Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2020. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2020. május 5. 9:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130.

a) Adja meg a sorozat ötödik tagját!

A $\{b_n\}$ mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130.

b) Adja meg a sorozat ötödik tagját!

a)	5 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	11 pont	

2. Marci szeret az autók rendszámában különböző matematikai összefüggéseket felfedezni. (A rendszámok Magyarországon három betűből és az azokat követő három számjegyből állnak.)

Az egyik általa kedvelt típusnak a „prímes” nevet adta: az ilyen rendszámoknál a PRM betűket követő három számjegy szorzata prímszám.

a) Hány különböző „prímes” rendszám készíthető?

Egy másik típusnak a „hatos” nevet adta: az ilyen rendszámokban a HAT betűket követő három számjegy összege 6.

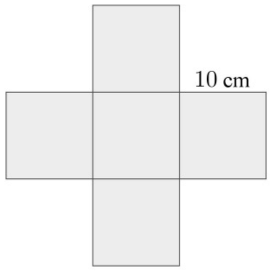
b) Hány különböző „hatos” rendszám készíthető?

Egy harmadik típus a „logaritmusos”. Ezek általános alakja: LOG-*abc*, ahol az *a*, *b* és *c* számjegyekre (ebben a sorrendben) teljesül, hogy $\log_a b = c$.

c) Hány különböző „logaritmusos” rendszám készíthető?

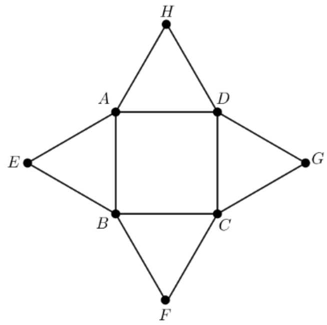
a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	14 pont	

3. A mellékelt ábrán egy kereszt alakú lemez látható, amely 5 db 10 cm oldalú négyzetből áll. A lemezből egy 10 cm alapélű, szabályos négyoldalú gúla hálóját szeretnénk kivágni úgy, hogy a középső négyzet legyen a gúla alaplapja.



a) Igazolja, hogy a lehetséges hálók kivágása során keletkező hulladék legalább 200 cm^2, de kevesebb 300 cm^2-nél!

Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.



b) A gráfban véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két csúcsot él köti össze a gráfban?

c) A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezésnél lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!

a)	6 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Adott az $x^2 - (4p+1)x + 2p = 0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van!

b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke?

c) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen!

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	13 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

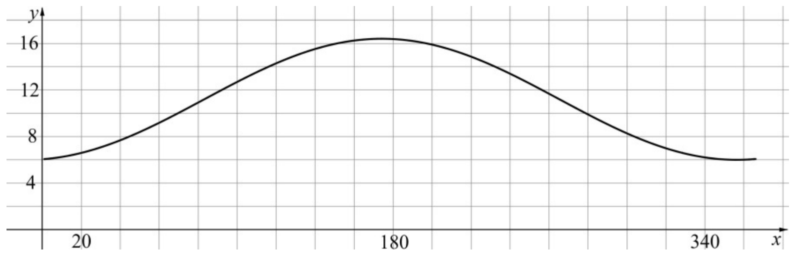
5. Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő *f* függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5{,}2\cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11{,}2,$$

ahol *n* az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, *f*(*n*) pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \le n \le 365$, $n \in \mathbf{N}$).

Az alábbi ábra a $g:[1;365] \to \mathbf{R}$; $g(x) = -5{,}2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right) + 11{,}2$ függvényt szemlélteti.

(A *g* függvény az *f*-nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Ha $x = 1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.

Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve!

b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal! Válaszát óra:perc formátumban, egész percre kerekítve adja meg!

c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

Adott egy másik, az $y = -5{,}2\cos(x) + 11{,}2$ egyenletű görbe, valamint az $x = 0$, az $y = 0$ és az $x = 2\pi$ egyenletű egyenesek.

d) Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

a)	2 pont	
b)	3 pont	
c)	7 pont	
d)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

6. **a)** Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható?

Az ötöslottó-játékban az első 90 pozitív egész számból kell öt különbözőt megjelölni. A sorsoláson öt (különböző) nyerőszámot húznak ki. (Sem a megjelölés, sem a kihúzás sorrendje nem számít.)
Kati a 7, 9, 14, 64, 68 számokat jelölte meg. A sorsoláson az első három kihúzott nyerőszám a 7, a 9 és a 14 volt. Kati úgy gondolja, hogy most nagy esélye van legalább négy találatot elérni.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a hátralevő két nyerőszám közül Kati legalább az egyiket eltalálja!

