ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2020. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a) első megoldás		
A sorozat első négy tagja: a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, $a_1 + 3d$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feltételek szerint $2a_1 + 2d = 26$ és $2a_1 + 4d = 130$.	1 pont	
Innen (pl. a két egyenlet kivonása után) $d = 52$,	1 pont	
és visszahelyettesítés után $a_1 = –39$.	1 pont	
A sorozat ötödik tagja $a_5 = a_1 + 4d = 169$. (A sorozat első öt tagja: –39, 13, 65, 117, 169.)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. a) második megoldás		
A számtani sorozat ismert tulajdonsága miatt (három szomszédos tag közül a középső a két szélsőnek a számtani közepe):	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} = \dfrac{26}{2} = 13$,	1 pont	
és $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = \dfrac{130}{2} = 65$.	1 pont	
$d = (a_3 - a_2 = 65 - 13 =)\ 52$.	1 pont	
A sorozat ötödik tagja $a_5 = a_3 + 2d = 169$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. b) első megoldás		
A sorozat első négy tagja: b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3 ($b_1 \neq 0$, $q \neq 0$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feltétel szerint $b_1 + b_1q^2 = 26$ és $b_1q + b_1q^3 = 130$.	1 pont	
Szorzattá alakítva: $b_1(1 + q^2) = 26$ és $b_1q(1 + q^2) = 130$.	1 pont	
(Egyik tényező sem nulla, ezért) a két egyenletet eloszthatjuk egymással, amiből $q = 5$ adódik,	1 pont	
visszahelyettesítéssel pedig $b_1 = 1$.	1 pont	
A sorozat ötödik tagja $b_5 = b_1q^4 = 5^4 = 625$. (A sorozat első öt tagja: 1, 5, 25, 125, 625.)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b) második megoldás		
Ha a sorozat második tagja b, hányadosa pedig q ($b \neq 0$, $q \neq 0$), akkor a sorozat első négy tagja rendre: $\frac{b}{q}$, b, bq, bq^2.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feltétel szerint $\frac{b}{q} + bq = 26$ és $b + bq^2 = 130$.	1 pont	
Az első egyenletből (q-val szorzás után): $b + bq^2 = 26q$.	1 pont	
Ezt a második egyenlettel összehasonlítva kapjuk, hogy $26q = 130$, vagyis $q = 5$,	1 pont	
visszahelyettesítéssel pedig $b = 5$.	1 pont	
A sorozat ötödik tagja $bq^3 = 5^4 = 625$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. a)		
Három számjegy szorzata prím, ha két számjegy 1-es, a harmadik pedig prímszám.	1 pont	
Egyjegyű prímszám négy darab van: 2, 3, 5, 7.	1 pont	
Bármely kiválasztott prímszám három helyen fordulhat elő, így összesen $4 \cdot 3 = 12$ különböző „prímes” rendszám készíthető.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

2. b)		
A 6 előállítási lehetőségei három számjegy összegeként (a sorrendtől eltekintve): $6 + 0 + 0$, $5 + 1 + 0$, $4 + 2 + 0$, $4 + 1 + 1$, $3 + 3 + 0$, $3 + 2 + 1$, $2 + 2 + 2$.	2 pont	*Egy vagy két hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
Az ezekből előállítható számhármasok száma rendre 3, 6, 6, 3, 3, 6, 1.	2 pont	
Összesen $3 + 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 28$-féle „hatos” rendszám készíthető.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

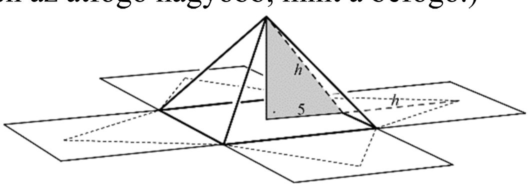
Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

2. c)

Definíció szerint $\log_a b = c \iff a^c = b$, ahol $a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$ (így $2 \leq a \leq 9$ és $1 \leq b \leq 9$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
(Esetszétválasztás c lehetséges értékei alapján.) Ha $c = 0$, akkor $b = 1$ és $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ vagy 9. Ez 8 lehetőség.	1 pont	*Ha $a = 2$, akkor $c \in \{0; 1; 2; 3\}$, ez 4 lehetőség.*
Ha $c = 1$, akkor $a = b = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ vagy 9. Ez 8 lehetőség.	1 pont	*Ha $a = 3$, akkor $c \in \{0; 1; 2\}$, ez 3 lehetőség.*
Ha $c = 2$, akkor $a = 2$ és $b = 4$, vagy $a = 3$ és $b = 9$. Ez 2 lehetőség.	1 pont	*Ha $a \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, akkor $c \in \{0; 1\}$, ez $(6 \cdot 2 =)$ 12 lehetőség.*
Ha $c = 3$, akkor $a = 2$ és $b = 8$. Ez 1 lehetőség.	1 pont	
($c \geq 4$ nem lehet, hiszen $b = a^4 \geq 2^4 = 16$ lenne, így) összesen $8 + 8 + 2 + 1 = 19$ „logaritmusos” rendszám készíthető.	1 pont	*Összesen $4 + 3 + 12 = 19$ lehetőség.*
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.
2. Ha a vizsgázó megengedi az $a = 1$ lehetőséget, akkor ezért 1 pontot veszítsen.
3. Ha a vizsgázó megengedi az $a = 0$ lehetőséget, akkor ezért 1 pontot veszítsen.

