ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2020. október 20.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
$900-0{,}25(x-60)^2=0$ $(0<x<130)$	1 pont	
$-0{,}25x^2+30x=0$	1 pont	
$x=0$ vagy $x=120$	1 pont	
A 0 nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért az egyetlen zérushely a 120.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. b)		
$f(20)=900-0{,}25(20-60)^2=500$	1 pont	
$g(20)=128$	1 pont	
A különbség (500 – 128 =) 372.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. c) első megoldás		
$h(x)=900-0{,}25(x-60)^2-6{,}4x=-0{,}25x^2+23{,}6x$	1 pont	
A h deriváltfüggvénye $h'(x)=-0{,}5x+23{,}6$ $(0<x<130)$.	1 pont	
Ha $h'(x)=0$, akkor $x=47{,}2$,	1 pont	
ha $0<x<47{,}2$, akkor $h'(x)>0$ (h szigorúan monoton növekedő), ha $47{,}2<x<130$, akkor $h'(x)<0$ (h szigorúan monoton csökkenő), ezért maximuma van.	1 pont	$h''(x)=-0{,}5$, *ezért* $h''(47{,}2)<0$.
Tehát 47,2 a h maximumhelye,	1 pont	
a maximum értéke pedig $h(47{,}2)=556{,}96$. (A függvénynek minimuma nincs.)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. c) második megoldás		
$h(x)=900-0{,}25(x-60)^2-6{,}4x=-0{,}25x^2+23{,}6x$	1 pont	
Az $x\mapsto -0{,}25x^2+23{,}6x=-0{,}25x(x-94{,}4)$ $(x\in\mathbf{R})$ másodfokú függvény zérushelyei 0 és 94,4,	1 pont	
főegyütthatója negatív, ezért maximuma van.	1 pont	
Maximumhelye $\frac{0+94{,}4}{2}=47{,}2$.	1 pont	*Maximumhelye:* $-\frac{b}{2a}=-\frac{23{,}6}{2\cdot(-0{,}25)}=47{,}2$
($47{,}2\in\,]0;130[$, ezért) ez a h maximumhelye is,	1 pont	
a maximum értéke pedig $h(47{,}2)=556{,}96$. (A függvénynek minimuma nincs.)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó zárt intervallumon vizsgálja a függvényt, és ezért azt állapítja meg, hogy van minimumhelye is, akkor ezért 1 pontot veszítsen.

2. a) **első megoldás**		
Ha a résztvevők létszáma x, akkor az életkoruk összege $28x$.	1 pont	
Az öt legidősebb nélkül a csoport tagjai életkorának összege egyrészt $25{,}6(x-5)$,	1 pont	
másrészt $28x - 5\cdot 40$.	1 pont	*Az öt legidősebb életkorának összege* $5\cdot 40$.
$25{,}6(x-5) = 28x - 5\cdot 40$	1 pont	$\frac{5\cdot 40 + (x-5)\cdot 25{,}6}{x} = 28$
30	1 pont	
($30:2{,}5 = 12$, tehát) 12 férfi és 18 nő vett részt a képzésen.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: a csoport tagjai életkorának összege $30\cdot 28 = 840$. Az öt legidősebb személy nélkül ez az összeg 640, és $640:25 = 25{,}6$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. a) **második megoldás**		
A férfiak száma legyen f, ekkor a nők száma $1{,}5f$, a képzésen résztvevők száma pedig $2{,}5f$.	1 pont	
A csoport tagjai életkorának összege $2{,}5f\cdot 28 = 70f$.	1 pont	
Az öt legidősebb résztvevő nélkül az életkorok összege $70f - 5\cdot 40 = 70f - 200$.	1 pont	
A feladat szövege szerint $70f - 200 = 25{,}6(2{,}5f - 5)$.	1 pont	
$70f - 200 = 64f - 128$ $f = 12$	1 pont	
A képzésen 12 férfi és 18 nő vett részt.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: a csoport tagjai életkorának összege $30\cdot 28 = 840$. Az öt legidősebb személy nélkül ez az összeg 640, és $640:25 = 25{,}6$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. b) **első megoldás**		
Háromféle fűszer választása esetén, ha sem édes, sem keserű nincs közöttük, akkor a többi négyből kell hármat kiválasztani: ez 4-féleképpen lehetséges;	1 pont	
ha csak édes van, de keserű nincs, akkor a többi négy fűszer közül kettőt kell még kiválasztani, ami $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen lehetséges. Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha keserű van, de édes nincs.	2 pont	

Négyféle fűszer választása esetén, ha sem édes, sem keserű nincs a fűszerek között, akkor csak egyféle választás lehetséges;	1 pont	
ha csak édes van, de keserű nincs, akkor a többi négy fűszer közül hármat kell még kiválasztani, ami 4-féleképpen lehetséges. Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha keserű van, de édes nincs.	1 pont	
Az összes ízesítési lehetőség száma tehát $4 + 6 + 6 + 1 + 4 + 4 = 25$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b) második megoldás		
Ha nincs sem édes, sem keserű a választott fűszerek között, akkor (a többi négyből hármat vagy négyet kell választani, ezért) a lehetséges választások száma $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=4+1=5$.	2 pont	
Ha van édes, de nincs keserű, akkor (a többi négy közül kettőt vagy hármat kell választani, ezért) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=6+4=10$ lehetőség van.	2 pont	
Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha keserű van, de édes nincs.	1 pont	
Az összes ízesítési lehetőség száma tehát $5 + 10 + 10 = 25$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b) harmadik megoldás		
Az összes, 3 vagy 4 fűszert tartalmazó lehetőségből levonjuk azoknak az ízesítéseknek a számát, amelyekben édes és keserű is szerepel.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
3 vagy 4 fűszert összesen $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}$ (= 35) különböző módon lehet választani (összes eset).	2 pont	
Olyan (3 vagy 4 fűszert tartalmazó) ízesítés, amelyben édes és keserű is van, $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ (= 10) különböző módon választható (kedvezőtlen esetek).	2 pont	
A megfelelő ízesítési lehetőségek száma tehát $35 - 10 = 25$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

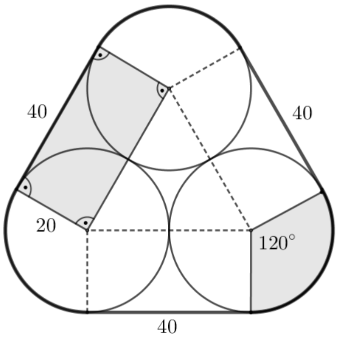
Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

3. a)		
Jelölje az érmék számát e. Ekkor egyrészt $e = 6 + m$, másrészt $e = (6 - m)m$.	2 pont	
$6 + m = (6 - m)m$ $m^2 - 5m + 6 = 0$	1 pont	
Az egyenlet megoldása $m_1 = 2$ vagy $m_2 = 3$,	1 pont	
az érmék száma ekkor $e_1 = 8$ vagy $e_2 = 9$.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján. (Ha $m = 2$ és 8 érménk van, akkor egyrészt kimarad $8 - 6 = 2$ érme, másrészt $6 - 4 = 2$ dobozba nem jut érme; ha pedig $m = 3$ és 9 érménk van, akkor kimarad 3 érme, és $6 - 3 = 3$ dobozba nem jut érme valóban.)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. b)		
Egy véletlenszerűen választott érme 0,03 valószínűséggel hibás, 0,97 valószínűséggel hibátlan.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A valószínűségeket az $n = 80$, $p = 0{,}03$ paraméterű binomiális eloszlás segítségével számítjuk ki.) $P(0 \text{ hibás}) = 0{,}97^{80} \approx 0{,}087$	1 pont	
$P(1 \text{ hibás}) = \binom{80}{1} \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^{79} \approx 0{,}216$	1 pont	
$P(2 \text{ hibás}) = \binom{80}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{78} \approx 0{,}264$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 hibás van $\approx 0{,}087 + 0{,}216 + 0{,}264 = 0{,}567$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. a)		
(Az első asztalra érkezés után 0,84 m magasra pattan vissza a pingponglabda, majd az asztal felé esve ugyanekkora távolságot tesz meg a második leérkezésig.) Az első és a második asztalra érkezés között megtett út $2 \cdot 0{,}84 = 1{,}68$ méter.	1 pont	
Az egymás után következő két asztalra érkezés között megtett távolságok hossza egy olyan mértani sorozatot alkot, amelynek első tagja 1,68 méter, hányadosa pedig 0,84.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első és a 15. asztalra érkezés között megtett út hossza a mértani sorozat első 14 tagjának összege: $S_{14} = \frac{1{,}68 \cdot (0{,}84^{14} - 1)}{0{,}84 - 1} \approx 9{,}59$ méter.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