Az egyik játékhéten összesen 3 222 831 lottószelvényt küldtek játékba a játékosok. Az alábbi táblázat mutatja a nyertes szelvények számát és nyereményét (2-nél kevesebb találattal nem lehet nyerni).

Találatok száma	Nyertes szelvények száma	Nyeremény (Ft/nyertes szelvény)
5	0	0
4	17	3 113 255
3	1617	34 915
2	62 757	1970

c) Számítsa ki, hogy mennyi volt a játékosok egy lottószelvényre jutó átlagos vesztesége ezen a héten, ha a játékba küldött szelvények egységára 250 Ft!

a)	6 pont	
b)	6 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = 20$, $BC = 18$, $ABC\sphericalangle = 70°$, $CAD\sphericalangle = 50°$.

a) Milyen hosszú a CD oldal, és mekkora a húrnégyszög területe?

A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(–2; 0)$, $Q(6; 0)$ és $R(0; 5)$ pontok, a H pedig a PQ szakasz tetszőleges pontja.

b) Számítsa ki a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $H(–1,8; 0)$.

c) Adja meg a H pont koordinátáit úgy, hogy a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!

a)	7 pont	
b)	2 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

8. Egy étteremben (hatósági engedély birtokában) az érvényes általános forgalmi adótól (áfa) kismértékben eltérő adókulcsok alkalmazásának hatását vizsgálták az ételek és italok fogyasztására nézve. Az ételek esetében 4%, az italok esetében 30% áfát adtak hozzá a nettó árhoz, és az így kapott bruttó árat kellett a vendégnek kifizetnie.
A kísérlet első napján az új számítógépes program hibája miatt a számlán éppen fordítva adták a nettó árakhoz az áfát: az ételek nettó árához 30%-ot, az italok nettó árához pedig 4%-ot számoltak hozzá, és ez a számlán is így, hibásan jelent meg.
Egy család ebben a vendéglőben ebédelt, és a hibás program miatt 8710 Ft-os számlát kapott. A hibát észrevették, így végül a helyes összeget, 7670 Ft-ot kellett kifizetniük.

a) Hány forint volt az elfogyasztott ételek, és hány forint volt az elfogyasztott italok helyes bruttó ára?

Egy másik étteremben 12 és 14 óra között 3900 Ft befizetéséért annyit eszik és iszik a vendég, amennyit szeretne.
A befizetendő összeget egy előzetes felmérés alapján állapították meg. A felmérés során minden vendég esetén összeadták az elfogyasztott étel és ital árát az adott fogyasztáshoz tartozó összes egyéb költséggel. Az összesített költségek alapján osztályokba sorolták a vendégeket aszerint, hogy az étteremnek hány forintjába kerültek.
Az alábbi táblázat mutatja a felmérés eredményét. A táblázat első sorában az osztályközepek láthatók.

fejenként ennyi Ft-ba került az étteremnek	1000	1900	2800	3600	4400	5200
a vendégek ennyi %-a	10	20	25	30	10	5

b) A felmérés eredményét felhasználva számítsa ki, hogy ennek az étteremnek 1000 vendég esetén mekkora a várható haszna!

c) A fenti táblázat értékeivel számolva mennyi a valószínűsége, hogy két (ebédre betérő) vendég együttes fogyasztása veszteséget jelent az étteremnek?
(A táblázatba foglalt információkat tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen betérő vendég esetén pl. 0,25 annak a valószínűsége, hogy a vendég 2800 Ft-ba kerül az étteremnek.)

a)	7 pont	
b)	3 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek).
A városi közlekedési társaság vezetői hatástanulmányt készíttettek a vonaljegy árának esetleges megváltoztatásáról. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni. A hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát, és 1 százalékponttal növeli a jegy nélküli utazások (bliccelések) arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékponttal csökkentené a bliccelések arányát. A tanulmány az alkalmazott modellben csak a 245 tallérnál drágább, de 455 tallérnál olcsóbb lehetséges jegyárakat vizsgálta.

a) Mekkora lenne a közlekedési társaság vonaljegyekből származó napi bevétele a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnék a vonaljegyek árát?

b) Hány talléros vonaljegy esetén lenne maximális a napi bevétel?

a)	4 pont	
b)	12 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	11		**51**	
	2.	14			
	3.	13			
	4.	13			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző