ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. május 4.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
Hat szomszédos természetes szám között biztosan van kettő, amelyik 3-mal osztható,	1 pont	
és legalább egy, amelyik osztható 5-tel,	1 pont	
így a hat szám szorzata osztható lesz $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$-tel.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. b)		
Az állítás nem igaz.	1 pont	
Egy ellenpélda: $11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$ (= 692 835).	2 pont	*Ha öt egymást követő páratlan természetes szám közül a középső osztható 3-mal, de 9-cel nem, akkor a szorzat nem osztható 9-cel és így 45-tel sem.*
Összesen:	**3 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">1. c)</td></tr>
<tr><td>(Mivel $a + b + c = 37$, ezért) ha $a = 7$, akkor ($b + c = 30$, tehát) b-re és c-re a következő lehetőségek vannak: (9; 21), (11; 19) és (13; 17).
Ez 3 lehetőség.</td><td>1 pont</td><td rowspan="3">(Mivel 7 + 9 = 16, ezért c legfeljebb 21, másrészt 9 + 11 + 13 < 37, ezért c legalább 15.)
A megfelelő számhármasok:
<table><tr><th>c</th><th>b</th><th>a</th></tr><tr><td>21</td><td>9</td><td>7</td></tr><tr><td>19</td><td>11</td><td>7</td></tr><tr><td>17</td><td>13</td><td>7</td></tr><tr><td>17</td><td>11</td><td>9</td></tr><tr><td>15</td><td>13</td><td>9</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Ha $a = 9$, akkor ($b + c = 28$, tehát) b-re és c-re a következő lehetőségek vannak: (11; 17) és (13; 15).
Ez 2 lehetőség.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Ha $a \geq 11$, akkor ($a < b < c$ miatt) $b \geq 13$ és $c \geq 15$, tehát $a + b + c \geq 39$, ami ellentmondás.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Összesen tehát 5-féleképpen választható meg a feltételeknek megfelelően a, b és c értéke.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>4 pont</td><td></td></tr>
</table>

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó számhármasokat ad meg, de a felsorolása hibás, nem teljes, vagy többszörösen felsorolt számhármast tartalmaz, akkor minden hibás (hiányzó vagy többszörösen felsorolt) számhármas esetén 1 pontot (de összesen legfeljebb 3 pontot) veszítsen az erre a részre járó 3 pontból.

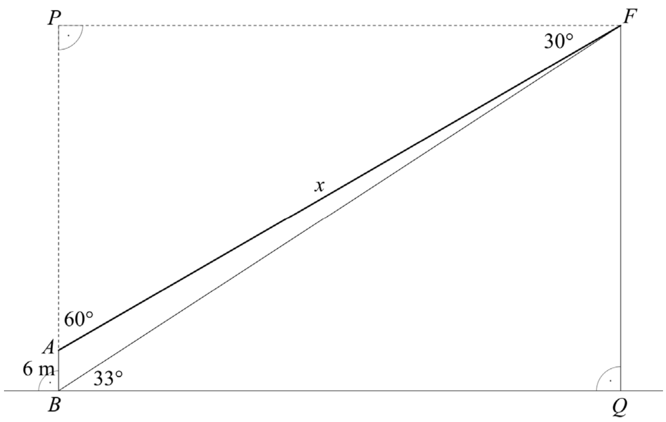
2. Ha a vizsgázó a három megadott feltétel (paritás, különbözőség, nagyság szerinti sorrend) valamelyikét nem veszi figyelembe, akkor megoldására legfeljebb 2 pontot kaphat.

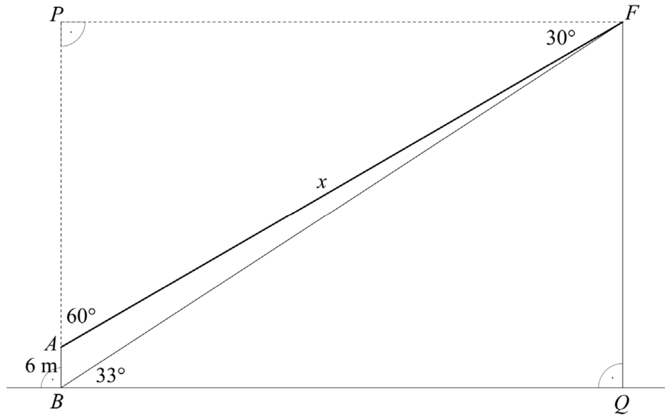
1. d)

A	B	C	$(A \vee B) \rightarrow C$
i	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*h*
i	*h*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*i*
h	*i*	*h*	*h*
h	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*h*	*i*

(igazságtábla fent)	3 pont	*Minden hiányzó vagy hibás válasz esetén 1 pontot veszítsen a vizsgázó (de a feladatra kapott pontszám nem lehet negatív).*
Összesen:	**3 pont**	

2. a) első megoldás

A szöveg alapján vázlat készítése:  Az alsó állomás *A*, a felső állomás *F*, az eredeti tervben szereplő alsó állomás *B*, a pálya hossza $AF = x$.	2 pont	*A szövegnek megfelelő helyes ábra, az adatok feltüntetésével.*
Az ABF háromszögben $ABF\angle = 57°$ és $BFA\angle = 3°$,	1 pont	
ezért szinusztétellel: $\frac{x}{6} = \frac{\sin 57^\circ}{\sin 3^\circ}$.	1 pont	
Ebből x $\left(= \frac{6 \cdot \sin 57^\circ}{\sin 3^\circ} \right) \approx 96$ m a pálya hossza.	1 pont	
Az APF derékszögű háromszögből: $AP = x \cdot \sin 30^\circ = \frac{x}{2}$,	1 pont	
vagyis $AP \approx 48$ m a pálya szintemelkedése.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">2. a) második megoldás</td></tr>
<tr><td>A szöveg alapján vázlat készítése:


Az alsó állomás A, a felső állomás F, az eredeti tervben szereplő alsó állomás B, a pálya hossza AF = x.</td><td>2 pont</td><td>A szövegnek megfelelő helyes ábra, az adatok feltüntetésével.</td></tr>
<tr><td>Az APF derékszögű háromszögből (amely egy szabályos háromszög fele): $AP = \frac{x}{2}$ és $PF = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A BPF derékszögű háromszögben PBF∠ = 57° és
$BP = AP + 6$, ezért $\operatorname{tg} 57^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}+6}$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>$\left(\frac{x}{2}+6\right)\cdot \operatorname{tg} 57^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$
$(0,5x+6)\cdot 1,540 \approx 0,866x$
$0,096x \approx 9,24$</td><td>1 pont</td><td>$x = \frac{12\cdot \operatorname{tg} 57^\circ}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} 57^\circ}$</td></tr>
<tr><td>$x \approx 96$ m a pálya hossza.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A pálya szintemelkedése (ennek a fele, azaz) 48 m.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>7 pont</td><td></td></tr>
</table>

Megjegyzés: Ha a vizsgázó valamelyik válaszát mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

2. b) **első megoldás**		
Egy-egy napon átlagosan $\frac{670\,000}{340}$ (≈ 1971) utast szállított a sikló 1896-ban.	1 pont	
Ha a napi üzemidő 14 óra = 840 perc volt, akkor egy nap kb. 84 menetet teljesített a sikló.	1 pont	*Elfogadható a 85 menet is.*
Az egy-egy menetben szállított utasok számának átlaga: $\frac{\frac{670\,000}{340}}{84} \approx 23{,}5$.	1 pont	
Mivel a két kocsiban összesen 44 utas fért el,	1 pont	
a férőhelyek átlagos kihasználtsága tehát kb. $\left(\frac{23{,}5}{44}\cdot 100 \approx\right)$ 53 százalékos lehetett 1896-ban.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. b) **második megoldás**		
Ha a napi üzemidő 14 óra = 840 perc volt, akkor egy nap kb. 84 menetet teljesített a sikló.	1 pont	*Elfogadható a 85 menet is.*
A két kocsiban összesen 44 utas fért el.	1 pont	
Ha minden menetben 44 utast szállítottak volna (100%-os kihasználtság), akkor egy év alatt körülbelül $84 \cdot 44 \cdot 340 \approx 1\,257\,000$ utast szállítottak volna.	2 pont	
A férőhelyek átlagos kihasználtsága tehát kb. $\left(\frac{670\,000}{1\,257\,000}\cdot 100 \approx\right)$ 53 százalékos lehetett 1896-ban.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Minden észszerű, gyakorlatias becslés és kerekítés elfogadható.

3. a)		
A teremben ülő lányok számát jelölje x, ekkor a fiúk száma $32 - x$ ($x \in \mathbf{N}$ és $x \geq 4$).	1 pont	*A teremben ülő fiúk száma y, a lányok száma* $32 - y$ ($y \in \mathbf{N}$ és $y \leq 28$).
Ha 4 lány távozik, akkor a jelenlévők száma 28 lesz, a fiúk száma pedig változatlan marad: $32 - x > 0{,}6 \cdot 28$ $(= 16{,}8)$, amiből $x < 15{,}2$.	1 pont	$y > 0{,}6 \cdot 28$ $(= 16{,}8)$, *amiből* $y > 16{,}8$
Ha 6 lány csatlakozik a 32 főhöz, akkor a jelenlévők száma 38 lesz, a lányok száma pedig $x + 6$: $x + 6 > 0{,}5 \cdot 38$ $(= 19)$, innen $x > 13$.	1 pont	$38 - y > 0{,}5 \cdot 38$ $(= 19)$, *innen* $y < 19$
Tehát $13 < x < 15{,}2$, így a lányok száma 14 vagy 15 lehet, a fiúk száma pedig rendre 18 vagy 17.	2 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján. (Például: A 4 lány távozása után a teremben maradó 28 fő 60%-ánál (16,8-nél) a 18 és a 17 is több. A 6 lány érkezése után a teremben jelen lévő 38 fő felénél (19-nél) a 20 (= 14 + 6) és a 21 (= 15 + 6) is több.)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. b)		
(Binomiális eloszlást alkalmazunk.) Annak a valószínűségét kell kiszámítani, hogy a hallgatók közül véletlenszerűen kiválasztott 4 fő között 3 vagy 4 fiú van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$P(3 \text{ fiú}) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4$ $(= 0{,}3456)$	1 pont	
$P(4 \text{ fiú}) = 0{,}6^4$ $(= 0{,}1296)$	1 pont	
A kérdezett valószínűség az előző két érték összege, tehát körülbelül 0,475.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy saját maga által kitalált, de a feladat szövegének megfelelő létszámot feltételezve hipergeometrikus eloszlással számol, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

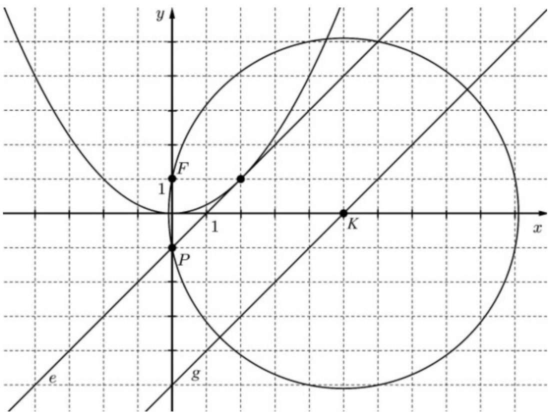
3. c)		
(Binomiális eloszlás segítségével adunk becslést.) Ha a lányok p-ed része sportol rendszeresen ($0 \leq p \leq 1$), akkor éppen p annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lány sportol.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezért $p^3 = 0{,}008$,	1 pont	
amiből $p = \sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$, vagyis a lányok egyötöd része sportol rendszeresen.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. a)		
A parabola $y=\frac{x^2}{4}$ alakú egyenletéből adódik, hogy paramétere $p = 2$.	1 pont	
Mivel a parabola tengelypontja az origó, $\frac{p}{2}=1$ (és a parabola „fölfelé nyitott”), ezért a fókuszpont valóban $F(0; 1)$.	2 pont	*Ez a 2 pont jár egy megfelelő ábráért is.*
Összesen:	**3 pont**	

4. b)		
A PF szakasz felezőmerőlegese metszi ki a g egyenesből a kör középpontját.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A felezőmerőleges az x tengely,	1 pont	
tehát a kör középpontja a $K(5; 0)$ pont.	1 pont	
A kör sugara ($\sqrt{5^2+1^2}=$) $\sqrt{26}$.	1 pont	
A kör egyenlete $(x-5)^2+y^2=26$.	1 pont	$x^2+y^2-10x-1=0$
Összesen:	**5 pont**	

4. c) első megoldás		
Az e érintő egyenlete írható $x - y = c$ alakban is.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az e pontosan akkor érinti a megadott parabolát, ha az alábbi egyenletrendszernek egy megoldása van: $\left.\begin{array}{r} x^2-4y=0 \\ x-y=c \end{array}\right\}$	1 pont	
A második egyenletből $y = x - c$, amit az első egyenletbe helyettesítve: $x^2-4x+4c=0$.	1 pont	
(Egy megoldás van, ha a diszkrimináns 0:) $16 - 16c = 0$, amiből $c = 1$.	1 pont	
Az érintő egyenlete: $x - y = 1$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. c) második megoldás		
A g egyenes és az érintő meredeksége azonos: 1.	1 pont	
(Az $y=\frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabola az $x\mapsto\frac{1}{4}x^2$ másodfokú függvény grafikonja.) Az $x\mapsto\frac{1}{4}x^2$ függvény deriváltja: $x\mapsto\frac{1}{2}x$.	1 pont	
(Az első derivált megadja az adott pontban az érintő meredekségét, így) $\frac{1}{2}x=1$.	1 pont	
Ebből $x = 2$, azaz az érintési pont koordinátái: (2; 1).	1 pont	
Az érintő egyenlete: $y - 1 = x - 2$.	1 pont	$x - y = 1$ vagy $y = x - 1$
Összesen:	**5 pont**	



II.

5. a)		
A szükséges évek számát jelölje n: $5\cdot 0{,}88^n<1{,}5$, azaz $0{,}88^n<0{,}3$, ahol n pozitív egész szám.	2 pont	
A 0,88 alapú exponenciális függvény (a 0,88 alapú logaritmusfüggvény) szigorúan monoton csökken, ezért	1 pont	*Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve (és felhasználva, hogy a 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő):* $\lg 0{,}88^n<\lg 0{,}3$, $n\cdot\lg 0{,}88<\lg 0{,}3$.
$n>\log_{0{,}88}0{,}3\approx 9{,}42$.	1 pont	*A* lg 0,88 *negatív, ezért* $n>\frac{\lg 0{,}3}{\lg 0{,}88}\approx 9{,}42$.
tehát 10 teljes év után lesz az autó értéke kisebb 1,5 millió forintnál.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó évről évre kiszámítja az autó aktuális értékét (és ezt dokumentálja), vagy egyenlőtlenség helyett egyenlettel dolgozik, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

5. b)		
Ha az autó értéke havonta az előző havi értékének q-szorosára változik, akkor a 12. hónap végére az értéke a kezdetinek q^{12}-szerese lesz ($0 < q < 1$).	1 pont	
$q^{12} = (1 - 0{,}12 =)\ 0{,}88$	1 pont	
$q = \sqrt[12]{0{,}88} \approx 0{,}9894$ (ami 98,94%-ot jelent).	1 pont	
Havonta valóban kb. (100 – 98,94 =) 1,06%-kal csökken az autó értéke.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó azt mutatja meg, hogy a havi 1,06%*-os amortizáció évi* 12,0%*-os amortizációnak felel meg, akkor ezért 3 pontot kapjon.*

5. c)		
Az első módszer szerint az amortizációt 101 – 12 = 89 hónapra számolják.	1 pont	
Az autó értéke az eredetinek $0{,}9894^{89}$-szeresére,	1 pont	
azaz kb. a 0,3873-szeresére változik ennyi idő alatt.	1 pont	*kb.* 1 937 000 *Ft a vételár*
A második számítási módszer az autó életkorát $\frac{91\,250}{15\,000} = \frac{73}{12}$ évnek, azaz 73 hónapnak veszi.	1 pont	
Az autó értéke az eredetinek $0{,}988^{73}$-szorosára,	1 pont	
azaz kb. 0,4142-szeresére változik ennyi idő alatt.	1 pont	*kb.* 2 071 000 *Ft a vételár*
A II. számítási módszer szerinti vételár kedvezőbb Kovács úr számára.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

6. a)		
Egy megfelelő dobássorozat megadása.	2 pont	
A módusz, a medián és az átlag meghatározása.	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, egynél több hiba esetén 0 pont jár.*
Annak megállapítása, hogy az egyetlen módusz, a medián és az átlag – ebben a sorrendben – valóban egy növekvő számtani sorozat három szomszédos tagja.	1 pont	
A szórás meghatározása.	2 pont	
Annak megállapítása, hogy a megadott hat szám szórása nem tagja a számtani sorozatnak.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: A megfelelő dobássorozatokat az alábbi táblázat tartalmazza (a hat dobás sorrendje tetszőleges).

A dobások	Módusz	Medián	Átlag	*d*	Szórás
1, 1, 1, 2, 2, 5	1	1,5	2	0,5	$\sqrt{2}$ (≈ 1,41)
1, 1, 1, 2, 3, 4	1	1,5	2	0,5	$\sqrt{\frac{4}{3}}$ (≈ 1,15)
1, 1, 1, 3, 6, 6	1	2	3	1	$\sqrt{5}$ (≈ 2,24)
1, 2, 2, 3, 4, 6	2	2,5	3	0,5	$\sqrt{\frac{8}{3}}$ (≈ 1,63)
2, 2, 2, 3, 3, 6	2	2,5	3	0,5	$\sqrt{2}$ (≈ 1,41)
2, 2, 2, 3, 4, 5	2	2,5	3	0,5	$\sqrt{\frac{4}{3}}$ (≈ 1,15)
3, 3, 3, 4, 5, 6	3	3,5	4	0,5	$\sqrt{\frac{4}{3}}$ (≈ 1,15)

6. b) első megoldás

(A második dobás eredménye szerint számoljuk össze a kedvező eseteket.) Ha a második dobás 1 vagy 6, akkor a másik két dobás is csak 1, illetve 6 lehetett. Ez 2 lehetőség.	1 pont	
Ha a második dobás 2, akkor a másik két dobás vagy 1 és 3 (ez 2 lehetőséget jelent), vagy 2 és 2 lehetett. Ez összesen 3 lehetőség.	1 pont	
Ha a második dobás 3, akkor a másik két dobás vagy 1 és 5, vagy 2 és 4, vagy 3 és 3 lehetett. Ez 5 lehetőség.	1 pont	
Ha a második dobás 4, akkor a másik két dobás vagy 2 és 6, vagy 3 és 5, vagy 4 és 4 lehetett. Ez 5 lehetőség.	1 pont	
Ha a második dobás 5, akkor a másik két dobás vagy 4 és 6, vagy 5 és 5 lehetett. Ez 3 lehetőség.	1 pont	
A kedvező esetek száma összesen (2 + 3 + 5 + 5 + 3 =) 18.	1 pont	
Három kockával összesen (6^3 =) 216-félét dobhatunk (összes eset száma).	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát $\left(\frac{18}{216}=\right)\frac{1}{12}\approx 0{,}083$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. b) második megoldás

Ha a második dobás a másik két dobás átlaga, akkor a három dobás egy számtani sorozat három szomszédos tagja, melyek közül a második dobás a középső tag.	1 pont	

A sorozat d differenciája szerint számoljuk össze a kedvező eseteket: $d = 0$, $d = 1$, $d = -1$, $d = 2$, $d = -2$ lehetséges.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$d = 0$ hat esetben lehetséges (három egyforma dobás).	1 pont	
$d = 1$ vagy $d = -1$ négy-négy esetben lehetséges (1-2-3; 2-3-4; 3-4-5; 4-5-6 és ezek fordított sorrendben).	1 pont	
$d = 2$ vagy $d = -2$ két-két esetben lehetséges (1-3-5; 2-4-6 és ezek fordított sorrendben).	1 pont	
A kedvező esetek száma összesen $(6 + 4 + 4 + 2 + 2 =)$ 18.	1 pont	
Három kockával összesen $(6^3 =)$ 216-félét dobhatunk (összes eset száma).	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát $\left(\frac{18}{216} =\right)\frac{1}{12} \approx 0{,}083$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

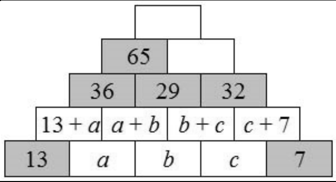
6. b) harmadik megoldás		
Ha az első és a harmadik dobás átlaga egész szám, akkor az első és harmadik dobás összege páros szám.	1 pont	
Minden ilyen esetben éppen egyetlen megfelelő értéket dobhatunk másodikként (az átlagukat). Ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$.	2 pont	
Meg kell határozni tehát annak a valószínűségét, hogy az első és a harmadik dobás összege páros.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Akár páratlan, akár páros az első dobás, a harmadik ezt éppen $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fogja páros összegre kiegészíteni.	2 pont	*Az összeg akkor páros, ha vagy mindkét érték páros, vagy mindkettő páratlan. Ennek a valószínűsége* $2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.
(Mivel a két esemény – az 1. és a 3. dobás összege páros, illetve a 2. dobás ennek a páros számnak a fele – egymástól független) a kérdezett valószínűség a két esemény valószínűségének szorzata, tehát $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\right)\frac{1}{12}$.	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	

