 7 pontú a gráf).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

6. c) második megoldás		
Az n pontú teljes gráfnak $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ éle van, így a második él $\frac{n(n-1)}{2}-1$ darab él közül választható ki (összes eset száma).	1 pont	
Egy olyan él, amelynek nincs közös csúcsa a piros éllel, a maradék ($n-2$) pontú teljes gráf egyik éle. Ilyen élből $\binom{n-2}{2}=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ van (kedvező esetek száma).	2 pont	*A piros él mindkét végpontjából $n-2$ további él indul, tehát $2(n-2)$ olyan él van, melynek van közös csúcsa a piros éllel.*
Mivel A és B események egymásnak komplementerei, és a feladat szövege szerint $P(A)=P(B)$, ezért $P(A)=0{,}5$.	1 pont	$P(B)=0{,}5$
Innen $\dfrac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}-1}=\frac{1}{2}$.	1 pont	$\dfrac{2(n-2)}{\frac{n(n-1)}{2}-1}=\frac{1}{2}$
$\frac{n^2-5n+6}{n^2-n-2}=\frac{1}{2}$	1 pont	$\frac{4(n-2)}{n^2-n-2}=\frac{1}{2}$
Nullára rendezve $n^2-9n+14=0$.	1 pont	$\frac{4(n-2)}{(n-2)(n+1)}=\frac{1}{2}$
A másodfokú egyenlet gyökei 2 és 7.	1 pont	($n\neq 2$ miatt) $\frac{4}{n+1}=\frac{1}{2}$ $8=n+1$,
(Az $n\geq 3$ feltétel miatt) a 2 nem megoldása a feladatnak, tehát 7 pontú a gráf.	1 pont	$n=7$ (tehát 7 pontú a gráf).
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó igazolja, hogy a 7 pontú teljes gráf megfelelő, de nem bizonyítja, hogy más megoldása nincs a feladatnak, akkor ezért 3 pontot kapjon.

7. a) **első megoldás**		
Válasszuk ki először a vizsgált második rétegbe kerülő golyókat (a többi golyó kiválasztása a keresett valószínűséget nem befolyásolja). Az első golyó $\frac{15}{30}$, a második $\frac{14}{29}$, a harmadik $\frac{13}{28}$, a negyedik $\frac{12}{27}$ valószínűséggel lesz sötét.	2 pont	
A keresett valószínűség a négy szám szorzata: $\frac{15}{30}\cdot\frac{14}{29}\cdot\frac{13}{28}\cdot\frac{12}{27}$,	1 pont	
vagyis $\frac{32\,760}{657\,720}=\frac{13}{261}\approx 0{,}0498$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a) **második megoldás**		
Sorrendre való tekintet nélkül $\binom{30}{4}$ (= 27 405)-féleképpen választhatunk 4 golyót a második rétegbe (ezek a kiválasztások mind egyenlően valószínűek; ez az összes eset száma),	1 pont	
ezek között $\binom{15}{4}$ (= 1365) kedvező eset van.	1 pont	
A keresett valószínűség a két szám hányadosa: $\frac{\binom{15}{4}}{\binom{30}{4}}$,	1 pont	
vagyis $\frac{1365}{27\,405}=\frac{13}{261}\approx 0{,}0498$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

