ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. május 4.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

9 sor magassága $8\cdot 12\sqrt{3}+2\cdot 12\approx 190{,}3$ cm, tehát 9 sor még befér a raktérbe.	2 pont	
10 sor magassága $9\cdot 12\sqrt{3}+2\cdot 12\approx 211{,}1$ cm, tehát 10 sor már nem fér be a raktérbe.	2 pont	

9. b)		
A raktér térfogata: $V_{rt}=2{,}4\cdot 2\cdot 7=33{,}6\text{ m}^3$.	1 pont	
A 86 darab fa térfogata: $V_{fa}=0{,}12^2\cdot\pi\cdot 7\cdot 86\approx 27{,}2\text{ m}^3$.	1 pont	
$\frac{V_{fa}}{V_{rt}}\approx\frac{27{,}2}{33{,}6}\approx 0{,}81$ (azaz 81%)	1 pont	
Tehát a raktér térfogatának 19%-a lesz üres.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c)		
(0,96 a valószínűsége, hogy egy fában nincs szú.) P(0 darab szúrágta fa) $=0{,}96^{50}\approx 0{,}130$	1 pont	
P(1 darab szúrágta fa) $=\binom{50}{1}\cdot 0{,}96^{49}\cdot 0{,}04\approx 0{,}271$	2 pont	
A keresett valószínűség ezek összege: $0{,}130+0{,}271=0{,}401$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A négyzetgyök értelmezési tartománya és értékkészlete miatt $-1 \leq x \leq 3$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
Négyzetre emelve: $-2x + 6 = x^2 + 2x + 1$.	1 pont	
$x^2 + 4x - 5 = 0$	1 pont	
Az egyenlet gyökei –5 és 1.	1 pont	
Ellenőrzés: behelyettesítéssel vagy (a [–1; 3] halmazon) ekvivalens átalakításokra hivatkozással kapjuk, hogy az 1 megoldása, a –5 pedig nem megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. b) első megoldás		
Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
A logaritmus azonosságait alkalmazva: $4\log_4 x + 9\log_4 x = 4\log_4 x + 9\log_4 8$.	2 pont	
$9\log_4 x = 9\log_4 8$, azaz $\log_4 x = \log_4 8$, amiből a logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelműsége miatt $x = 8$.	2 pont	
Ellenőrzés: behelyettesítéssel vagy (az $x > 0$ halmazon) ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

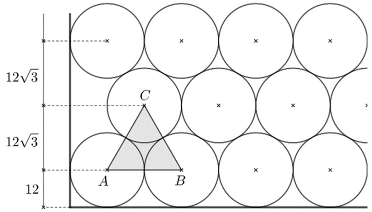
1. b) második megoldás		
Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
A logaritmus és a hatványozás azonosságait alkalmazva: $\log_4 x^4 + \log_4 x^9 = \log_4 x^4 + \log_4 8^9$.	2 pont	
$\log_4 x^9 = \log_4 8^9$ A logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelműsége miatt $x^9 = 8^9$, amiből (az $x \mapsto x^9$ függvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $x = 8$.	2 pont	
Ellenőrzés: behelyettesítéssel vagy (az $x > 0$ halmazon) ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

---

8. c)		
(Az 50 000 Ft nyeremény valószínűsége p, ekkor) $p + 24p = 0{,}05$,	1 pont	
ahonnan $p = 0{,}002$ és $24p = 0{,}048$.	1 pont	
A nyeremény várható értéke $(0{,}95 \cdot 0 +)\ 0{,}048 \cdot 2500 + 0{,}002 \cdot 50\,000 = 220$ Ft.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