3. a)

A keletkező hulladék akkor minimális, ha az oldallapok területe, és így (alapélhez tartozó) h magassága maximális, azaz 10 cm.	1 pont	
Ekkor a négy oldallap területe $\frac{10 \cdot h}{2} \cdot 4 = 200$ cm^2,	1 pont	
a hulladék tehát legalább $4 \cdot 10 \cdot 10 - 200 = 200$ cm^2.	1 pont	
Minél kisebb az oldallapok magassága, annál több a hulladék. A lapmagasságok merőleges vetülete az alaplapon 5 cm, így $h > 5$ cm. (Derékszögű háromszögben az átfogó nagyobb, mint a befogó.) 	1 pont	*A palást nagyobb területű, mint az alaplap, azaz több, mint* 100 cm^2, *így*
Az oldallapok területösszege: $\frac{10 \cdot h}{2} \cdot 4 > \frac{10 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 100$ cm^2, így	1 pont	
a hulladék kevesebb, mint $4 \cdot 10 \cdot 10 - 100 = 300$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. b) első megoldás		
Két csúcsot $\binom{8}{2}$ (= 28)-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma).	1 pont	
(A gráfnak 12 éle van, így) a két csúcs 12 esetben lesz egy él két végpontja (kedvező esetek száma).	2 pont	
A keresett valószínűség $\frac{12}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{7}$ (≈ 0,429).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b) második megoldás		
Ha az első kiválasztott csúcs „külső” pont (*E*, *F*, *G* vagy *H*), akkor a megfelelő második csúcs kiválasztásának $\frac{2}{7}$ a valószínűsége (a maradék 7 csúcsból 2 szomszédos).	1 pont	
Ha az első kiválasztott csúcs „belső” pont (*A*, *B*, *C* vagy *D*), akkor a megfelelő második csúcs kiválasztásának $\frac{4}{7}$ a valószínűsége (a maradék 7 csúcsból 4 szomszédos).	1 pont	
A külső és a belső csúcs kiválasztásának a valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$,	1 pont	
így a keresett valószínűség $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. c) első megoldás		
Az *ADH*, *DCG*, *CBF*, *BAE* háromszögek mindegyik éle pontosan egy háromszöghöz tartozik.	1 pont	
Mivel (4 háromszög és) 3 zöld él van, lesz a háromszögek között olyan, amelynek minden éle kék (és ez egy gráfelméleti kör).	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. c) második megoldás		
Ha egy *n* pontú gráfban nincsen kör, akkor legfeljebb $n-1$ éle lehet.	1 pont	
A kék élek által alkotott részgráfnak legfeljebb 8 csúcsa és 9 éle van, tehát biztosan van benne kör.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. a)		
A másodfokú egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A diszkrimináns: $(4p+1)^2-4\cdot 2p=16p^2+1$.	1 pont	
Ez ($p^2\geq 0$ miatt) a p minden valós értékére pozitív, tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. b) első megoldás		
Ha a 3 gyöke az egyenletnek, akkor $9-3(4p+1)+2p=0$,	1 pont	
ahonnan $p=0{,}6$.	1 pont	
Az egyenlet ezzel az értékkel: $x^2-3{,}4x+1{,}2=0$.	1 pont	
A megoldóképletből adódik, hogy a másik valós gyök ekkor 0,4.	1 pont	*A gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint a másik valós gyök ekkor* $3{,}4-3=0{,}4$ *vagy* $\frac{1{,}2}{3}=0{,}4$.
Összesen:	**4 pont**	

4. b) második megoldás		
(Az egyenletnek mindig két valós gyöke van, ezért) a gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint $x_2+3=4p+1$ és $3x_2=2p$.	1 pont	
Ez utóbbi alapján $p=\frac{3}{2}x_2$,	1 pont	*Az első egyenletből:* $x_2=4p-2$.
amelyet az első összefüggésbe helyettesítve: $x_2+3=6x_2+1$,	1 pont	*Ezt a másodikba helyettesítve:* $12p-6=2p$, *ebből* $p=0{,}6$,
ahonnan a másik gyök $x_2=0{,}4$.	1 pont	így $x_2=(4\cdot 0{,}6-2=)0{,}4$.
Összesen:	**4 pont**	

4. c)		
(A megadott egyenletnek mindig 2 valós gyöke van.) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$	1 pont*	
A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint $x_1+x_2=4p+1$ és $x_1x_2=2p$, ezért $x_1^2+x_2^2=(4p+1)^2-2\cdot 2p$.	2 pont*	
$(4p+1)^2-2\cdot 2p=7$	1 pont	
$16p^2+4p-6=0$	1 pont	
Ennek az egyenletnek a valós gyökei 0,5 és –0,75, így ezek a p paraméter keresett értékei.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:

1. $p=0{,}5$ *esetén az egyenlet* $x^2-3x+1=0$, *melynek a gyökei* $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,

$p=-0{,}75$ *esetén az egyenlet* $x^2+2x-1{,}5=0$, *melynek a gyökei* $\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$.