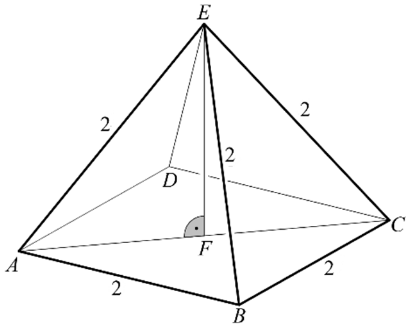
7. a) **harmadik megoldás**		
Sorszámozzuk meg 1-től 30-ig a kikészített golyókat! A piramis 30 helyére 30! különböző sorrendben helyezhetjük el őket (ezek az elhelyezések mind egyenlően valószínűek; ez az összes eset száma).	1 pont	
A felülről második szintre 4 (sorszámozott) sötét golyót $15\cdot 14\cdot 13\cdot 12$ különböző módon tehetünk.	1 pont	
A megmaradt 26 golyót tetszőleges sorrendben felhasználva egy-egy kedvező esetet kapunk, tehát a kedvező esetek száma: $26!\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12$.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{26!\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{30!}=\frac{13}{261}\approx 0{,}0498$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a) **negyedik megoldás**		
A piramist alkotó 30 golyó helyét 1-től 30-ig sorszámozzuk meg (az alsó rétegtől kezdve), a dobozba kikészített 30 golyót pedig állítsuk sorba. A golyókat a sorban elfoglalt helyükkel azonos sorszámú helyre tesszük a piramisban.	1 pont	
A 30 golyó a színek alapján $\frac{30!}{15!\cdot 15!}$ (= 155 117 520) különböző módon állítható sorba (összes eset száma).	1 pont	
A kedvező esetek azok, amelyekben a piramis 26., 27., 28. és 29. sorszámú helyén sötét golyó áll (a többi 26 helyen pedig tetszőleges sorrendben áll a többi golyó). A kedvező esetek száma tehát: $\frac{26!}{11!\cdot 15!}$ (= 7 726 160).	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{7\,726\,160}{155\,117\,520}=\frac{13}{261}\approx 0{,}0498$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

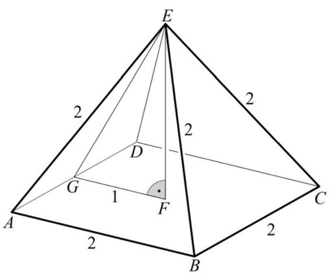
7. a) **ötödik megoldás**		
(Ha a piramist „alulról felfelé” haladva építjük, akkor) az utolsó 5 helyre $\binom{30}{5}$ (= 142 506)-féleképpen kerülhet golyó (az összes eset száma).	1 pont	
Ezek közül $\binom{15}{5}$ esetben az utolsó 5 golyó sötét, $\binom{15}{1}\cdot\binom{15}{4}$ esetben pedig az utolsó 5 golyó között 4 sötét és 1 világos van. Ez utóbbiak egyötödében, azaz $\frac{15\cdot\binom{15}{4}}{5}$ esetben az utolsó golyó világos, az előtte levő 4 pedig sötét.	1 pont	
A kedvező esetek száma: $\binom{15}{5}+3\cdot\binom{15}{4}$ (= 7098).	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{7098}{142\,506}=\frac{13}{261}\approx 0{,}0498$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b) **első megoldás**		
(Teljes indukcióval bizonyítunk.) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6} = 1$.	1 pont	
Ha valamely $k \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz az állítás, akkor belátjuk, hogy $k + 1$ esetén is igaz, vagyis $1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.	1 pont	
Az indukciós feltevés miatt $1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$	1 pont	
$= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) = (k+1) \cdot \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} =$ $= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$.	1 pont	
Mivel $2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$,	1 pont	
ezért $k + 1$ esetén, és így minden pozitív egész esetén is igaz az állítás.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. b) **második megoldás**		
(Teljes indukcióval bizonyítunk.) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6} = 1$.	1 pont	
Ha valamely $k \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz az állítás, akkor belátjuk, hogy $k + 1$ esetén is igaz, vagyis $1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.	1 pont	
A bal oldalon felhasználva az indukciós feltevést: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.	1 pont	
Mindkét oldalt $(k + 1)$-gyel osztva ($k \neq -1$) és 6-tal szorozva: $k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3)$.	1 pont	
$2k^2 + k + 6k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$. Ez azonosság, minden $k \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz.	1 pont	
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti állításunk minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. c)		
Az alsó réteg négy gömbjének középpontja (az ábrán *A*, *B*, *C* és *D*) és a második réteg egyetlen gömbjének középpontja (az ábrán *E*) az *ABCDE* szabályos négyoldalú gúlát határozza meg. A gúla mindegyik éle 2 cm hosszú. 	2 pont	
A két rétegű piramis magassága a szabályos gúla (*EF*) magasságánál (1 + 1 =) 2 cm-rel nagyobb (mert az alsó réteg gömbjei az *ABCD* négyzet síkja alatt 1 cm-rel érintik a vízszintes síkot, a piramis legfelső pontja pedig a gúla *E* csúcsa fölött van 1 cm-rel).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az *ABCD* négyzet átlójának hossza $2\sqrt{2}$, ennek fele: $AF=\sqrt{2}$ (cm).	1 pont*	*A szabályos gúla egy* 2 cm *élű szabályos oktaéder fele.*
Az *AFE* derékszögű háromszögben (Pitagorasz-tétellel): $EF=\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{2}$ (cm).	1 pont*	*A szabályos oktaéder testátlója egy* 2 cm *oldalú négyzet átlója, ezért a gúla magassága ennek a fele, vagyis* $\sqrt{2}$ cm.
A két rétegű piramis magassága tehát ($\sqrt{2}+2\approx$) 3,41 cm.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az *ADE* szabályos háromszög *EG* magassága $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\right)\sqrt{3}$ (cm).	1 pont	
Az *EGF* derékszögű háromszögben (Pitagorasz-tétellel): $EF=\sqrt{\sqrt{3}^2-1^2}=\sqrt{2}$ (cm).	1 pont	