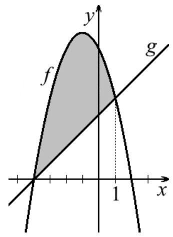
4. b)		
Az első esetben a labdák száma 3-mal osztva 2-t, a második esetben pedig 1-et ad maradékul.	2 pont	$6k + 2 = 15m + 1$ $(k, m \in \mathbf{N})$ $3(2k - 5m) = -1$
Ez azonban lehetetlen. (András állítása tehát valóban hamis.)	1 pont	*A bal oldal osztható 3-mal, a jobb oldal nem, ami lehetetlen.*
Összesen:	**3 pont**	

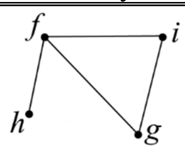
4. c)		
 Az ábra köreinek érintkezése miatt az alapterület felbontható egy 40 mm oldalú szabályos háromszögre (ennek csúcsai a körök középpontjai), három egybevágó téglalapra, továbbá három egybevágó 120°-os középponti szögű körcikkre (amelyek együtt egy teljes kört alkotnak).	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Az alapterület tehát $40^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 20 \cdot 40 + 20^2 \cdot \pi \approx 4349\ \text{mm}^2$.	2 pont*	$4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 2 \cdot 4 + 2^2 \cdot \pi \approx$ $\approx 43{,}5\ \text{cm}^2$
A doboz térfogata $4349 \cdot 40 = 173\,960\ \text{mm}^3$.	1 pont*	$43{,}5 \cdot 4 = 174\ \text{cm}^3$
A három labda térfogata $4 \cdot 20^3 \cdot \pi \approx 100\,531\ \text{mm}^3$.	1 pont*	$4 \cdot 2^3 \cdot \pi \approx 101\ \text{cm}^3$
Ez a doboz térfogatának kb. 58%-a.	1 pont*	
Összesen:	**7 pont**	

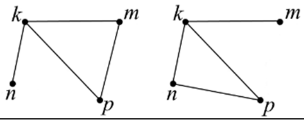
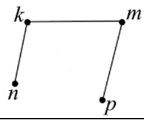
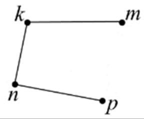
*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok az alábbi gondolatmenetért is járnak.*

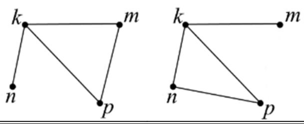
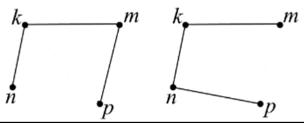
Ha a labdák sugara *r*, akkor a doboz alapterülete $(2r)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot r \cdot 2r + r^2\pi = r^2 \cdot (\sqrt{3} + 6 + \pi)$.	2 pont	
A doboz térfogata $2r^3 \cdot (\sqrt{3} + 6 + \pi)$.	1 pont	
A három labda térfogata $r^3 \cdot 4\pi$.	1 pont	
Ez a doboz térfogatának $\frac{r^3 \cdot 4\pi}{2r^3 \cdot (\sqrt{3} + 6 + \pi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3} + 6 + \pi} \approx 0{,}578$ része, azaz kb. 58%-a.	1 pont	

II.

5. a)		
(Az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásával megkeressük a két függvénygrafikon metszéspontjait.) $(x+4)(2-x) = x+4$ $0 = x^2 + 3x - 4$	2 pont	
Innen $x = -4$ és $x = 1$.	1 pont	
A kérdezett területet (a két metszéspont között) az $\left\lvert \int_{-4}^{1} ((x+4)(2-x)-(x+4))dx \right\rvert$ értéke adja meg.	1 pont	$\int_{-4}^{1}(-x^2-2x+8)dx -$ $-\int_{-4}^{1}(x+4)dx$
$\left\lvert \int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)dx \right\rvert = \left\lvert \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-4}^{1} \right\rvert =$ $= \left\lvert \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) - \left(-\frac{-64}{3} - 24 - 16 \right) \right\rvert =$	2 pont	*Az integrálok kiszámított értékével:* $\frac{100}{3} - 12{,}5 = \frac{125}{6}$.
$= \left\lvert \frac{13}{6} - \left(-\frac{56}{3} \right) \right\rvert = \frac{125}{6}$	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

5. b)		
f zérushelyei –4 és 2, *g* zérushelye –4,	1 pont	
h zérushelyei –2 és 2,	1 pont	
i zérushelyei –4 és 4.	1 pont	
	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. c) első megoldás		
(A p-nek egyetlen zérushelye lehet.) Fagráfban nincs izolált pont, ezért p zérushelye csak a k, m és n zérushelyeinek valamelyike lehet: 3, –3, 5 vagy –5.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha a p zérushelye a 3 vagy a –5 lenne, akkor a gráfban létrejönne a k-p-m vagy a k-p-n kör. Ez tehát nem lehetséges.	1 pont	
A –3 lehet a p zérushelye (ekkor $c = 3$).	1 pont	
Az 5 lehet a p zérushelye (ekkor $c = –5$).	1 pont	
Tehát a c konstans értéke kétféleképpen választható meg.	1 pont	$p(x) = x + 3$ vagy $p(x) = x – 5$
Összesen:	**5 pont**	