*2. A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

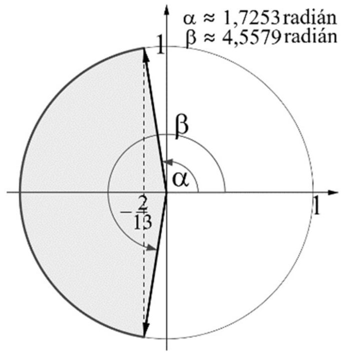
$x_1=\frac{4p+1+\sqrt{(4p+1)^2-8p}}{2}$ $x_2=\frac{4p+1-\sqrt{(4p+1)^2-8p}}{2}$	1 pont	
$x_1^2+x_2^2=\frac{2\cdot(4p+1)^2+2\cdot((4p+1)^2-8p)}{4}=$ $=\frac{4(4p+1)^2-16p}{4}=(4p+1)^2-4p$	2 pont	

II.

5. a)		
$\frac{9}{58}\cdot\frac{180°}{\pi}\approx 8{,}89°$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

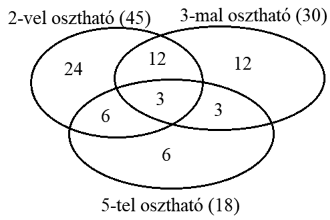
5. b)		
$f(50) = -5{,}2\cos(1) + 11{,}2$	1 pont	
$f(50) \approx 8{,}39$ óra	1 pont	
Az 50. napon (körülbelül) 8:23 óra (8 óra 23 perc) hosszú a nappal.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**3 pont**	

5. c) első megoldás		
(Az $f(n) > 12$ megoldásai számának megállapításához) először a g függvény értelmezési tartományán oldjuk meg a $-5{,}2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)+11{,}2=12$ egyenletet ($1 \le x \le 365$, $x \in \mathbf{R}$). (Ekkor $0{,}16 \approx \frac{9}{58} \le \frac{x+8}{58} \le \frac{373}{58} \approx 6{,}43$.)	1 pont	
$\cos\left(\frac{x+8}{58}\right) \approx -0{,}1538$	1 pont	
$\frac{x+8}{58} \approx 1{,}7253$ vagy $\frac{x+8}{58} \approx 2\pi - 1{,}7253 \approx 4{,}5579$	2 pont	
Innen $x \approx 92{,}06$ vagy $x \approx 256{,}36$.	1 pont	
A g függvény ábrája alapján az $f(n) > 12$ megoldásai azok az n-ek, amelyekre $93 \le n \le 256$.	1 pont	
A 12 óránál hosszabb nappalok száma tehát $(256 - 93 + 1 =)$ 164 valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

5. c) második megoldás		
(Az $f(n) > 12$ megoldásai számának megállapításához) először a g függvény értelmezési tartományán oldjuk meg a $-5{,}2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)+11{,}2>12$ egyenlőtlenséget ($1 \le x \le 365$, $x \in \mathbf{R}$).	1 pont	
Ez (az adott halmazon) ekvivalens a $\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)<-\frac{2}{13}$ egyenlőtlenséggel.	1 pont	
Közelítő értékeket alkalmazva: $\frac{x+8}{58}\in\,]1{,}7253+2k\pi;4{,}5579+2k\pi[\ (k\in\mathbf{Z})$. Így a $]92{,}1 + 116k\pi;\ 256{,}3 + 116k\pi[$ intervallumok elemei megoldásai az egyenlőtlenségnek.	2 pont	
$k = 0$ esetén a $]92{,}1;\ 256{,}3[$ intervallum a g értelmezési tartományának részhalmaza (ha pedig $k \ne 0$, akkor nincs a g értelmezési tartományához tartozó eleme az intervallumoknak).	1 pont	
Ezért $f(n) > 12$ megoldásai azok az n-ek, amelyekre $93 \le n \le 256$.	1 pont	
A 12 óránál hosszabb nappalok száma tehát $(256 - 93 + 1 =)$ 164 valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha (számításokkal és a g függvény monotonitására/grafikonjára hivatkozva) igazolja, hogy az év első 12 *óránál hosszabb nappali időszaka a* 93.*, az utolsó pedig a* 256. *napon van, majd ennek alapján helyesen következtet.*

5. d)		
A terület: $\int_0^{2\pi}(-5{,}2\cos(x)+11{,}2)dx$.	1 pont	$-5{,}2\int_0^{2\pi}\cos(x)dx+$ $+\int_0^{2\pi}11{,}2dx$
$\int_0^{2\pi}(-5{,}2\cos(x)+11{,}2)dx=[-5{,}2\sin(x)+11{,}2x]_0^{2\pi}=$	2 pont	*Mivel* $\int_0^{2\pi}\cos(x)dx=0$, $\int_0^{2\pi}11{,}2dx=11{,}2\cdot 2\pi$,
$= (0 + 11{,}2 \cdot 2\pi) - (0 + 0) \approx 70{,}37$	1 pont	*ezért a terület* $\approx 70{,}37$.
Összesen:	**4 pont**	