nyeremény (Ft)	0	2500	50 000
valószínűsége	0,95	0,048	0,002

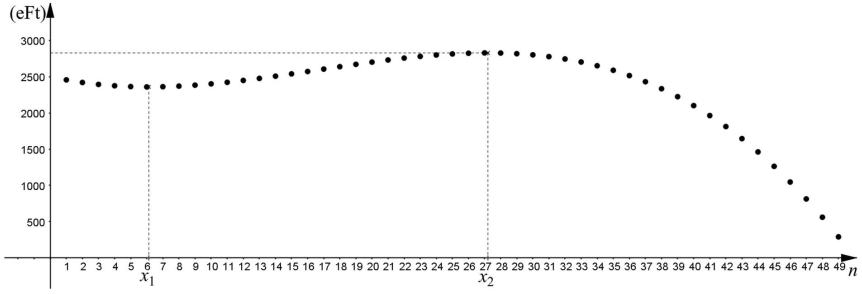
Megjegyzés: A táblázat helyes kitöltése indoklás nélkül is elfogadható.

9. a)		
A farönköket szemléltető egybevágó, 24 cm átmérőjű körökből (alulról kezdve a számozást) a páratlan sorszámú sorokban 10, a párosakban pedig 9 kör fér el a 240 cm-en.	1 pont	
 (A körközéppontok egy 24 cm rácsponttávolságú szabályos háromszögrács egy részletét határozzák meg.) Az ábra ABC szabályos háromszögének magassága $12\sqrt{3}$ ($\approx 20{,}78$) (cm). (A körök középpontja ennyivel lesz magasabban minden következő sorban az előző sorban elhelyezkedő körközéppontokhoz képest.)	2 pont	
Ha k db sort raktak a teherautóra, akkor a rakomány $(k-1)\cdot 12\sqrt{3} + 2\cdot 12$ cm magasságig tölti meg a rakteret.	1 pont*	
A rakomány nem nyúlhat túl a raktéren, ezért $(k-1)\cdot 12\sqrt{3} + 2\cdot 12 \leq 200$.	1 pont*	
$k \leq \dfrac{176}{12\sqrt{3}} + 1 \approx 9{,}47$	1 pont*	
Legfeljebb 9 sorban rakhattak fákat a raktérbe.	1 pont*	
5 sorban $5 \cdot 10 = 50$ db, 4 sorban $4 \cdot 9 = 36$ db farönk, összesen tehát legfeljebb 50 + 36 = 86 farönk lehet a raktérben. (Ezt kellett igazolni.)	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

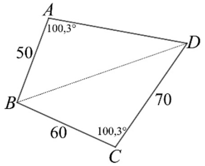
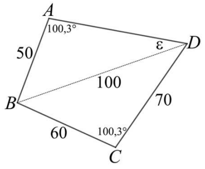
8. a)		
A sorsjegy árát 200 (= $20 \cdot 10$) Ft-tal csökkentették, tehát $n = 20$.	1 pont	
Ekkor az eladott sorsjegyek száma $10n^2 = 4000$-rel több, azaz 5000 + 4000 = 9000 db,	1 pont	
a havi bevétel pedig $9000 \cdot 300 = 2\,700\,000$ Ft.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b)		
Tegyük fel, hogy *n*-szer csökkentették 10 Ft-tal az árat, ekkor az új ár $500 – 10n$ (Ft) (ahol $n < 50$),	1 pont	
és a havi eladott darabszám $5000 + 10n^2$.	1 pont	
Az eladásból származó bevétel Ft-ban: $(500 – 10n)(5000 + 10n^2) =$ $= -100n^3 + 5000n^2 - 50\,000n + 2\,500\,000$.	1 pont	
Tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -100x^3 + 5000x^2 - 50\,000x + 2\,500\,000$ függvényt.	1 pont	
Ennek deriváltfüggvénye $f'(x) = -300x^2 + 10\,000x - 50\,000$ $(x \in \mathbf{R})$,	1 pont	
melynek zérushelyei $x_1 \approx 6{,}13$ és $x_2 \approx 27{,}21$.	1 pont	
A deriváltfüggvény pontosan a két gyök között pozitív, és x_2-ben pozitívból negatívba vált, ezért x_2 az *f* maximumhelye (x_1-ben negatívból pozitívba vált a deriváltfüggvény).	1 pont	$f''(x_1) > 0$ *és* $f''(x_2) < 0$, *ezért f-nek* x_2 *a maximumhelye.*
(*n* értéke csak egész lehet:) $f(27) = 2\,826\,700 > f(28) = 2\,824\,800$, ezért (a modell szerint) 27-szer 10 Ft-tal (230 Ft-ra) kell csökkenteni a sorsjegy árát ahhoz, hogy az értékesítésből származó havi bevétel maximális legyen.	2 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Az alábbi grafikon a havi bevételt (1000 Ft-ban megadva) szemlélteti az árcsökkentés függvényében.