5. c) második megoldás		
Ha a p zérushelye a 3 vagy a –5 lenne, akkor a gráfban létrejönne a k-p-m vagy a k-p-n kör. Ez tehát nem lehetséges.	1 pont	
Ha a p zérushelye nem a 3 és nem a –5, akkor a p-m, illetve a p-n élek közül csak az egyik létezhet (mert p-nek csak egy zérushelye van, de m-nek és n-nek nincs közös zérushelye); az összefüggőség miatt az egyiknek léteznie is kell.	2 pont	
A p zérushelye lehet a –3, és lehet 5 is, tehát kétféleképpen választható meg a konstans értéke ($p(x) = x + 3$ vagy $p(x) = x – 5$).	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyesen adja meg a c konstans lehetséges értékeit és a hozzá tartozó gráfokat, és ez alapján helyes választ ad, akkor ezért 4 pontot kapjon. A további 1 pontot akkor kaphatja meg, ha azt is megindokolja, hogy több megoldás nem lehetséges.

6. a)		
(A $t = 5$ helyettesítést alkalmazzuk.) $B(5)=\dfrac{1{,}5\cdot 10^6}{1+\left(\dfrac{1{,}5\cdot 10^6}{1000}-1\right)\cdot 0{,}75^5}\approx$	1 pont	$\dfrac{1500\,000}{1+(1500-1)\cdot 0{,}75^5}$
$\approx 4204{,}98$,	1 pont	
azaz kb. 4200 betegre lehet számítani.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. b)		
A lakosság 10%-a 150 ezer fő.	1 pont	
Jelölje t a kérdezett napok számát. $\dfrac{1{,}5\cdot 10^6}{1+\left(\dfrac{1{,}5\cdot 10^6}{1000}-1\right)\cdot 0{,}75^t}=1{,}5\cdot 10^5$	1 pont	$\dfrac{1500\,000}{1+(1500-1)\cdot 0{,}75^t}=$ $= 150\ 000$
$10=1+1499\cdot 0{,}75^t$ $\dfrac{9}{1499}=0{,}75^t$	1 pont	
$t=\log_{0{,}75}\dfrac{9}{1499}\approx$	1 pont	$t=\dfrac{\lg\left(\dfrac{9}{1499}\right)}{\lg 0{,}75}\approx$
$\approx 17{,}78$.	1 pont	
Azaz kb. 18 nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött ($18 < 30$).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. c)		
(Mindenhol felhasználjuk, hogy a feladat szövege szerint L, K, n pozitív számok.) A $\{b_n\}$ sorozat alulról korlátos, mert minden tagja pozitív (egy alsó korlát például a 0).	1 pont	
A $\{b_n\}$ sorozat felülről is korlátos, mert $\frac{L}{1+K\cdot 0{,}75^n}<L$ (minden $n\in\mathbf{N}^+$ esetén), hiszen a tört nevezője 1-nél nagyobb. (A $\{b_n\}$ sorozat tehát korlátos.)	2 pont	
A $\{0{,}75^n\}$ (mértani) sorozat szigorúan monoton csökkenő, ezért az $\{1+K\cdot 0{,}75^n\}$ sorozat is az.	1 pont*	
Ebből következik, hogy az $\left\{\frac{L}{1+K\cdot 0{,}75^n}\right\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő. (A $\{b_n\}$ tehát konvergens.)	1 pont*	
Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}0{,}75^n=0$,	1 pont	
így $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{L}{1+K\cdot 0{,}75^n}=\frac{L}{1+K\cdot 0}=L$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:

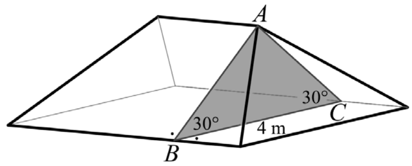
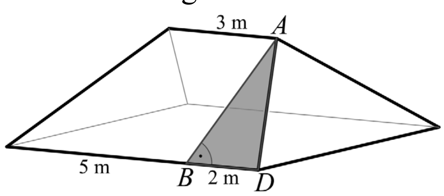
1. *A *-gal jelzett pontok az alábbi gondolatmenetért is járnak.*