6. a) **első megoldás**		
A 90-nél nem nagyobb pozitív egészek között 2-vel osztható 45 db, 3-mal osztható 30 db, 5-tel osztható 18 db van.	1 pont	*Venn-diagramon szemléltetjük az egyes halmazokat és azok elemszámát.* 
Ha összeadjuk a 2-vel, a 3-mal, és az 5-tel osztható számok számát, akkor ezek közt kétszer számoltuk a 6-tal, a 10-zel és a 15-tel oszthatókat, az összegből tehát le kell vonni ezek számának a kétszeresét.	1 pont	
A 30-cal oszthatókat viszont így háromszor számoltuk, majd hatszor levontuk, tehát ezek számát még háromszor hozzá kell adnunk.	1 pont	
2-vel és 3-mal (tehát 6-tal) osztható számból 15 db, 2-vel és 5-tel (tehát 10-zel) oszthatóból 9 db, 3-mal és 5-tel (tehát 15-tel) oszthatóból 6 db, végül 2-vel, 3-mal és 5-tel is (tehát 30-cal) oszthatóból 3 db van.	1 pont	
A 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható 90-nél nem nagyobb pozitív egészek száma tehát $45 + 30 + 18 - 2 \cdot (15 + 9 + 6) + 3 \cdot 3 = 42$.	2 pont	*A keresett szám a Venn-diagram alapján:* $24 + 12 + 6 = 42$
Összesen:	**6 pont**	

6. a) **második megoldás**		
A 90-nél nem nagyobb pozitív egészek között 45 db 2-vel osztható van. Ezek között 3-mal is (tehát 6-tal) osztható 15 db, 5-tel is (tehát 10-zel) osztható 9 db. $45 - 15 - 9 = 21$, de így a 3-mal és 5-tel is (tehát 30-cal) osztható 3 db számot kétszer vontuk le. Ezért a csak 2-vel oszthatók száma $45 - 15 - 9 + 3 = 24$.	2 pont	
Hasonlóan: a 90-nél nem nagyobb pozitív egészek között 3-mal osztható 30 db, közülük 2-vel is osztható 15 db, 5-tel is osztható 6 db, 2-vel és 5-tel is osztható pedig 3 db van, így a csak 3-mal oszthatók száma $30 - 15 - 6 + 3 = 12$. A 90-nél nem nagyobb pozitív egészek között 5-tel osztható 18 db, közülük 2-vel is osztható 9 db, 3-mal is osztható 6 db, 2-vel és 3-mal is osztható pedig 3 db van, így a csak 5-tel oszthatók száma $18 - 9 - 6 + 3 = 6$.	3 pont	
Összesen tehát $(24 + 12 + 6 =)$ 42 ilyen szám van.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. a) **harmadik megoldás**		
Mivel a 2, a 3 és az 5 legkisebb közös többszöröse a 30, ezért elég megnézni, hogy 30-ig hány szám rendelkezik a keresett tulajdonsággal.	2 pont	
A megfelelő oszthatóságok ezután periodikusan ismétlődnek, tehát 90-ig háromszor annyi ilyen szám lesz, mint 30-ig.	1 pont	
A 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható számok 1-től 30-ig: 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 21, 22, 25, 26, 27 és 28.	2 pont	
Ez 14 db, tehát a 90-nél nem nagyobb megfelelő számok száma $(14 \cdot 3 =)$ 42.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

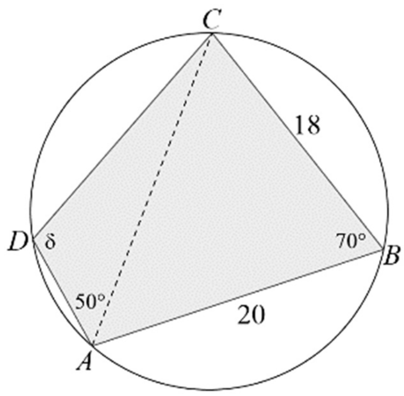
6. b) **első megoldás**		
(A hátralevő két nyerőszámot 87 szám közül sorsolják ki, erre a sorrendet nem figyelembe véve) összesen $\binom{87}{2}$ $(= 3741)$ lehetőség van (összes eset száma).	1 pont	
Nézzük a komplementer eseményt: ekkor az utolsó két kihúzott szám között nincs sem a 64, sem a 68.	2 pont	
Erre összesen $\binom{85}{2}$ $(= 3570)$ lehetőség van.	1 pont	
A kedvező esetek száma tehát $(3741 - 3570 =)$ 171.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{171}{3741} \approx 0{,}046$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. b) **második megoldás**		
(A hátralevő két nyerőszámot 87 szám közül sorsolják ki, erre a húzás sorrendjét is figyelembe véve) összesen $87 \cdot 86$ $(= 7482)$ lehetőség van (összes eset száma).	1 pont	*A sorrendet nem figyelembe véve:* $\binom{87}{2}$ $(= 3741)$ *lehetőség.*
Ha a negyedik kihúzott szám a 64 vagy a 68, de az ötödik szám valami más, akkor erre $2 \cdot 85$ $(= 170)$ lehetőség van; hasonlóképpen $85 \cdot 2$ $(= 170)$ lehetőség van arra, hogy a negyedik kihúzott szám nem jó, de az ötödik kihúzott szám a 64 vagy a 68.	2 pont	$2 \cdot 85 = 170$ *eset*
Végül kétféleképpen fordulhat elő az, hogy a negyedik és az ötödik kihúzott szám (valamilyen sorrendben) a 64 és a 68.	1 pont	1 *eset*