---

2. a)		
 Az adatokat helyesen feltüntető ábra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
A *BCD* háromszög területe $\frac{BC \cdot CD \cdot \sin 100{,}3°}{2} = \frac{60 \cdot 70 \cdot \sin 100{,}3°}{2} \approx 2066$ (m²).	1 pont	
A *BCD* háromszögben koszinusztétellel: $BD^2 = 60^2 + 70^2 - 2 \cdot 60 \cdot 70 \cdot \cos 100{,}3°$.	1 pont	
Ebből $BD \approx 100$ (m).	1 pont	
 Az *ABD* háromszögben szinusztétellel (az ábra szerint): $\frac{\sin \varepsilon}{\sin 100{,}3°} = \frac{50}{100}$.	1 pont*	
$\sin \varepsilon \approx 0{,}4919$, (mivel ε hegyesszög, ezért) $\varepsilon \approx 29{,}5°$.	1 pont*	
$ABD\sphericalangle = (180° – 100{,}3° – 29{,}5° =)\ 50{,}2°$,	1 pont*	
ezért az *ABD* háromszög területe $\frac{AB \cdot BD \cdot \sin 50{,}2°}{2} = \frac{50 \cdot 100 \cdot \sin 50{,}2°}{2} \approx 1921$ (m²).	1 pont*	
A négyszög területe 2066 + 1921 = 3987 m².	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Legyen $AD = x$ (méter). Az *ABD* háromszögben koszinusztétellel: $50^2 + x^2 - 2 \cdot 50 \cdot x \cdot \cos 100{,}3° = 100^2$.	1 pont	
Rendezve: $x^2 + 17{,}88x - 7500 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet pozitív gyöke (egy tizedesjegyre kerekítve) 78,1 (a negatív gyök –96,0).	1 pont	
Ezért az *ABD* háromszög területe $\frac{AB \cdot AD \cdot \sin 100{,}3°}{2} = \frac{50 \cdot 78{,}1 \cdot \sin 100{,}3°}{2} \approx 1921$ (m²).	1 pont	

2. b) első megoldás

A felhasznált 3 színt $\binom{4}{3} = 4$-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Mivel négy háromszög van, és csak 3 szín, ezért két háromszögnek azonos színűnek kell lennie. Ezek csak szemköztiek lehetnek.	1 pont	
A két azonos színű szemközti háromszöget 2-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Az azonos színű háromszögek színét 3-féleképpen választhatjuk meg,	1 pont	
a maradék két háromszöget pedig 2-féleképpen színezhetjük (a maradék két színnel).	1 pont	
A lehetséges színezések száma ezért $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b) második megoldás

Mivel négy háromszög van, és csak 3 szín, ezért az egyik színt kétszer is fel kell használnunk.	1 pont	
Ezt a színt 4-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Ezzel a színnel két szemközti háromszöget kell kiszíneznünk, ezeket 2-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
A maradék két háromszög a maradék 3 szín közül kettővel $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen színezhető ki.	2 pont	
A lehetséges színezések száma ezért $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b) harmadik megoldás

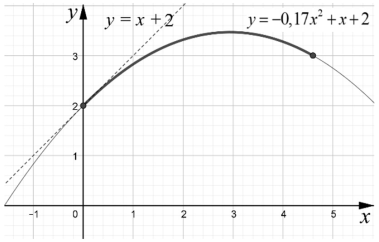
Az *AB* oldalra illeszkedő háromszög színe 4, a *BC* oldalra illeszkedő háromszög színe ezek után 3-féle lehet.	1 pont	
Ez a két háromszög tehát $4 \cdot 3 = 12$-féleképpen színezhető ki.	1 pont	
Tegyük fel, hogy az *AB* oldalra illeszkedő háromszöget pirosra, a *BC*-re illeszkedőt pedig kékre színeztük. Vagy a piros vagy a kék színt még egyszer használnunk kell.	1 pont*	
Vagy a *CD* oldalra illeszkedő háromszög piros, vagy a *DA* oldalra illeszkedő háromszög kék. A negyedik háromszög mindkét esetben sárga vagy zöld lehet. Az első két háromszög bármely színezéséhez tehát 4-féleképpen színezhetjük az utolsó két háromszöget,	2 pont*	
így a lehetséges színezések száma $12 \cdot 4 = 48$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

---

7. b)

A parabola az $f\colon x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek a grafikonja ($a \neq 0$, b, $c \in \mathbf{R}$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A szöveg alapján $f(0) = 2$, tehát $c = 2$.	1 pont	
$f'(0) = m = \text{tg}45° = 1$.	1 pont	
Mivel $f'(x) = 2ax + b$,	1 pont	
ezért $f'(0) = b = 1$.	1 pont	
$f(4{,}6) = a \cdot 4{,}6^2 + b \cdot 4{,}6 + c = 3$,	1 pont	
$21{,}16a = -3{,}6$, ebből $a \approx -0{,}17$.	1 pont	$a = -\dfrac{90}{529}$
A keresett parabola egyenlete $y = -0{,}17x^2 + x + 2$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

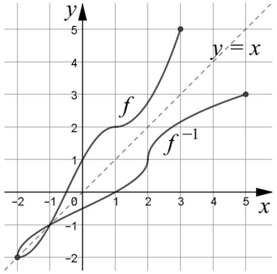
A kosárlabda röppályájának íve a parabolán:



7. c)

Az inverzfüggvény értelmezési tartománya [–2; 5],	1 pont	
értékkészlete [–2; 3],	1 pont	
zérushelye 1,	1 pont	
szigorúan monoton növekedő.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Közös koordináta-rendszerben ábrázolva f-et és az inverzfüggvényét:



6. c) első megoldás		
Azon csoportok száma, amelyben *A* benne van, de *B* nincs: $\binom{4}{2}=6$. (A maradék 4 személyből 2 kerül *A* mellé.)	1 pont	
Hasonlóan $\binom{4}{2}=6$ azon csoportok száma, amelyben *B* benne van, de *A* nincs (szimmetria).	1 pont	
Azon csoportok száma, amelyben sem *A*, sem *B* nincs benne: $\binom{4}{3}=4$.	1 pont	
A megfelelő csoportok száma 6 + 6 + 4 = 16, ennyi kihallgatást kell szervezni.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. c) második megoldás		
A komplementer összeszámolás módszerét alkalmazzuk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 3 fős csoportok száma $\binom{6}{3}=20$ (összes eset).	1 pont	
$\binom{4}{1}=4$ olyan csoport van, melynek *A* és *B* is a tagja (kedvezőtlen esetek). (A maradék 4 személyből 1 kerül *A* és *B* mellé.)	1 pont	
A megfelelő csoportok száma 20 – 4 = 16, ennyi kihallgatást kell szervezni.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a)		
A nyolc szám átlaga (48 : 8 =) 6.	1 pont	
(A nagyság szerint rendezett adatok: 3, 4, 6, 6, 7, 7, 7, 8, ezért) a medián 6,5.	1 pont	
A szórás: $\sqrt{\frac{(-3)^2+(-2)^2+3\cdot 1^2+2^2}{8}}=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a szórást számológéppel helyesen határozza meg.*
$\left(=\sqrt{\frac{20}{8}}\right)\approx 1{,}58$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

---

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Tegyük fel, hogy az *AB* oldalra illeszkedő háromszöget pirosra, a *BC*-re illeszkedőt pedig kékre színeztük. Ha a *CD* oldalra illeszkedő háromszög is piros, akkor 2-féleképpen fejezhető be a színezés (sárga vagy zöld színnel).	1 pont	
Ha a *CD* oldalra illeszkedő háromszög nem piros, akkor 2-féle lehet (sárga vagy zöld). Mindkét esetben a *DA*-ra illeszkedő háromszög csak kék lehet.	2 pont	

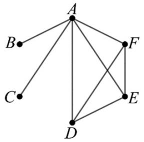
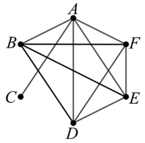
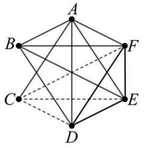
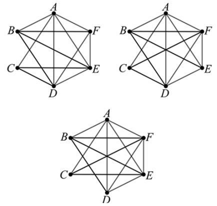
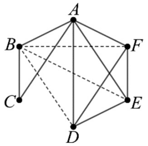
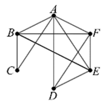
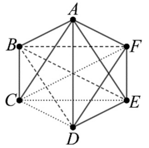
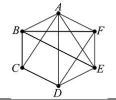
3. a) első megoldás		
Tegyük fel, hogy *x* db 6600 Ft-os, és *y* db 4800 Ft-os részvényünk van. $\left.\begin{array}{r}6600x+4800y=131\,400\\ 6600\left(x+\frac{y}{3}\right)+4800\cdot\frac{2}{3}y=140\,400\end{array}\right\}$	2 pont	
A második egyenletből az elsőt kivonva: 2200*y* – 1600*y* = 9000,	1 pont	
ahonnan *y* = 15,	1 pont	
majd visszahelyettesítve *x* = 9. (Tehát 9 db 6600 Ft-os, és 15 db 4800 Ft-os részvényünk van.)	1 pont	
Ellenőrzés: 6600 · 9 + 4800 · 15 = 131 400. A 15 db 4800 Ft-os részvény harmadát, 5 db-ot cserélnénk 6600 Ft-osra. Így lenne 10 db 4800 Ft-os és 14 db 6600 Ft-os. Ezek összértéke 4800 · 10 + 6600 · 14 = 140 400 valóban.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. a) második megoldás		
A cserével a részvénycsomag értéke (140 400 – 131 400 =) 9000 Ft-tal nőne.	1 pont	
A kétfajta részvény névértéke közötti különbség 1800 Ft, tehát (9000 : 1800 =) 5 db 4800 Ft-os részvényt cserélnénk 6600 Ft-osra.	2 pont	
Ez az összes 4800 Ft-os részvény harmada, tehát (5 · 3 =) 15 db 4800 Ft-os részvényünk,	1 pont	
és (131 400 – 15 · 4800) : 6600 = 9 db 6600 Ft-os részvényünk van.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. b)		
(Jelölje n a keresett hónap sorszámát.) $450\,000\cdot 1{,}013^n > 500\,000\cdot 1{,}01^n$	2 pont	
$\left(\frac{1{,}013}{1{,}01}\right)^n > \frac{50}{45} = \frac{10}{9}$	1 pont	
A tízes alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekedő,	1 pont	*Az* 1*-nél nagyobb alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért*
ezért $n\lg\frac{1{,}013}{1{,}01} > \lg\frac{10}{9}$, (közelítő értékekkel) $n\lg 1{,}003 > \lg 1{,}111$.	1 pont	$n > \log_{\frac{1{,}013}{1{,}01}}\left(\frac{10}{9}\right)$.
(Az egyenlőtlenséget pozitív számmal osztjuk:) $n > \frac{\lg 1{,}111}{\lg 1{,}003} \approx 35{,}1$.	1 pont	$\log_{\frac{1{,}013}{1{,}01}}\left(\frac{10}{9}\right) \approx 35{,}5$
Tehát a 36. hónap végén lesz először több pénz a második befektetésben.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel dolgozik, akkor n ≈ 35,1 megállapításáért legfeljebb 5 pontot kaphat. További 1-1 pont a helyes válaszért, és az egyenlőtlenség irányának megfelelő indoklásáért jár.

---

6. b)		
Az ismeretségi gráfban A ötödfokú pont, ezért minden más ponttal össze van kötve, továbbá a D, E, F pontok mindegyike össze van kötve a másik kettővel.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha a fentieknek megfelelő éleket berajzoljuk, akkor a B-ből még további 3, C-ből még további 2 élt kell meghúznunk. 	1 pont	
Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy a BC él benne van-e a gráfban, vagy sem.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
I. eset: Ha a BC él nincs benne a gráfban, akkor a negyedfokú B pont össze van kötve a D, E, F pontok mindegyikével. Ez csak egyféleképpen lehetséges. 	1 pont	
A harmadfokú C-ből kiinduló maradék 2 élt ekkor 3-féleképpen húzhatjuk be (C-t összekötjük a D, E, F pontok közül valamelyik kettővel). Az I. esetben tehát 3 lehetőség van összesen. 	1 pont	
II. eset: Ha a BC él benne van a gráfban, akkor a B-ből kiinduló maradék 2 élt 3-féleképpen húzhatjuk be (B-t összekötjük a D, E, F pontok közül valamelyik kettővel). 	1 pont	*Például:* 
Szintén 3-féleképpen húzható be a C-ből induló harmadik él (C-t összekötjük a D, E, F pontok valamelyikével). 	1 pont	
Ekkor $3\cdot 3$ (= 9) esetet kapunk.	1 pont	*Például:* 
Az ismeretségi háló tehát ($3 + 3\cdot 3$ =) 12-féle lehet.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges ismeretségi gráfot felrajzolja, és ez alapján helyesen válaszol, akkor ezért 6 pont jár. A további 3 pontot annak indoklásáért kaphatja meg, hogy miért nincs több lehetőség.

Annak a valószínűsége, hogy A $\wedge$ B hamis és C is hamis $0{,}64 \cdot 0{,}4 = 0{,}256$.	1 pont	
Annak a valószínűsége tehát, hogy $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz: $1 - 0{,}256 = 0{,}744$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">5. c) ötödik megoldás</td></tr>
<tr><td>(Az összes lehetséges eset felsorolása és az igaz esetek valószínűségének megadása.)
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>$A \wedge B$</th><th>$(A \wedge B) \vee C$</th><th><i>valószínűsége</i></th></tr>
<tr><td><i>i</i></td><td><i>i</i></td><td><i>i</i></td><td><i>i</i></td><td><i>i</i></td><td>$0{,}6^3$</td></tr>
<tr><td><i>i</i></td><td><i>i</i></td><td><i>h</i></td><td><i>i</i></td><td><i>i</i></td><td>$0{,}6^2 \cdot 0{,}4$</td></tr>
<tr><td><i>i</i></td><td><i>h</i></td><td><i>i</i></td><td><i>h</i></td><td><i>i</i></td><td>$0{,}6^2 \cdot 0{,}4$</td></tr>
<tr><td><i>i</i></td><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td></td></tr>
<tr><td><i>h</i></td><td><i>i</i></td><td><i>i</i></td><td><i>h</i></td><td><i>i</i></td><td>$0{,}6^2 \cdot 0{,}4$</td></tr>
<tr><td><i>h</i></td><td><i>i</i></td><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td></td></tr>
<tr><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td><i>i</i></td><td><i>h</i></td><td><i>i</i></td><td>$0{,}6 \cdot 0{,}4^2$</td></tr>
<tr><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td><i>h</i></td><td></td></tr>
</table>
</td><td>4 pont</td><td><i>A 8 lehetséges eset és azok logikai értékének helyes megadása 2 pont, az öt „igaz” logikai értékű lehetőség valószínűségek helyes kiszámítása 2 pont.</i></td></tr>
<tr><td>A kérdezett valószínűség:
$0{,}6^3 + 3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}744$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

Megjegyzés: A feladat szövege (bár feltételezte) nem jelentette ki kifejezetten, hogy az A, B és C események függetlenek. Ha a vizsgázó megoldásában nem feltételezte, hogy a három esemény (kijelentés) független, ezért (megfelelő indoklással) azt válaszolta, hogy a kérdezett esemény valószínűsége 0,6 és 1 között lehet, akkor teljes pontszámot kapjon.

6. a)		
(Az ismeretségi gráfban a pontokat a nevek betűivel jelöljük, az ismeretségek a gráf élei.) A $\{D, E, F\}$ részgráfban 3 él lehet.	1 pont	*Az ismeretségi gráfban az élek száma négyféle lehet:* 0, 1, 2, 3.
A 3 él bármelyike vagy szerepel a gráfban (ha a két személy ismeri egymást), vagy nem,	1 pont	*Ezek rendre* 1, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$, *illetve* 1 *lehetőséget jelentenek.*
ezért $2^3 = 8$-féle ismeretségi gráf (háló) lehetséges.	1 pont	*Összesen* $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ *lehetőség van.*
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha a nyolc lehetséges ismeretségi gráfot felrajzolja, és ez alapján helyesen válaszol.

---

4. a)		
(Azt kell belátni, hogy a pontok koordinátái igazzá teszik a görbe egyenletét.) Az origó esetében: $0{,}25 \cdot 0 \cdot (0-5)^2 = 0$ igaz,	1 pont	
az (5; 0) pont esetében: $0{,}25 \cdot 5 \cdot (5-5)^2 = 0$ igaz. (Tehát mindkét pont valóban rajta van a görbén.)	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

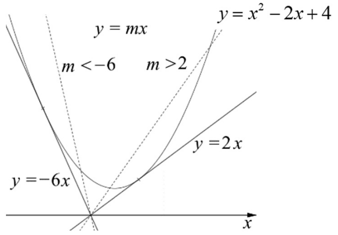
4. b)		
A kérdezett valószínűség a trapéz és a korlátos síkidom területének hányadosa.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A görbe az $f: [0; 5] \rightarrow \mathbf{R}$; $f(x) = 0{,}25x(x-5)^2$ függvény grafikonja.) A síkidom területe: $\int_0^5 0{,}25x(x-5)^2\,dx =$	1 pont	
$= \int_0^5 0{,}25(x^3 - 10x^2 + 25x)dx =$	1 pont	
$= 0{,}25\left[\frac{x^4}{4} - 10\frac{x^3}{3} + 25\frac{x^2}{2}\right]_0^5 =$	2 pont	
$= \frac{625}{48} \approx 13{,}02$.	1 pont	
D pont első koordinátája 1, második koordinátáját (a trapéz egyik alapjának hosszát) behelyettesítéssel kapjuk: $0{,}25 \cdot 1 \cdot (1-5)^2 = 4$. (Tehát D(1; 4).)	1 pont	
Hasonlóan C pont első koordinátája 3, második koordinátája (a trapéz másik alapjának hossza): $0{,}25 \cdot 3 \cdot (3-5)^2 = 3$. (Tehát C(3; 3).)	1 pont	
Mivel a trapéz magassága (az AB szakasz hossza) 2, így a trapéz területe $\frac{4+3}{2} \cdot 2 = 7$.	1 pont	
A kérdezett valószínűség $\frac{7}{13{,}02} \approx 0{,}538$.	1 pont	*A valószínűség pontos értéke* $\frac{7}{\frac{625}{48}} = 0{,}5376$.
Összesen:	**10 pont**	

II.

5. a)

Pontosan akkor van két valós gyök, ha az $x^2-2x-mx+4=0$ egyenlet diszkriminánsa pozitív.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Az egyenlet $x^2-(2+m)x+4=0$, ezért) $D=(2+m)^2-16$	1 pont	
$D=m^2+4m-12>0$	1 pont	
Az $m^2+4m-12=0$ egyenlet megoldásai –6 és 2.	1 pont	
Az $m\mapsto m^2+4m-12$ másodfokú függvény képe „felfelé nyitott” parabola,	1 pont	*Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.*
tehát $m<-6$ vagy $m>2$ esetén igaz a megadott kijelentés.	1 pont	$m\in\ ]-\infty;-6[\ \cup\ ]2;+\infty[$
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Az ábra a megoldásban kapott m értékeknek megfelelő egyeneseket szemlélteti.



5. b)

Mivel $-1\le\cos x\le 1$,	1 pont	
ezért $0\le(1+\cos x)^2\le 4$,	1 pont	
$2\le(1+\cos x)^2+2\le 6$.	1 pont	
(A pozitív számok halmazán az $x\mapsto\frac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért) $\frac{1}{2}\ge\frac{1}{(1+\cos x)^2+2}\ge\frac{1}{6}$.	1 pont	
Ebből következik, hogy $\frac{3}{2}\ge\frac{3}{(1+\cos x)^2+2}\ge\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, tehát a megadott kijelentés valóban igaz (hiszen *f* folytonos függvény).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) első megoldás

Az $(A\wedge B)\vee C$ kijelentés pontosan akkor igaz, ha $A\wedge B$, illetve C közül legalább az egyik igaz.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$A\wedge B$ igaz és C igaz (vagyis mindhárom kijelentés igaz) valószínűsége: $0{,}6^3=0{,}216$.	1 pont	
$A\wedge B$ igaz és C hamis valószínűsége: $0{,}6^2\cdot 0{,}4=0{,}144$.	1 pont	
$A\wedge B$ hamis és C igaz valószínűsége: $(1-0{,}6^2)\cdot 0{,}6=0{,}384$.	1 pont	
Tehát a keresett valószínűség: $0{,}216+0{,}144+0{,}384=0{,}744$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) második megoldás

Az $(A\wedge B)\vee C$ kijelentés pontosan akkor igaz, ha $A\wedge B$, illetve C közül legalább az egyik igaz.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$A\wedge B$ igaz valószínűsége $0{,}6^2=0{,}36$.	1 pont	
C igaz valószínűsége 0,6.	1 pont	
Mindkétszer figyelembe vettük azt az eseményt, hogy $A\wedge B$ igaz és C is igaz; ennek $0{,}36\cdot 0{,}6=0{,}216$ a valószínűsége.	1 pont	
A szitaformula szerint a kérdezett valószínűség $0{,}36+0{,}6-0{,}216=0{,}744$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) harmadik megoldás

Az $(A\wedge B)\vee C$ kijelentés pontosan akkor igaz, ha C igaz, vagy ha C hamis és $A\wedge B$ igaz.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
C igaz valószínűsége 0,6.	1 pont	
$A\wedge B$ igaz és C hamis valószínűsége: $0{,}6^2\cdot 0{,}4=0{,}144$.	1 pont	
Tehát a kérdezett valószínűség: $0{,}6+0{,}144=\ 0{,}744$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) negyedik megoldás

(A komplementer esemény valószínűségét határozzuk meg.) Az $(A\wedge B)\vee C$ kijelentés pontosan akkor hamis, ha $A\wedge B$ hamis és C is hamis.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az $A\wedge B$ hamis, ha legalább az egyik kijelentés hamis; ennek $2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4+0{,}4^2=0{,}64$ a valószínűsége.	2 pont	$1-0{,}6^2$