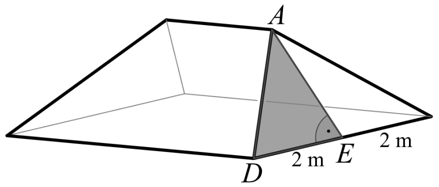
(Minden $n\in\mathbf{N}^+$ esetén) $b_{n+1}-b_n=\frac{L}{1+K\cdot 0{,}75^{n+1}}-\frac{L}{1+K\cdot 0{,}75^n}$	1 pont	
Ez pozitív, mert az első tört nevezője kisebb (így az első tört nagyobb a másodiknál). Tehát a sorozat szigorúan monoton növekedő.	1 pont	

2. *A *-gal jelzett pontok az alábbi gondolatmenetért is járnak.*

(Minden $n\in\mathbf{N}^+$ esetén) $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{L}{1+K\cdot 0{,}75^{n+1}}\cdot\frac{1+K\cdot 0{,}75^n}{L}=\frac{1+K\cdot 0{,}75^n}{1+K\cdot 0{,}75^{n+1}}$	1 pont	
Ez a tört 1-nél nagyobb (mert a tört nevezője kisebb a számlálójánál), tehát a sorozat szigorúan monoton növekedő.	1 pont	

7. a)		
A tető alapterülete $7 \cdot 4 = 28\ \text{m}^2$.	1 pont	
A tetőre hullott csapadék térfogata $28 \cdot 0{,}015 =$ $= 0{,}42\ \text{m}^3$,	1 pont	
a hordókban összegyűlt víz térfogata $0{,}42 \cdot 0{,}95 =$ $= 0{,}399\ \text{m}^3$, egy-egy hordóba tehát (jó közelítéssel) $V = 0{,}1\ \text{m}^3$ esővíz került.	1 pont	
Egy hordó alapterülete $T = r^2\pi = 0{,}2^2 \cdot \pi \approx 0{,}126\ \text{m}^2$.	1 pont	
A V térfogatú esővíz $\frac{V}{T} = \frac{0{,}1}{0{,}126} \approx 0{,}79$ m, azaz 79 cm magasságig tölti meg az egyes hordókat (és ez valóban kisebb, mint a hordó magassága).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. b)		
A tető A csúcsán áthaladó, az alapsíkjára merőleges, és a tető rövidebb oldalával párhuzamos síkmetszet a padlást olyan ABC egyenlő szárú háromszögben metszi, melynek BC alapja 4 méter hosszú, alapon fekvő szögei pedig 30 fokosak.  	2 pont	
A háromszög szárainak hossza $AB = AC = \frac{2}{\cos 30°} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31$ (m), ezek egyúttal a tetőt alkotó két trapéz magasságai.	1 pont	
A trapézok területe így $T_1 = \frac{(7+3)}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11{,}55$ (m^2).	1 pont	
A trapézok szárai a tetőt alkotó két egyenlő szárú háromszögnek is szárai. Az ábra szerinti AD szár az ABD derékszögű háromszögből határozható meg.  $BD = \frac{7-3}{2} = 2$ (m), így a Pitagorasz-tétellel: $AD = \sqrt{2^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{28}{3}} \approx 3{,}06$ (m).	2 pont	

A háztetőt alkotó egyenlőszárú háromszög AE magassága (szintén a Pitagorasz-tétellel): $AE = \sqrt{\frac{28}{3} - 2^2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31$ (m),	1 pont	
így a háromszög területe $T_2 = \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4{,}62$ (m^2).	1 pont	
A tető teljes felülete $2(T_1 + T_2) = \frac{56}{\sqrt{3}} \approx 32{,}33$ m^2.	1 pont	
Ekkora felület fedésére $32{,}33 \cdot 30 \approx 970$ cserépre lesz szükség,	1 pont	
a hulladékot is figyelembe véve pedig $\frac{970}{0{,}92} \approx 1055$ darab cserepet kell vásárolni.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