8. a)		
(Az n-edik hónap végi raktárkészletet jelölje S_n.) Az első hónap után $S_1 = 700 \cdot 0{,}76 + 60$, a 2. hónap után $S_2 = (700 \cdot 0{,}76 + 60) \cdot 0{,}76 + 60$, és így tovább, a 18. hónap után pedig $S_{18} = (...(700 \cdot 0{,}76 + 60) \cdot 0{,}76 + ...) \cdot 0{,}76 + 60$ kg levespor lesz a raktárban (ahol a 0,76-os szorzók és a +60-as tagok száma is 18).	2 pont	
A zárójeleket felbontva és a műveleteket elvégezve: $S_{18} = 700 \cdot 0{,}76^{18} + 60 \cdot 0{,}76^{17} + 60 \cdot 0{,}76^{16} + ... + 60 =$	1 pont	
$= 700 \cdot 0{,}76^{18} + 60 \cdot (0{,}76^{17} + 0{,}76^{16} + ... + 1)$.	1 pont	
A zárójelben egy mértani sorozat 18 tagja szerepel (az első tag 1, a hányados 0,76). A mértani sorozat összegképletét használva: $S_{18} = 700 \cdot 0{,}76^{18} + 60 \cdot \frac{0{,}76^{18} - 1}{0{,}76 - 1} \approx$	2 pont	
$(\approx 5{,}009 + 248{,}211) = 253{,}22$.	1 pont	
Eredetileg 700 kg volt a raktárkészlet, és a 18 hónap alatt még gyártottak $(18 \cdot 60 =)$ 1080 kg-ot.	1 pont	
Így a terv megvalósulása esetén a 18 hónap alatt kb. $(700 + 1080 - 253 =)$ 1527 kg lesz az eladott/elajándékozott levespor mennyisége.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó hónapról hónapra, észszerű és helyes kerekítésekkel kiszámítja a csökkenés mértékét, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

hónap sorszáma	induló készlet (kg)	csökkenés (kg)
1.	700	168
2.	592	142,1
3.	509,9	122,4
4.	447,5	107,4
5.	400,1	96,0
6.	364,1	87,4
7.	336,7	80,8
8.	315,9	75,8
9.	300,1	72,0

hónap sorszáma	induló készlet (kg)	csökkenés (kg)
10.	288,1	69,1
11.	278,9	66,9
12.	272,0	65,3
13.	266,7	64,0
14.	262,7	63,0
15.	259,7	62,3
16.	257,3	61,8
17.	255,6	61,3
18.	254,2	61,0