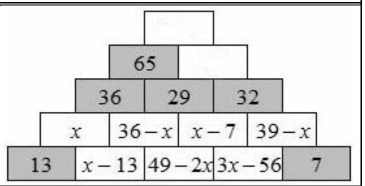
7. a)		
A forgáskúp és a henger térfogatának aránya $1:3$, ezért a forgács térfogata a henger térfogatának a (kétharmad része, azaz kb.) 67%-a.	2 pont	

(cm-ben és cm^2-ben számolunk) A henger felszíne $A = 2r^2\pi + 2r\pi m$, innen $10\,000 = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot 30$.	1 pont	
$\pi r^2 + 30\pi r - 5000 = 0$	1 pont	$r^2 + 30r - \frac{5000}{\pi} = 0$
$r_1 \approx 27{,}62$, $r_2\ (\approx -57{,}62) < 0$	1 pont	
(A negatív gyök nem megoldás, így) a henger alapkörének sugara kb. 27,62 (cm).	1 pont	
A kúp térfogata kb. $\left(\frac{30 \cdot 27{,}62^2\pi}{3} \approx\right)$ 23 970 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. b)		
(cm-ben és cm^2-ben számolunk) A henger felszíne $10\,000 = 2r^2\pi + 2r\pi m$, innen a henger magassága $m = \frac{10\,000 - 2r^2\pi}{2r\pi} = \frac{5000 - r^2\pi}{r\pi}$,	2 pont	
térfogata $V = r^2\pi m$, tehát $V(r) = 5000r - r^3\pi$ $\left(\text{ahol } 0 < r < \sqrt{\frac{5000}{\pi}}\right)$.	2 pont	
$V'(r) = 5000 - 3r^2\pi$	1 pont	
A térfogat akkor lehet maximális, ha $V'(r) = 0$, azaz $5000 - 3r^2\pi = 0$,	1 pont	
innen ($r > 0$ miatt) $r = \sqrt{\frac{5000}{3\pi}} \approx 23{,}03$ cm (és ez az értelmezési tartományban van).	1 pont	
Ezen a helyen $V''(r) = -6r\pi$ negatív, ezért valóban (abszolút) maximumhelyet kaptunk.	1 pont	*Az $r = \sqrt{\frac{5000}{3\pi}}$ helyen a deriváltfüggvény pozitívból negatívba megy át, ezért az eredeti függvénynek itt (abszolút) maximuma van.*
Ekkor $m = \frac{5000 - r^2\pi}{r\pi} \approx 46{,}07$ cm.	1 pont	($m = 2r$)
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzések: 1. Ha a vizsgázó pontosan hivatkozik arra, hogy az adott felszínű zárt forgáshengerek közül a maximális térfogatú henger tengelymetszete négyzet, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.
2. Ha a vizsgázó valamelyik válaszát mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

8. a) **első megoldás**		
Az alulról második sorba rendre $13 + a$, $a + b$, $b + c$ és $c + 7$ kerül.	1 pont	
Így felírható a következő egyenletrendszer: $\left.\begin{aligned}(13+a)+(a+b)&=36\\(a+b)+(b+c)&=29\\(b+c)+(c+7)&=32\end{aligned}\right\}$	2 pont	$\left.\begin{aligned}2a+b&=23\\a+2b+c&=29\\b+2c&=25\end{aligned}\right\}$
Az első egyenletből kifejezzük a-t, a harmadik egyenletből c-t: $a=11{,}5-\frac{b}{2}$ és $c=12{,}5-\frac{b}{2}$.	2 pont	*Az első egyenletből* $b = 23 - 2a$, *amit a második egyenletbe írva:* $c = 3a - 17$.
Ezeket beírva a második egyenletbe: $\left(11{,}5-\frac{b}{2}\right)+2b+\left(12{,}5-\frac{b}{2}\right)=29$,	1 pont	*Ezeket beírva a harmadik egyenletbe:* $(23 - 2a) + 2(3a - 17) = 25$.
ahonnan $b = 5$,	1 pont	$a = 9$
majd $a = \left(11{,}5-\frac{5}{2}=\right)9$ és $c = \left(12{,}5-\frac{5}{2}=\right)10$.	1 pont	$b = (23 - 18 =)\ 5$ *és* $c = (27 - 17 =)\ 10$
Ellenőrzés a szöveg alapján (pl. a számpiramis alsó két sorának helyes kitöltése pozitív egész számokkal).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

8. a) **második megoldás**		
Az alulról második sor első mezőjébe írt számot jelölje x. Ekkor a sor további számai: $36 - x$; $29 - (36 - x) = x - 7$; $32 - (x - 7) = 39 - x$. (Két szomszédos szám összege egyenlő a felettük levővel.)	2 pont	
Hasonlóan járunk el az alsó sor mezőivel: $a = x - 13$; $b = (36 - x) - (x - 13) = 49 - 2x$; $c = (x - 7) - (49 - 2x) = 3x - 56$;	2 pont	
$(3x - 56) + 7 = 39 - x$,	1 pont	
ahonnan $x = 22$.	1 pont	
Az x értékét rendre visszahelyettesítve kapjuk a megoldást: $(a; b; c) = (9; 5; 10)$.	2 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján (pl. a számpiramis alsó két sorának helyes kitöltése pozitív egész számokkal).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó (például próbálgatással) megadja a számpiramis helyes kitöltését, de nem igazolja, hogy más helyes kitöltés nincs, akkor ezért 3 pontot kapjon.
2. A teljes kitöltött számpiramis a következő:

126
65 | 61
36 | 29 | 32
22 | 14 | 15 | 17
13 | 9 | 5 | 10 | 7

8. b) **első megoldás**		
Tolna, Fejér és Somogy színe biztosan különböző, tegyük fel, hogy pl. Tolna piros, Fejér sárga és Somogy kék.	2 pont	
Ekkor Bács-Kiskun csak kék vagy zöld, Baranya pedig csak sárga vagy zöld lehet, de azonos színűek nem lehetnek.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Tehát (ebben a sorrendben) Bács-Kiskun és Baranya színezésére a következő 3 lehetőség van: kék-sárga, kék-zöld, zöld-sárga.	1 pont	
Tolna, Fejér és Somogy színe $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ -féleképpen választható meg.	1 pont	
Mivel mindegyik választáshoz Bács-Kiskun és Baranya 3 helyes színezése tartozik,	1 pont	
így összesen $(24 \cdot 3 =) 72$ különböző helyes színezése van az ábrának.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

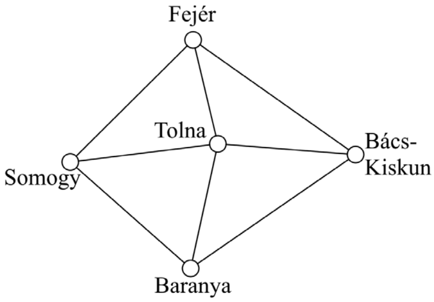
<table>
<tr><td colspan="3">8. b) második megoldás</td></tr>
<tr><td>Tegyük fel, hogy Tolna piros, Fejér pedig sárga.
(A többi megye színezésére a sárga, kék, zöld színek használhatók az előírások figyelembevételével.)</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Ekkor összesen 6 megfelelő színezés van az alábbi táblázat 6 oszlopa szerint:
<table>
<tr><td>megye</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Tolna</td><td>p</td><td>p</td><td>p</td><td>p</td><td>p</td><td>p</td></tr>
<tr><td>Fejér</td><td>s</td><td>s</td><td>s</td><td>s</td><td>s</td><td>s</td></tr>
<tr><td>Somogy</td><td>k</td><td>k</td><td>k</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td></tr>
<tr><td>Baranya</td><td>s</td><td>s</td><td>z</td><td>s</td><td>s</td><td>k</td></tr>
<tr><td>Bács-Kiskun</td><td>k</td><td>z</td><td>k</td><td>z</td><td>k</td><td>z</td></tr>
</table>
</td><td>3 pont*</td><td></td></tr>
<tr><td>Tolna és Fejér színét $4 \cdot 3 = 12$-féleképpen választhatjuk meg.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Mivel mindegyik választáshoz Somogy, Bács-Kiskun és Baranya összesen 6 helyes színezése tartozik,</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>ezért a lehetséges színezések száma $12 \cdot 6 = 72$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>7 pont</td><td></td></tr>
</table>

Megjegyzés: *A *-gal jelölt 3 pontból minden hibás, hiányzó vagy dupla oszlopért 1 pontot (de összesen legfeljebb 3 pontot) veszítsen a vizsgázó.*

8. b) **harmadik megoldás**		
Először Tolna, Fejér és Somogy megyéket színezzük ki (ebben a sorrendben): Tolna színe 4-, Fejéré 3-, Somogyé 2-féle lehet,	1 pont	
ez eddig $4\cdot 3\cdot 2$ (= 24) lehetőség.	1 pont	
Esetszétválasztást végzünk Bács-Kiskun színe alapján.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha Bács-Kiskun és Somogy színe megegyezik, akkor Baranya színe 2-féle lehet. (Nem lehet Tolna és Somogy színével egyező.)	1 pont	
Ha Bács-Kiskun és Somogy színe különbözik, akkor Bács-Kiskun színe egyféle lehet (Tolna, Fejér és Somogy színétől is különböző), és Baranya színe szintén egyféle (a három szomszédjától különböző).	1 pont	
Az első esetben $24\cdot 2$, a második esetben $24\cdot 1$ színezést kaptunk,	1 pont	
így az összes lehetőség száma $(24\cdot 2+24\cdot 1=)\ 72$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. b) **negyedik megoldás**		
A ténylegesen felhasznált színek száma szerint választjuk szét a lehetőségeket. Mivel (például) Tolna, Somogy és Baranya színe mindenképp különböző, ezért két szín nem elég a helyes színezéshez.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha három színt használunk, akkor a középső megye (Tolna) színét 4-féleképpen választhatjuk ki, Somogy és Bács-Kiskun (azonos) színe 3-féle, Fejér és Baranya (azonos) színe 2-féle lehet. Ez $4\cdot 3\cdot 2$ (= 24) lehetőség.	2 pont	*Tolna, Somogy és Baranya színe $4\cdot 3\cdot 2$-féle lehet, Fejér és Bács-Kiskun színe pedig csak egyféle (a „szemköztes” megyével azonos színű). Ez 24 lehetőség.*
Ha négy színt használunk, akkor a középső megye (Tolna) színét 4-féleképpen választhatjuk ki. 3-féleképpen választhatjuk ki azt a színt, amellyel két („szemköztes”) megyét is színezünk, és 2-féleképpen választhatjuk ki azt, hogy ezzel melyik megyéket színezzük (Fejért és Baranyát, vagy Somogyot és Bács-Kiskunt). A megmaradt két megyét a megmaradt két színnel 2-féleképpen színezhetjük ki. Ez $4\cdot 3\cdot 2\cdot 2$ (= 48) lehetőség.	3 pont	
Így az összes lehetőség száma (24 + 48 =) 72.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: A térképszínezés gráfelméleti feladatnak is tekinthető. Ekkor az egyes megyéket egy gráf pontjainak tekintjük, és a közös határszakasszal rendelkező megyéknek megfelelő pontokat kötjük össze egy-egy éllel. Helyes színezés esetén tehát a gráfban bármelyik él két végpontja különböző színű.



9. a)		
$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=\frac{n+2}{n(n+2)}-\frac{n}{n(n+2)}=$	1 pont	
$=\frac{2}{n^2+2n}=$	1 pont	
$=\frac{2}{(n+1)^2-1}$ (tehát az állítás igaz).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. b) első megoldás		
$\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{3^2-1}+\frac{2}{4^2-1}+\frac{2}{5^2-1}=$	1 pont	
$=\frac{2}{3}+\frac{2}{8}+\frac{2}{15}+\frac{2}{24}=\frac{80+30+16+10}{120}=\frac{136}{120}=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
$=\frac{17}{15}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. b) második megoldás		
Az a) feladat alapján írjuk fel a keresett összeget. $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=$	1 pont	
$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
$=\frac{30+15-6-5}{30}=\frac{17}{15}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. c)		
$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n =$ $= \frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + ... + \frac{2}{(n+1)^2-1}$	1 pont	
(Az a) feladat alapján:) $S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + ... +$ $+ \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$	2 pont	
Négy kivételével mindegyik tört pozitív és negatív előjellel is szerepel. Az ellentett törtek összege nulla, ezért az első kettő pozitív és az utolsó kettő negatív tört marad az összegben: $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.	2 pont	
Az összeg és különbség határértékére vonatkozó tétel,	1 pont*	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
valamint $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right) = 0$ miatt a keresett határérték:	2 pont*	
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right) - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$	1 pont*	
$= \frac{3}{2} - (0+0) = \frac{3}{2}$.	1 pont*	
Összesen:	**10 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

$S_n = \frac{3n^2+5n}{2n^2+6n+4} =$	1 pont	$S_n = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} =$
$= \frac{3+\frac{5}{n}}{2+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}$	1 pont	$= \frac{3}{2} - \frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, továbbá a szorzat, az összeg és a hányados határértékére vonatkozó tételek miatt	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
a keresett határérték: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3+0}{2+0+0} =$	1 pont	$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2} - \frac{0+0}{1+0+0} =$
$= \frac{3}{2}$.	1 pont	