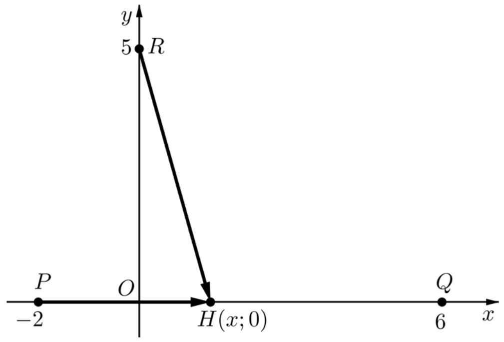
A kedvező esetek száma $(2\cdot 170 + 2 =)$ 342.	1 pont	$(170 + 1 =)$ 171
A keresett valószínűség $\frac{342}{7482} \approx 0{,}046$.	1 pont	$\frac{171}{3741} \approx 0{,}046$
Összesen:	**6 pont**	

6. b) **harmadik megoldás**		
(A hátralevő két nyerőszámot 87 szám közül sorsolják ki.) Annak a valószínűsége, hogy a negyediknek húzott szám a 64 vagy a 68, de az ötödik ezek egyike sem: $\frac{2}{87}\cdot\frac{85}{86}$ $(\approx 0{,}0227)$. Ugyanennyi, $\frac{85}{87}\cdot\frac{2}{86}$ $(\approx 0{,}0227)$ a valószínűsége, hogy a negyedik kihúzott szám nem a 64 és nem a 68, de az ötödik ezek közül kerül ki.	2 pont	*$\frac{2}{87}$ annak a valószínűsége, hogy a negyedik kihúzott szám a 64 vagy a 68.*
Annak a valószínűsége, hogy a 64-et és a 68-at is kihúzzák: $\frac{2}{87}\cdot\frac{1}{86}$ $(\approx 0{,}0003)$.	2 pont	*Annak a valószínűsége, hogy a negyedik szám nem a 64 és a 68 közül kerül ki, de az ötödik szám igen: $\frac{85}{87}\cdot\frac{2}{86}$.*
A keresett valószínűség: $2\cdot\frac{2\cdot 85}{87\cdot 86}+\frac{2}{87\cdot 86}=$	1 pont	$\frac{2}{87}+\frac{85\cdot 2}{87\cdot 86}=$
$=\frac{342}{7482}\approx 0{,}046$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

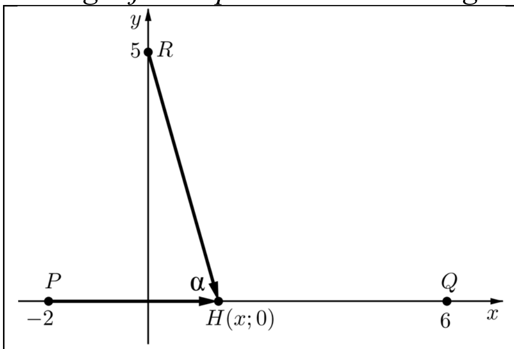
6. c)		
Az összes kifizetett nyeremény: $17\cdot 3\,113\,255 + 1617\cdot 34\,915 + 62\,757\cdot 1970 =$ $= 233\,014\,180$ Ft.	2 pont	
Az egy szelvényre eső átlagos kifizetett nyeremény: $\frac{233\,014\,180}{3\,222\,831}\approx 72{,}3$ Ft.	1 pont	
A szelvény árát is figyelembe véve az egy szelvényre jutó átlagos veszteség $250 - 72{,}3 = 177{,}7$ Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a)		
 *ABC* háromszögben koszinusztétellel: $AC^2 = 20^2 + 18^2 - 2 \cdot 20 \cdot 18 \cdot \cos 70°$,	1 pont	
$AC \approx 21,86$.	1 pont	
A húrnégyszögben $\delta = 180° - 70° = 110°$.	1 pont	
ACD háromszögben szinusztétellel: $\frac{CD}{AC} = \frac{\sin 50°}{\sin 110°}$,	1 pont	
$CD \approx 17,82$.	1 pont	
$DCA\angle = 20°$, ezért a négyszög területe: $\frac{20 \cdot 18 \cdot \sin 70°}{2} + \frac{21,86 \cdot 17,82 \cdot \sin 20°}{2} \approx$ ($\approx 169,1 + 66,6 =$) 235,7.	2 pont	*Szinusztétellel AD* $\approx 7,96$, *így a húrnégyszög terü-letképletéből a terület* (*s* $\approx 31,9$ *miatt*): $\sqrt{11,9 \cdot 13,9 \cdot 14,1 \cdot 23,9} \approx$ $\approx 236,1$.
Összesen:	**7 pont**	