8. b) **első megoldás**		
(Az a) feladat megoldásában alkalmazottakhoz hasonló lépésekkel kapjuk, hogy) az n-edik hónap után $S_n = 700\cdot 0{,}76^n + 60\cdot 0{,}76^{n-1} + 60\cdot 0{,}76^{n-1} + \ldots + 60$ kg levespor lesz a raktárban.	1 pont	
Felhasználva a mértani sorozat összegképletét: $S_n = 700\cdot 0{,}76^n + 60\cdot\dfrac{0{,}76^n - 1}{0{,}76 - 1}$.	1 pont	
$S_n = 700\cdot 0{,}76^n - 250\cdot(0{,}76^n - 1) = 450\cdot 0{,}76^n + 250$	2 pont	
A $\{0{,}76^n\}$ szigorúan monoton csökkenő sorozat, amelynek a határértéke 0.	1 pont	
Ezért az $\{S_n\}$ is szigorúan monoton csökkenő sorozat, amelynek a határértéke 250. Ezzel a feladat mindkét állítását bizonyítottuk.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. b) **második megoldás**		
Teljes indukcióval látjuk be, hogy az n-edik hónap után a raktárkészlet 250 kg-nál több, azaz $S_n > 250$.	1 pont	
$n = 1$-re igaz az állítás ($S_1 = 592$).	1 pont	
Ha valamely $k \in \mathbf{N}^+$-ra igaz az állítás, azaz $S_k > 250$, akkor belátjuk, hogy $S_{k+1} > 250$ is teljesül.	1 pont	
A raktárkészlet 76%-a megmarad a következő hónapra, ezért $S_k > 250$ miatt ez a megmaradó mennyiség $(250\cdot 0{,}76 =)$ 190 kg-nál több.	1 pont	
Ezt a megmaradó mennyiséget még az újonnan előállított 60 kg-mal megnövelik, ezért valóban teljesül $S_{k+1} > 250$ (az állításnak ezt a részét ezzel beláttuk).	1 pont	
Ha az aktuális raktárkészlet 250 kg-nál több, akkor a raktárkészlet 24%-a több $(250\cdot 0{,}24 =)$ 60 kg-nál. Ekkor több, mint 60 kg-mal csökken a készlet, de csak 60 kg-mal nő, vagyis a raktárkészlet csökken.	1 pont	
Mivel azt már beláttuk, hogy a raktárkészlet minden hónapban több lesz 250 kg-nál, ebből következik, hogy a készlet minden hónapban csökkenni fog.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. a)		
90 km/h = 1,5 km/perc = 1500 m/perc	1 pont	
A hajtókerék kerülete: $1740\pi \approx 5466$ (mm), ami kb. 5,47 m.	2 pont	
Egy perc alatt a kerék $\dfrac{1500}{5{,}47} \approx 274$-et fordul .	1 pont	*A kerék fordulatszáma* $274\ \dfrac{1}{\text{perc}}$.
Összesen:	**4 pont**	