8. a)		
A háromjegyű számok száma 900,	1 pont*	
ezek között $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ olyan van, amelyben nincs 1-es.	1 pont*	
Az A halmaz elemeinek száma tehát $9 \cdot 10 \cdot 10 - 8 \cdot 9 \cdot 9 = 252$.	1 pont*	
Azokat a háromjegyű számokat kell az A halmazból elhagynunk, amelyekben a 2-es és a 3-as számjegy is szerepel (vagyis amelyek az 1, 2, 3 számjegyekből állnak). Ilyen háromjegyű számból 6 darab van.	1 pont	
Az $A \setminus (B \cap C)$ halmaz elemszáma $252 - 6 = 246$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az A halmaz elemei között 1 db olyan van, amelyben három 1-es szerepel, és 26 db olyan, amelyben két 1-es van (százas helyiértéken nem 1-es van: 8 db, százas helyiértéken 1-es van: $2 \cdot 9 = 18$ db).	1 pont	
Az A-nak 225 db olyan eleme van, amelyben egy db 1-es van (százas helyiértéken nincs 1-es: $8 \cdot 2 \cdot 9 = 144$ db, százas helyiértéken van az 1-es: $9 \cdot 9 = 81$ db).	1 pont	
Az A elemeinek száma tehát $1 + 26 + 225 = 252$.	1 pont	

8. b) **első megoldás**		
Az 1-es és 3-as dobás kétféleképpen is előfordulhat (az első és a második dobókockán is lehet 1-es), ennek valószínűsége így $2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}$.	2 pont	
Két 2-es dobásának valószínűsége $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}$.	1 pont	
Így $2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=$	1 pont	
$=\frac{10}{36}\left(=\frac{5}{18}\right)$ annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4 lesz.	1 pont	$\frac{5}{18}\approx 0{,}278$
Összesen:	**5 pont**	

8. b) **második megoldás**		
Az összes eset száma $6\cdot 6=36$.	1 pont	
Az első kockán 1-es és a másodikon 3-as $1\cdot 3=3$-féleképpen fordulhat elő, ugyanennyi lehetőség van arra, hogy az első kockán 3-as és a másodikon 1-es legyen.	2 pont	
Két 2-es dobás $2\cdot 2=4$-féleképpen fordulhat elő.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{2\cdot 3+4}{36}=\frac{10}{36}\left(=\frac{5}{18}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés:
Ha a vizsgázó az alábbi (vagy ehhez hasonló) táblázattal szemlélteti a kedvező esetek és az összes eset számát, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

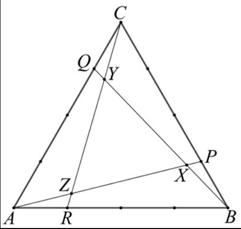
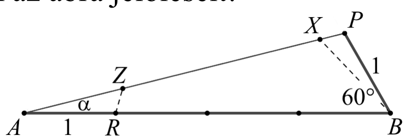
	1	2	2	3	3	3
1						
2						
2						
3						
3						
3						

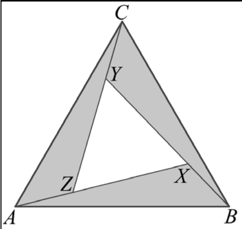
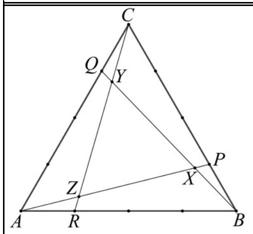
8. c)		
Andi $\frac{3}{6}$ valószínűséggel veszít n forintot; $\frac{1}{6}$ valószínűséggel nyer (n – 80) forintot; $\frac{2}{6}$ valószínűséggel nyer $2n$ – 160 forintot.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

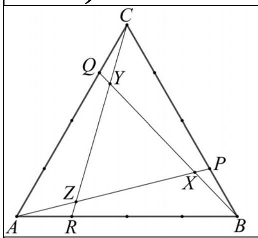
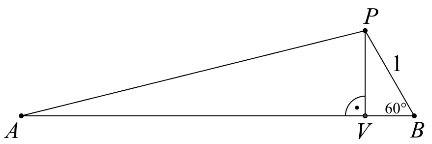
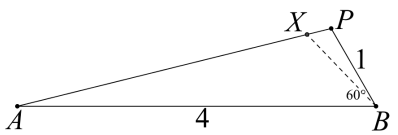
Andi nyereményének (egyúttal Béla veszteségének) várható értéke: $-\frac{3}{6}n+\frac{1}{6}(n-80)+\frac{2}{6}(2n-160)$.	2 pont	
A játék igazságos (mindkét játékos számára), ha $-\frac{3}{6}n+\frac{1}{6}(n-80)+\frac{2}{6}(2n-160)=0$,	1 pont	
innen $n = 200$ (Ft).	1 pont	
1-es dobás esetén tehát 200 – 80 = 120 forintot fizet Béla Andinak.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. a) első megoldás		
A háromszög egyik oldaláról kettő, a másik két oldaláról egy-egy pontot kell kiválasztani.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
3-féleképpen választhatjuk ki azt az oldalt, amelyikről két pontot választunk.	1 pont	
Az ezen az oldalon kijelölt három pont közül 3-féleképpen választhatunk ki kettőt.	1 pont	
A másik két oldal mindegyikéről 3-féleképpen választhatjuk ki a négyszög harmadik, illetve negyedik csúcsát.	1 pont	
Összesen tehát $3\cdot3\cdot3\cdot3 = 81$, a feltételeknek megfelelő négyszög van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

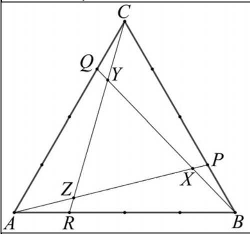
9. a) második megoldás		
Összesen $\binom{9}{4}$ (= 126) lehetőség van a 4 pont kiválasztására.	1 pont	
Kedvezőtlen eset, ha egy oldalról 3 pontot választunk, egy másik oldalról pedig egyet: ez $3\cdot2\cdot3 = 18$ eset (mert $3\cdot2$-féleképpen választható ki a két oldal, a második kiválasztott oldalról pedig 3-féleképpen választható ki egy pont). Kedvezőtlen az is, ha két oldalról 2-2 pontot választunk: ez $3\cdot3\cdot3=27$ eset (mert 3-féleképpen választható ki a két oldal, egy-egy oldalról pedig 3-3-féleképpen választható ki két pont).	3 pont	
A kedvező esetek száma tehát 126 – 18 – 27 = 81.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) első megoldás		
 A (harmadrendű) forgásszimmetria miatt az *ARZ*, *BPX* és *CQY* háromszögek egybevágók, és az *XYZ* háromszög szabályos.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az *XYZ* háromszög területéhez elegendő például a *ZX* szakasz hosszát kiszámítani: $ZX = AP - AZ - XP = AP - AZ - ZR$ (az *ARZ* és *BPX* háromszögek egybevágósága miatt ugyanis $XP = ZR$).	1 pont	
Használjuk az ábra jelöléseit!  Az *ABP* háromszögben koszinusztétellel: $AP^2 = 1^2 + 4^2 - 2\cdot 1\cdot 4\cdot \cos 60° = 13$, $AP = \sqrt{13}$ ($\approx 3{,}606$).	2 pont	
Koszinusztétellel ($\alpha = BAP\angle$): $\cos\alpha = \dfrac{AP^2 + AB^2 - BP^2}{2\cdot AP\cdot AB}$, $\cos\alpha = \dfrac{13+16-1}{2\cdot\sqrt{13}\cdot 4}$ ($\approx 0{,}9707$), $\alpha \approx 13{,}9°$.	2 pont	Szinusztétellel: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 60°} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$ ($\approx 0{,}2402$), $\alpha \approx 13{,}9°$ (α hegyesszög).
Az *ARZ* háromszögben $AR = 1$, $AZR\angle = 60°$, $ARZ\angle = 120° - \alpha \approx 106{,}1°$.	1 pont	
Szinusztétellel: $\dfrac{AZ}{1} = \dfrac{\sin(120° - \alpha)}{\sin 60°} \approx 1{,}1094$, vagyis $AZ \approx 1{,}109$;	1 pont	
$\dfrac{ZR}{1} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 60°} \approx 0{,}2774$, vagyis $ZR \approx 0{,}277$.	1 pont	
$ZX = AP - AZ - ZR$ ($\approx 3{,}606 - 1{,}109 - 0{,}277$) $= 2{,}220$	1 pont	
Az *XYZ* szabályos háromszög területe: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot ZX^2 \approx 2{,}13$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