7. b)		
$\overrightarrow{PH} = (0,2;\ 0)$, $\overrightarrow{RH} = (-1,8;\ -5)$	1 pont	
$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{RH} = 0,2 \cdot (-1,8) + 0 \cdot (-5) = -0,36$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7. c)		
 Legyen H az $(x;\ 0)$ pont (ahol $-2 \le x \le 6$).	1 pont*	
Ekkor $\overrightarrow{PH} = (x;\ 0) - (-2;\ 0) = (x + 2;\ 0)$ és $\overrightarrow{RH} = (x;\ 0) - (0;\ 5) = (x;\ -5)$.	1 pont*	
$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{RH} = (x + 2)x + 0 \cdot (-5) = x(x + 2)$	1 pont*	
$x(x + 2) = (x + 1)^2 - 1$, ezért az $f\colon x \mapsto x(x + 2),\ -2 \le x \le 6$ függvénynek minimuma van –1-nél,	2 pont**	
(f a $[-2;\ -1]$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, a $[-1;\ 6]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, $f(-2) = 0$ és $f(6) = 48 > 0$ ezért) a maximumát 6-nál veszi fel.	1 pont**	
A minimális skaláris szorzat a $H_1(-1;\ 0)$ ponthoz tartozik, a maximális pedig a $H_2 = Q(6;\ 0)$ ponthoz.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:
*1. A *-gal jelzett pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

 A $\overrightarrow{PH}$ és $\overrightarrow{RH}$ vektorok szöge az ábrán jelölt α, így a definíció szerint $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{RH} = \lvert\overrightarrow{PH}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{RH}\rvert \cdot \cos\alpha$.	1 pont	
Mivel $\lvert\overrightarrow{RH}\rvert \cdot \cos\alpha = x$, és $\lvert\overrightarrow{PH}\rvert = x + 2$, ezért $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{RH} = x(x + 2)$.	2 pont	

*2. A **-gal jelzett pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó helyesen vázolja a* $[-2;\ 6]$ *zárt intervallumra leszűkített* $x \mapsto x(x+2) = x^2 + 2x$ *másodfokú függvényt, majd az ábra alapján helyesen válaszol.*

8. a) **első megoldás**		
Ha a javított számla alapján az ételekért végül bruttó x Ft-ot, az italokért y Ft-ot fizettek, akkor a hibás számla szerint az ételekért $x : 1{,}04 \cdot 1{,}30 = 1{,}25x$, az italokért pedig $y : 1{,}30 \cdot 1{,}04 = 0{,}8y$ Ft-ot kellett volna fizetniük.	2 pont	
$\begin{cases} 1{,}25x + 0{,}8y = 8710 \\ x + y = 7670 \end{cases}$	1 pont	
A második egyenletet 0,8-del szorozva: $\begin{cases} 1{,}25x + 0{,}8y = 8710 \\ 0{,}8x + 0{,}8y = 6136. \end{cases}$ A két egyenlet különbségéből $0{,}45x = 2574$, azaz $x = 5720$.	2 pont	*Az első egyenletet* 0,8-*del szorozva:* $\begin{cases} x + 0{,}64y = 6968 \\ x + y = 7670. \end{cases}$ $0{,}36y = 702$ $y = 1950$
A helyesen kiállított számla szerinti bruttó ételfogyasztás 5720 Ft, a bruttó italfogyasztás pedig $y = 7670 - x = 1950$ Ft volt.	1 pont	$x = 7670 - y = 5720$
Ellenőrzés: A tévesen kiállított számlán bruttó $5720 : 1{,}04 \cdot 1{,}3 + 1950 : 1{,}3 \cdot 1{,}04 =$ $= (7150 + 1560 =)$ 8710 Ft szerepelt valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. a) **második megoldás**		
Ha a javított számla alapján az ételekért végül bruttó x Ft-ot, az italokért y Ft-ot fizettek, akkor a hibás számla szerint az ételekért $x : 1{,}04 \cdot 1{,}3$, az italokért pedig $y : 1{,}3 \cdot 1{,}04$ Ft-ot kellett volna fizetniük.	1 pont	
$\begin{cases} \frac{x}{1{,}04} \cdot 1{,}3 + \frac{y}{1{,}3} \cdot 1{,}04 = 8710 \\ x + y = 7670 \end{cases}$	1 pont	
A második egyenletből $x = 7670 - y$, ezt az elsőbe visszaírva: $\frac{(7670 - y) \cdot 1{,}3}{1{,}04} + \frac{y \cdot 1{,}04}{1{,}3} = 8710$. $(7670 - y) \cdot 1{,}25 + y \cdot 0{,}8 = 8710$ $9587{,}5 - 0{,}45y = 8710$	3 pont*	
A helyesen kiállított számla szerinti bruttó italfogyasztás $y = \frac{9587{,}5 - 8710}{0{,}45} = 1950$ Ft, a bruttó ételfogyasztás pedig $x = 7670 - y = 5720$ Ft volt.	1 pont*	
Ellenőrzés: A tévesen kiállított számlán bruttó $5720 : 1{,}04 \cdot 1{,}3 + 1950 : 1{,}3 \cdot 1{,}04 =$ $= (7150 + 1560 =)$ 8710 Ft szerepelt valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A második egyenletből $y = 7670 - x$, ezt az elsőbe visszaírva: $\frac{x \cdot 1,3}{1,04} + \frac{(7670 - x) \cdot 1,04}{1,3} = 8710$. Mindkét oldalt 1,04-dal és 1,3-del is szorozva: $x \cdot 1,3^2 + (7670 - x) \cdot 1,04^2 = 11\,775,92$. $0,6084x + 8295,872 = 11\,775,92$	3 pont	
A helyesen kiállított számla szerinti bruttó ételfogyasztás $x = \frac{11\,775,92 - 8295,872}{0,6084} = 5720$ Ft, a bruttó italfogyasztás pedig $y = 7670 - x = 1950$ Ft volt.	1 pont	

8. a) harmadik megoldás		
Ha a hibás számla alapján az ételekért bruttó x Ft-ot, az italokért y Ft-ot fizettek volna, akkor az újraszámolás után az ételekért $x : 1,3 \cdot 1,04 = 0,8x$, az italokért pedig $y : 1,04 \cdot 1,3 = 1,25y$ Ft-ot kellett fizetniük.	2 pont	
$\begin{cases} x + y = 8710 \\ 0,8x + 1,25y = 7670 \end{cases}$	1 pont	
Az első egyenletet 0,8-del szorozva: $\begin{cases} 0,8x + 0,8y = 6968 \\ 0,8x + 1,25y = 7670. \end{cases}$ A két egyenlet különbségéből $0,45y = 702$, azaz $y = 1560$, majd $x = 8710 - y = 7150$.	2 pont	$y = 8710 - x$ $0,8x + 1,25(8710 - x) =$ $= 7670$ $10\,887,5 - 0,45x = 7670$ $x = \frac{10\,887,5 - 7670}{0,45} =$ $= 7150$ $y = (8710 - 7150 =)\ 1560$
A helyesen kiállított számla szerinti bruttó ételfogyasztás $7150 : 1,3 \cdot 1,04 = 5720$ Ft, a bruttó italfogyasztás pedig $1560 : 1,04 \cdot 1,3 = 1950$ Ft volt.	1 pont	
Ellenőrzés: A helyesen kiállított számlán bruttó $5720 + 1950 = 7670$ Ft szerepelt valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. a) negyedik megoldás		
Legyen az elfogyasztott ételek nettó ára x Ft, az italoké pedig y Ft. Ekkor $\begin{cases} 1,3x+1,04y=8710 \\ 1,04x+1,3y=7670. \end{cases}$	2 pont	
Az első egyenletből kivonva a másodikat: $0,26(x-y)=1040$, azaz $x-y=4000$, tehát $x=4000+y$. Ezt visszaírva az első egyenletbe: $1,3(4000+y)+1,04y=8710$. $5200+2,34y=8710$ $y=\frac{8710-5200}{2,34}=1500$ és $x=4000+y=5500$	3 pont*	*A két egyenletet összeadva:* $2,34(x+y)=16\,380$, $x+y=7000$, $x=7000-y$. $9100-0,26y=8710$ $y=\frac{9100-8710}{0,26}=1500$ $x=(7000-1500=)\ 5500$
A bruttó ételfogyasztás $5500\cdot 1,04=5720$ Ft, a bruttó italfogyasztás $1500\cdot 1,3=1950$ Ft volt.	1 pont	
Ellenőrzés: A helyesen kiállított számlán bruttó $5500\cdot 1,04+1500\cdot 1,3=(5720+1950=)\ 7670$ Ft, a tévesen kiállított számlán pedig bruttó $5500\cdot 1,3+1500\cdot 1,04=(7150+1560=)\ 8710$ Ft szerepelt valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az első egyenletet 1,3-del, a másodikat (–1,04)-dal szorozva: $\begin{cases} 1,69x+1,352y=11\,323 \\ -1,0816x-1,352y=-7976,8 \end{cases}$ Az egyenletek összeadása után: $0,6084x=3346,2$. Ebből $x=5500$. Visszahelyettesítve pl. az eredeti első egyenletbe: $1,3\cdot 5500+1,04y=8710$. $1,04y=1560$, tehát $y=1500$.	3 pont	