9. b)		
A megadott átlagsebesség esetén $0,5\cdot 60^2-65\cdot 60+3800=1700$ kg/óra a szénfogyasztás.	1 pont	
A 6100 kg szén tehát $6100:1700$ ($\approx 3,59$) órára elegendő.	1 pont	
Ennyi idő alatt kb. ($3,59\cdot 60\approx$) 215 km hosszúságú utat tesz meg a mozdony.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. c) első megoldás		
Ha 1 óra alatt $0,5v^2-65v+3800$ kg szénre van szükség, akkor a 6100 kg szén $\dfrac{6100}{0,5v^2-65v+3800}$ órára elegendő.	1 pont	
Ennyi idő alatt $\dfrac{6100v}{0,5v^2-65v+3800}$ km távolságot tesz meg a mozdony.	1 pont	
Az $s(v)=\dfrac{6100v}{0,5v^2-65v+3800}$ $(50<v<100)$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$s'(v)=\dfrac{6100(0,5v^2-65v+3800)-6100v(v-65)}{(0,5v^2-65v+3800)^2}=$	2 pont	
$=\dfrac{6100(0,5v^2-65v+3800-v^2+65v)}{(0,5v^2-65v+3800)^2}=$ $=\dfrac{3050(7600-v^2)}{(0,5v^2-65v+3800)^2}$	1 pont	
$s'(v)=0$, ha $7600-v^2=0$. Ebből ($v>0$ miatt) $v=\sqrt{7600}\approx 87,2$ (és ez eleme az értelmezési tartománynak).	1 pont	
A deriváltfüggvény értékei $v<\sqrt{7600}$ esetén pozitívak, $v>\sqrt{7600}$ esetén pedig negatívak. Ezért a $\sqrt{7600}$ az s függvénynek abszolút maximumhelye.	1 pont	
A 6,1 tonna szénnel tehát kb. 87 km/h átlagsebesség esetén jut legmesszebbre a mozdony (kb. 275 km-re).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: $s''(v)=\dfrac{3050(v^3-22\,800v+988\,000)}{(0,5v^2-65v+3800)^3}$ *és* $s''(\sqrt{7600})\approx -0,142$; *ebből következik, hogy az s függvénynek valóban maximuma van az adott helyen.*

9. c) második megoldás		
Ha v km/h átlagsebességgel 1 km hosszú utat tesz meg a mozdony, akkor ehhez $\frac{1}{v}$ óra szükséges. (A modell szerint) a szénfogyasztás 1 km-es távon: $\frac{1}{v}\cdot(0{,}5v^2-65v+3800)$ kg.	1 pont	
$\frac{1}{v}\cdot(0{,}5v^2-65v+3800)=0{,}5v-65+\frac{3800}{v}$	1 pont	
A 6,1 tonna szén akkor lesz a leghosszabb útra elegendő, ha az 1 km-es távolságra eső szénfogyasztás a lehető legkisebb.	1 pont	
Az $c(v)=0{,}5v-65+\frac{3800}{v}$ $(50 < v < 100)$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$c'(v)=0{,}5-\frac{3800}{v^2}$	2 pont*	
$c'(v)=0$, ha $v=\sqrt{7600}\approx 87{,}2$ (mert $v>0$) (és ez eleme az értelmezési tartománynak).	1 pont*	
A deriváltfüggvény értékei $v<\sqrt{7600}$ esetén negatívak, $v>\sqrt{7600}$ esetén pedig pozitívak. Ezért a $\sqrt{7600}$ a c függvénynek abszolút minimumhelye.	1 pont*	$c''(v)=\frac{7600}{v^3}$ *, a második derivált tehát mindenhol pozitív. Ezért* $\sqrt{7600}$ *-nál abszolút minimuma van c-nek.*
A 6,1 tonna szénnel tehát kb. 87 km/h átlagsebesség esetén jut legmesszebbre a mozdony (kb. 275 km-re).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megyjegyzés: *A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

(Mivel $v>0$, ezért) a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt $0{,}5v-65+\frac{3800}{v}\ge 2\cdot\sqrt{0{,}5v\cdot\frac{3800}{v}}-65=$	1 pont	
$=2\cdot\sqrt{1900}-65$ $(\approx 22{,}2)$.	1 pont	*kb.* 22,2 kg *az* 1 km-*re eső minimális szénfogyasztás.*
A legkisebb érték akkor lehetséges, ha $0{,}5v=\frac{3800}{v}$.	1 pont	
Ebből $v^2=7600$, vagyis $v=\sqrt{7600}$.	1 pont	
A $\sqrt{7600}$ $(\approx 87{,}2)$ eleme a c függvény értelmezési tartományának, ezért a függvénynek itt abszolút minimuma van.	1 pont	