9. b) második megoldás		
 A (harmadrendű) forgásszimmetria miatt az *ABX*, *BCY* és *CAZ* háromszögek egybevágók, és az *XYZ* háromszög szabályos.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
 (Kiszámítjuk az *ABX* háromszög területét.) Az *ABP* háromszögben $AB = 4$, $PB = 1$, $PBA\angle = 60°$. Koszinusztétellel: $AP^2 = 1^2 + 4^2 - 2\cdot 1\cdot 4\cdot \cos 60° = 13$, $AP = \sqrt{13}$ (≈ 3,606).	2 pont	
Az *ABP* háromszögben $\alpha = BAP\angle$. Szinusztétellel: $\frac{\sin\alpha}{\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{13}}$,	1 pont	
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$ (≈ 0,2402), $\alpha \approx 13{,}9°$ (α hegyesszög).	1 pont	
A forgásszimmetria miatt $CBQ\angle = \alpha$, így $ABX\angle = 60° - \alpha$ (≈ 46,1°).	1 pont	
Az *AXB* háromszögben szinusztétellel: $\frac{AX}{\sin(60° - \alpha)} = \frac{4}{\sin 120°}$, innen $AX \approx 3{,}328$.	1 pont	
Az *ABX* háromszög területe $t = \frac{AB\cdot AX\cdot \sin\alpha}{2} \approx$ $\approx \frac{4\cdot 3{,}328\cdot \sin 13{,}9°}{2} \approx 1{,}599$.	2 pont	$t = \frac{AX}{AP}\cdot T_{ABP} =$ $= \frac{AX}{AP}\cdot\frac{T_{ABC}}{4} = \frac{AX}{AP}\cdot\sqrt{3} \approx$ $\approx 1{,}599$
Az *XYZ* háromszög területe $T_{XYZ} = T_{ABC} - 3t \approx$	1 pont	
$\approx \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2 - 3\cdot 1{,}599 \approx 2{,}13$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

9. b) harmadik megoldás		
 A (harmadrendű) forgásszimmetria miatt az ARZ, BPX és CQY háromszögek egybevágók, és az XYZ háromszög szabályos.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az XYZ háromszög területéhez elegendő például a ZX szakasz hosszát kiszámítani: $ZX = AP - AZ - XP = AP - XB - XP$ (az ARZ és BPX háromszögek egybevágósága miatt ugyanis $AZ = XB$).	1 pont	
Az ABP háromszög P-ből induló PV magassága a PVB derékszögű háromszögből (amely egy 1 egység oldalú szabályos háromszög fele): $PV = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 	1 pont	$PV = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Ugyancsak a PVB derékszögű háromszögből $VB = \frac{1}{2}$, így $AV = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.	1 pont	$VB = \cos 60° = \frac{1}{2}$
AVP derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $AP = \sqrt{PV^2 + AV^2} = \sqrt{\frac{52}{4}} = \sqrt{13}$.	1 pont	
Az ABP és a BXP háromszög hasonló, mert közös a P-nél fekvő szögük, továbbá $PBA\angle = PXB\angle = 60°$. 	1 pont	
A megfelelő oldalak aránya egyenlő: $\frac{XP}{PB} = \frac{PB}{PA}$, amiből $XP = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$,	2 pont	
illetve $XB = 4 \cdot XP$, azaz $XB = \frac{4\sqrt{13}}{13}$.	1 pont	
$ZX\ (= AP - XB - XP) = \sqrt{13} - \frac{4\sqrt{13}}{13} - \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$	1 pont	
Az XYZ szabályos háromszög területe: $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot ZX^2 = \frac{16\sqrt{3}}{13}$ $(\approx 2{,}13)$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

Megjegyzés: $AZ : ZX : XP = 4 : 8 : 1$.

9. b) negyedik megoldás		
 Legyen $\alpha = BAP\angle$. $ABC\angle = 60^{\circ}$ miatt $BPA\angle = 120^{\circ} - \alpha$.	1 pont	
Az ABP háromszögben szinusztétellel: $\frac{\sin\alpha}{\sin(120^{\circ}-\alpha)} = \frac{1}{4}$.	1 pont	
$4\sin\alpha = \sin(120^{\circ}-\alpha)$ $4\sin\alpha = \sin 120^{\circ}\cdot\cos\alpha - \cos 120^{\circ}\cdot\sin\alpha$ $4\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$	1 pont	
$\frac{7}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}$ $(\approx 0{,}2474)$	1 pont	
$\alpha \approx 13{,}9^{\circ}$	1 pont	
A forgásszimmetria miatt $QBC\angle = \alpha$, így $ABX\angle = 60^{\circ} - \alpha \approx 46{,}1^{\circ}$.	1 pont	
Az ABX háromszögben ($AXB\angle = 120^{\circ}$ miatt) szinusztétellel: $\frac{\sin\alpha}{\sin 120^{\circ}} = \frac{BX}{4}$,	1 pont	
valamint $\frac{\sin(60^{\circ}-\alpha)}{\sin 120^{\circ}} = \frac{AX}{4}$.	1 pont	
Innen $BX \approx 1{,}109$ és $AX \approx 3{,}328$.	1 pont	
A forgásszimmetria miatt $AZ = BX$, így $ZX = AX - AZ = AX - BX \approx 2{,}219$.	1 pont	
A forgásszimmetria miatt az XYZ háromszög szabályos, területe tehát $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot XZ^2 \approx 2{,}13$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	