8. b) **első megoldás**		
Az 1000 vendég összesen $100\cdot 1000 + 200\cdot 1900 + 250\cdot 2800 + 300\cdot 3600 +$ $+ 100\cdot 4400 + 50\cdot 5200 = 2\,960\,000$ Ft-ba kerül.	1 pont	
1000 vendég 3 900 000 Ft-ot fizet be, így az étterem várható haszna 940 000 Ft.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b) **második megoldás**		
Ha egy vendég k Ft-ba kerül és 3900 Ft-ot fizet, akkor az étterem haszna $(3900 - k)$ Ft.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A várható haszon 1000 vendég fogyasztása után: $100\cdot 2900 + 200\cdot 2000 + 250\cdot 1100 + 300\cdot 300 +$ $+ 100\cdot(-500) + 50\cdot(-1300) = 940\,000$ Ft.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. c)		
Pontosan akkor lesz vesztesége az étteremnek ezen a két vendégen, ha az étterem összköltsége több mint 7800 Ft.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ez a következő esetekben fordul elő (a sorrendre való tekintet nélkül): $5200 + 5200$; $5200 + 4400$; $5200 + 3600$; $5200 + 2800$; $4400 + 4400$; $4400 + 3600$.	2 pont	*Egy hiba/hiány esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
A felsorolt esetek valószínűsége (a sorrendet is tekintetbe véve) rendre $0{,}05\cdot 0{,}05$ $(= 0{,}0025)$; $2\cdot 0{,}05\cdot 0{,}1$ $(= 0{,}01)$; $2\cdot 0{,}05\cdot 0{,}3$ $(= 0{,}03)$; $2\cdot 0{,}05\cdot 0{,}25$ $(= 0{,}025)$; $0{,}1\cdot 0{,}1$ $(= 0{,}01)$; $2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3$ $(= 0{,}06)$.	2 pont	
A keresett valószínűség az előző hat valószínűség összege, azaz 0,1375.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. a)		
Az utazások száma $100\,000 - 10\cdot 1000 = 90\,000$ lenne naponta,	1 pont	
a bliccelések száma ennek a 20%-a, vagyis 18 000, az érvényes jeggyel történő utazások száma pedig így $(90\,000 - 18\,000 =)$ 72 000.	2 pont	
A napi bevétel ekkor $72\,000\cdot 350 = 25\,200\,000$ tallér lenne.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b)		
(A bevétel a fizető utasok számának és a vonaljegy árának a szorzata.) Ha az eredeti jegyárhoz képest $5x$ tallérral változik a vonaljegy ára, akkor a jegyár $300 + 5x$ tallér. (A tanulmányban alkalmazott modellben $-11 < x < 31$, ahol x egész szám.)	1 pont	
Az utazások száma $100\,000 - 1000x$,	1 pont	
a bliccelések száma pedig ennek a $(10 + x)$ %-a: $(100\,000-1000x)\cdot\frac{10+x}{100}=(1000-10x)(10+x)$ lesz.	1 pont	*A fizető utasok száma az összes utas számának a $(90 - x)$ %-a:*
A fizető utasok száma így: $100\,000-1000x-(1000-10x)(10+x)=$ $=10x^2-1900x+90\,000$ fő.	2 pont	$(1000-10x)(90-x)=$ $=10x^2-1900x+90\,000$.
A jegyeladásból származó bevétel: $(10x^2-1900x+90\,000)(300+5x)=$	1 pont	
$=50x^3-6500x^2-120\,000x+27\,000\,000$ tallér.	1 pont	
A $]-11; 31[$ nyílt intervallumon értelmezett $f(x)=50(x^3-130x^2-2400x+540\,000)$ függvény deriváltfüggvénye $f'(x)=50(3x^2-260x-2400)$.	1 pont	
$f'(x)=0$, ha $x \approx -8{,}41$ vagy $x \approx 95{,}08$, de ez utóbbi (az $x < 31$ feltétel miatt) nem lehetséges.	1 pont	
A $-8{,}41$ helyen f' pozitívból negatívba megy át, (és $-8{,}41 < x < 31$ esetén negatív) ezért az f-nek $-8{,}41$-nél maximuma van (előtte szigorúan monoton növekedő, utána pedig szigorúan monoton csökkenő).	1 pont	$f''(-8{,}41)\,(=-15\,523)<0$
A feladatban x egész szám lehet csak, ezért még meg kell vizsgálni $f(-8)$ és $f(-9)$ értékét. $f(-8) = 27\,518\,400 > f(-9) = 27\,517\,050$,	1 pont	
tehát a vonaljegy árát $(300 + 5\cdot(-8) =)$ 260 tallérban kell megállapítani. (Ekkor az utasok száma 108 000, a fizető utasok száma pedig 105 840 fő lenne.)	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a 250 *talléros jegyárat tekinti kiindulási alapnak, és ehhez viszonyítja az* 5 *talléros emeléseket, akkor a jegyárra* $250 + 5x$ *tallér adódik.*
A bliccelő utazások aránya x%, *az összes utazás száma* $110\,000 - 1000x$, *a napi bevétel pedig*
$(250+5x)(110\,000-1000x)\cdot\frac{100-x}{100}=50x^3-8000x^2+25\,000x+27\,500\,000$ *tallér lesz*
$(-1 < x < 41$, *ahol x egész szám*).
Deriváltfüggvényként $f'(x)=50(3x^2-320x+500)$ *adódik, ennek két zérushelye (közelítőleg)* 1,59, *illetve* 105,08 *(amely kívül esik az értelmezési tartományon).*
Az $x = 1$, illetve az $x = 2$ helyen vizsgálva a napibevétel-függvényt adódik, hogy $x = 2$ a maximumhely, vagyis a vonaljegy árát $250 + 2\cdot 5 = 260$ *tallérban kell megállapítani.*