ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. október 19.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

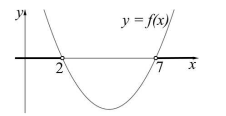
Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

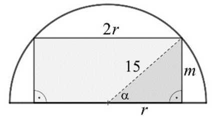
1. a)		
$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 9 = 2 \cdot 2^x + 9$	2 pont	
Ez az egyenlet 2^x -ben másodfokú. Nullára rendezve: $(2^x)^2 - 8 \cdot 2^x = 0$.	1 pont	
$2^x = 0$ vagy $2^x = 8$	1 pont	
(2^x mindig pozitív, ezért) az első eset nem lehetséges,	1 pont	
a másodikból (az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $x = 3$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b)		
Az állítás igaz.	1 pont	
$x^2 - 9x + 14 = 0$ valós gyökei 2 és 7.	1 pont	
Az $x \mapsto x^2 - 9x + 14$ másodfokú függvény grafikonja „felfelé nyitott” parabola, tehát ha $x > 7$, akkor $f(x) > 0$ teljesül.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. c)		
Megfordítás: Ha $f(x) > 0$, akkor $x > 7$.	1 pont	
A megfordítás hamis.	1 pont	
Egy ellenpélda. (Például $x = 0$ esetén $f(x) = 14 > 0$, de $x \le 7$.)	1 pont	*(A b) rész megoldása alapján:) ha $x < 2$, akkor $f(x) > 0$.*
Összesen:	**3 pont**	

2. a) első megoldás		
A 200 km-es városi úton $(2 \cdot 10 =)$ 20 litert fogyasztott az autó,	1 pont	
a benzintartályban (45 – 20 =) 25 liter benzin maradt.	1 pont	
A hátralévő távolságot a 10 literes átlagfogyasztással számítja ki a fedélzeti számítógép: $\frac{25}{10} \cdot 100 = 250$ km.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

az alatta elhelyezhető legnagyobb torta térfogata ennek $\frac{750\pi \cdot \sqrt{3}}{2250\pi} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\approx \frac{4081}{7069}) \approx 0{,}577$-szerese, ami valóban kisebb 0,6-nél. Az állítás tehát igaz.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. c) negyedik megoldás		
(A hosszúságokat cm-ben, a területeket cm²-ben, a térfogatot cm³-ben adjuk meg.)  Az ábra jelöléseit használva $m = 15\sin\alpha$ és $r = 15\cos\alpha$. Az m magasságú torta térfogata: $V(\alpha) = 225\pi m - \pi m^3 = 3375\pi(\sin\alpha - \sin^3\alpha)$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. A búra alatt elhelyezhető legnagyobb térfogatú tortát keressük.	1 pont	$V(\alpha) = r^2\pi m =$ $= 225\pi\cos^2\alpha \cdot 15\sin\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.
A V függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja 0. $V'(\alpha) = 3375\pi(\cos\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha)$	1 pont	$V'(\alpha) = 3375\pi \cdot$ $\cdot(\cos^3\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha)$
$\cos\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos\alpha(1 - 3\sin^2\alpha) = 0$, ha $\cos\alpha = 0$, vagy $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (hiszen $\sin\alpha > 0$).	1 pont	$\cos^3\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha =$ $= \cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) =$ $= \cos\alpha(1 - 3\sin^2\alpha) = 0$
$\cos\alpha = 0$ nem lehet (mert $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ helyen $V'(\alpha)$ pozitívból negatívba vált, így V-nek itt maximuma van ($\alpha \approx 0{,}6155$ radián).	1 pont	
A maximumhelyen $m = 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$ $(\approx 8{,}66)$, $r^2 = 225 \cdot \frac{2}{3} = 150$, $V_{\max} = r^2\pi m = 150\pi \cdot 5\sqrt{3} = 750\pi \cdot \sqrt{3}$ (≈ 4081).	1 pont	
A félgömb alakú búra térfogata $\frac{2 \cdot 15^3\pi}{3} = 2250\pi$ (≈ 7069),	1 pont	
az alatta elhelyezhető legnagyobb torta térfogata ennek $\frac{750\pi \cdot \sqrt{3}}{2250\pi} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\approx \frac{4081}{7069}) \approx 0{,}577$-szerese, ami valóban kisebb 0,6-nél. Az állítás tehát igaz.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

2-vel osztva mindkét oldalt $\frac{r}{\sqrt{2}}\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{225-r^2}<675$.	1 pont	
A bal oldal három pozitív tényezőjére alkalmazzuk a mértani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget: $\frac{r}{\sqrt{2}}\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{225-r^2}\le\left(\frac{\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+225-r^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=75^{\frac{3}{2}}$.	1 pont	*Egyenlőség csak $\frac{r}{\sqrt{2}}=\sqrt{225-r^2}$, tehát $r=\sqrt{150}$ esetén van (ez a maximális térfogatú torta sugara).*
Mivel $75^{\frac{3}{2}}\approx 649{,}52<675$, és lépéseink ekvivalensek voltak, az állítást beláttuk.	1 pont	

9. c) harmadik megoldás		
(A hosszúságokat cm-ben, a területeket cm^2-ben, a térfogatot cm^3-ben adjuk meg.) Mivel $m=\sqrt{15^2-r^2}$, ezért a henger térfogata r függvényében: $V(r)=r^2\pi m=r^2\pi\cdot\sqrt{225-r^2}$ $(0<r<15)$.	1 pont	
A $0<r<15$ nyílt intervallumon értelmezett $V(r)=r^2\pi\cdot\sqrt{225-r^2}$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja 0. $V'(r)=2r\pi\cdot\sqrt{225-r^2}+\frac{r^2\pi}{2\sqrt{225-r^2}}\cdot(-2r)$	1 pont	$V'(r)=\frac{\pi r(450-3r^2)}{\sqrt{225-r^2}}$
Ez 0, ha $2r\pi\cdot\sqrt{225-r^2}=\frac{r^2\pi}{2\sqrt{225-r^2}}\cdot 2r$, azaz $2(225-r^2)=r^2$, ahonnan $r=\sqrt{150}$ (mert $r\ne 0$).	1 pont	$\frac{\pi r(450-3r^2)}{\sqrt{225-r^2}}=0$ $r=0$ vagy $r=\sqrt{150}$
$V'(r)=\frac{\pi r(450-3r^2)}{\sqrt{225-r^2}}$, ez pozitívból negatívba vált az $r=\sqrt{150}$ $(r^2=150)$ helyen. V-nek tehát valóban maximuma van itt.	1 pont	
Ekkor $m=\sqrt{225-150}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ $(\approx 8{,}66)$, és így a maximális térfogat $V_{max}=r^2\pi m=150\pi\cdot5\sqrt{3}=750\pi\cdot\sqrt{3}$ (≈ 4081).	1 pont	
A félgömb alakú búra térfogata $\frac{2\cdot15^3\pi}{3}=2250\pi$ (≈ 7069),	1 pont	

2. a) második megoldás		
A számítógép a városi átlagfogyasztás alapján a 45 liter benzint $\frac{45}{10}\cdot100=450$ km-re elégnek számítja.	2 pont	
Már megtettek 200 km-t, így a hátralévő távolság $(450-200=)$ 250 km.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. b) első megoldás		
Az első 300 km után a számítógép szerint 45 liter benzinnel 300 + 200 = 500 km-t lehet megtenni.	1 pont	
Ezért a gép szerinti átlagfogyasztás a 300 km során $\frac{45}{500}\cdot100=9$ liter/100 km.	2 pont	
A 300 km-en elfogyasztott benzin $(3\cdot9=)$ 27 liter (és a városban megtett 200 km-en 20 litert fogyasztott az autó),	1 pont	
a kirándulás során $(27-20=)$ 7 liter benzin fogyott.	1 pont	
Ezen a szakaszon tehát 7 liter/100 km volt az átlagfogyasztás.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b) második megoldás		
Ha a 100 km-es kiránduláson x liter volt a benzinfogyasztás, akkor az első 300 km-es szakaszon $20+x$ liter benzin fogyott, így az átlagfogyasztás $\frac{20+x}{3}$ liter/100 km.	2 pont*	
A számítógép szerint ezzel az átlagfogyasztással 500 km-re elegendő a 45 liter benzin: $45=5\cdot\frac{20+x}{3}$.	2 pont*	*Ezzel az átlagfogyasztással még további 200 km-re elegendő a benzin:* $20+x+\frac{20+x}{3}\cdot2=45$.
Ebből $x=7$, tehát a 100 km-es kiránduláson 7 liter/100 km volt az átlagfogyasztás.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelzett pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Ha a 100 km-es kiránduláson x liter volt a benzinfogyasztás, akkor az első 300 km-en $20+x$ liter benzint fogyasztott az autó, így $25-x$ liter maradt az üzemanyagtartályban.	2 pont	
A számítógép szerint az első 300 km-en mért átlagfogyasztás egyenlő a hátralévő 200 km-en tervezett átlagfogyasztással: $\frac{20+x}{3}=\frac{25-x}{2}$ (liter/100 km).	2 pont	

3. a)

A $(13 \cdot 8 =)$ 104 a legkisebb, a $(124 \cdot 8 =)$ 992 a legnagyobb 8-cal osztható háromjegyű szám,	1 pont	
így összesen $\frac{992-104}{8}+1 = 112$ db ilyen szám van.	1 pont	124 – 12 = 112
(900 darab háromjegyű szám van, ezért) a 9-cel osztható háromjegyű számok száma 100.	1 pont	
A 8-cal és 9-cel osztható számok 72-vel is oszthatók,	1 pont	
ezek száma 12 (legkisebb a $2 \cdot 72 = 144$, legnagyobb a $13 \cdot 72 = 936$).	1 pont	13 – 1 = 12
(A 72-vel oszthatókat a 8-cal és a 9-cel oszthatók megszámolásánál is megszámoltuk, így) a keresett számok száma 112 + 100 – 12 = 200.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) első megoldás

A 8-as számrendszerben a legkisebb háromjegyű szám $100_8 = 64$,	1 pont	
a legnagyobb $777_8 = (1000_8 - 1 =)$ 511,	1 pont	
összesen tehát 511 – 63 = 448 háromjegyű szám van (összes eset).	1 pont	
(A 8-as számrendszerben 3 jegyű számokat tekintve) a 9-es számrendszerben a legkisebb háromjegyű szám $100_9 = 81$,	1 pont	
a legnagyobb (mivel a 8-as számrendszerben háromjegyű szám nem lehet négyjegyű a 9-es számrendszerben) az 511.	1 pont	
A kedvező esetek száma tehát 511 – 80 = 431.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{431}{448}$ (≈ 0,962).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) második megoldás

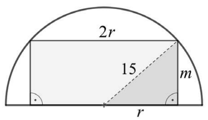
Egy 8-as számrendszerben háromjegyű szám első számjegye 7-féle, a másik két számjegye 8-8-féle lehet.	2 pont	
Összesen tehát $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ háromjegyű szám van a 8-as számrendszerben.	1 pont	
Ezek közül a 9-es számrendszerben nem háromjegyűek a $(9^2 =)$ 81-nél kisebb számok (a többi igen, mert a 8-as számrendszerben háromjegyű szám nem lehet négyjegyű a 9-es számrendszerben).	1 pont	

A maximális térfogatú forgáshenger magasságára $m = 5\sqrt{3}$ (≈ 8,66), alapkörének sugarára $r^2 = 225 - 75 = 150$ teljesül,	1 pont	
ezért a maximális térfogat $V_{\max} = r^2\pi m = 150\pi \cdot 5\sqrt{3} = 750\pi \cdot \sqrt{3}$ (≈ 4081).	1 pont	
A félgömb alakú búra térfogata $\frac{2 \cdot 15^3 \pi}{3} = 2250\pi$ (≈ 7069),	1 pont	
az alatta elhelyezhető legnagyobb torta térfogata ennek $\frac{750\pi \cdot \sqrt{3}}{2250\pi} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left(\approx \frac{4081}{7069}\right) \approx 0{,}577$-szerese, ami valóban kisebb 0,6-nél. Az állítás tehát igaz.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. c) második megoldás

(A hosszúságokat cm-ben, a területeket cm²-ben, a térfogatot cm³-ben adjuk meg.) Mivel $m = \sqrt{15^2 - r^2}$, ezért a henger térfogata r függvényében: $V(r) = r^2\pi m = r^2\pi \cdot \sqrt{225 - r^2}$ $(0 < r < 15)$.	1 pont	
A félgömb alakú búra térfogata $\frac{2 \cdot 15^3 \pi}{3} = 2250\pi$,	1 pont	
így be kell látni, hogy $\frac{r^2\pi \cdot \sqrt{225 - r^2}}{2250\pi} < 0{,}6$.	1 pont	
Rendezés után $r^2 \cdot \sqrt{225 - r^2} < 1350$.	1 pont	
Mivel mindkét oldal pozitív, négyzetre emelhetünk, majd osztunk 4-gyel: $\frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (225 - r^2) < 455\,625$.	1 pont*	
A bal oldal három pozitív tényezőjére alkalmazzuk a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenséget: $\frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (225 - r^2) \le \left(\frac{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + (225 - r^2)}{3}\right)^3 = 75^3$	1 pont*	*Egyenlőség csak* $\frac{r^2}{2} = 225 - r^2$, *tehát* $r = \sqrt{150}$ *esetén van (ez a maximális térfogatú torta sugara).*
Mivel $75^3 = 421\,875 < 455\,625$, és lépéseink ekvivalensek voltak, az állítást beláttuk.	1 pont*	
Összesen:	**7 pont**	

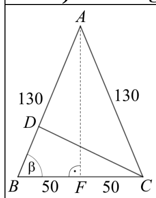
9. a)		
Az összeolvasztás után kapott gyertya V térfogata $V = r^2\pi h + R^2\pi h = (r^2 + R^2)\cdot \pi h$,	1 pont	
alapkörének sugara $\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}} = \sqrt{r^2 + R^2}$.	1 pont	
Bizonyítandó, hogy $\sqrt{r^2 + R^2} \ge \sqrt{2rR}$.	1 pont	
$\sqrt{2}$ -vel osztva kapjuk, hogy $\sqrt{\dfrac{r^2 + R^2}{2}} \ge \sqrt{rR}$, ami éppen a két pozitív szám négyzetes és mértani közepe közti egyenlőtlenség, így igaz. (Az új gyertya sugara valóban legalább $\sqrt{2rR}$, és egyenlőség csak $r = R$ esetén áll fenn).	2 pont	*Négyzetre emelés és rendezés után kapjuk, hogy $r^2 + R^2 - 2rR \ge 0$, azaz $(r - R)^2 \ge 0$, ami igaz. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, az állítást tehát beláttuk.*
Összesen:	**5 pont**	

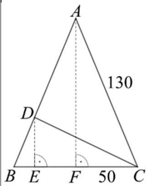
9. b)		
(A hosszúságokat cm-ben, a területeket cm²-ben, a térfogatot cm³-ben adjuk meg.) Az ábra az m magasságú henger forgástengelyén áthaladó egyik síkmetszetét mutatja. A búra sugara 15, a torta alapkörének sugara r ($0 < r < 15$). 	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
Pitagorasz-tétellel: $r^2 + m^2 = 15^2$, ahonnan $r^2 = 225 - m^2$.	1 pont	
Az m magasságú torta térfogata $V = r^2\pi m = (225 - m^2)\pi m = 225\pi m - \pi m^3$ valóban.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c) első megoldás		
(A hosszúságokat cm-ben, a területeket cm²-ben, a térfogatot cm³-ben adjuk meg.) A búra alatt elhelyezhető legnagyobb térfogatú tortát keressük. A $0 < m < 15$ nyílt intervallumon értelmezett $V(m) = 225\pi m - \pi m^3$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja 0. $V'(m) = \pi(225 - 3m^2)$.	1 pont	
$225 - 3m^2 = 0$, azaz $m^2 = 75$, $m = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (ez eleme az értelmezési tartománynak).	1 pont	
$V''(m) = -6\pi m$ Ez negatív, ha $0 < m < 15$, tehát V-nek maximuma van, ha $m = 5\sqrt{3}$.	1 pont	*Ha $m^2 < 75$, akkor $V'(m) > 0$, ha $m^2 > 75$, akkor $V'(m) < 0$, ezért V-nek maximuma van, ha $m^2 = 75$.*

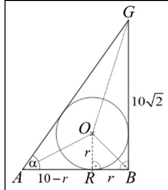
Mivel a 8-as számrendszerben a legkisebb háromjegyű szám a 64, ezért a kedvezőtlen esetek száma 80 – 63 = 17.	1 pont	
A keresett valószínűség $1 - \dfrac{17}{448} =$	1 pont	
$= \dfrac{431}{448}$ (≈ 0,962).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a)		
Az ötszögnek 5 oldala és 5 átlója van. A 10 szakasz mindegyike kétféle lehet (vastagított vagy nem vastagított).	1 pont	
Az összes különböző lehetőség száma ezért $2^{10} = 1024$.	1 pont	$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10}$
(1024 > 400, így) mindenkinek jut különböző kártya.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

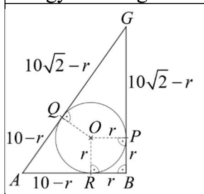
4. b) első megoldás		
 Az ábra jelöléseit használjuk.	1 pont	
Az ABF derékszögű háromszögben $\cos\beta = \dfrac{50}{130}$ (≈ 0,3846),	1 pont	$AF = \sqrt{130^2 - 50^2} = 120$
ahonnan $\beta \approx 67{,}4°$.	1 pont	$\sin\beta = \dfrac{120}{130} = \dfrac{12}{13}$ $\cos\beta = \dfrac{50}{130} = \dfrac{5}{13}$
A BCD háromszög területe 2000 m², ezért $\dfrac{BD\cdot 100\cdot \sin 67{,}4°}{2} = 2000$.	1 pont	$\dfrac{BD\cdot 100\cdot \frac{12}{13}}{2} = 2000$
Ebből $BD \approx 43{,}3$ (méter).	1 pont	$BD = \dfrac{130}{3}$
A BCD háromszögben felírva a koszinusztételt: $CD^2 = 43{,}3^2 + 100^2 - 2\cdot 43{,}3\cdot 100\cdot \cos 67{,}4°$.	1 pont	
Ebből a kerítés hossza: $CD \approx 92{,}4$ méter.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. b) második megoldás		
 Az ábra jelöléseit használjuk.	1 pont	
Az *ABC* háromszög *AF* magassága Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{130^2-50^2}=120$ (méter).	1 pont	
Az *ABC* egyenlő szárú háromszög területe: $\frac{100\cdot 120}{2}=6000$ (m²).	1 pont	
Mivel a *BCD* háromszög területe 2000 m², ezért az *ABC* háromszöggel közös *BC* oldalához tartozó magassága harmada az *ABC* háromszögének: $DE\ (=120:3)=40$ (méter).	1 pont	*A BCD háromszög BC oldalához tartozó magassága:* $DE=\frac{2\cdot 2000}{100}=40$.
$BDE\Delta \sim BAF\Delta$, mert mindkettő derékszögű, és közös az egyik hegyesszögük.	1 pont	
A háromszögek hasonlóságának aránya $DE:AF=1:3$, ezért $BE=\frac{50}{3}$, így $EC=\frac{250}{3}$.	1 pont	
A *DEC* derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számítható a *CD* kerítés hossza: $CD=\sqrt{40^2+\left(\frac{250}{3}\right)^2}\approx 92{,}4$ méter.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. c)		
Ha a magyar résztvevők életkorának átlaga *x* év, akkor $45{,}7=\frac{200x+70\cdot 44+130\cdot 48}{200+70+130}$.	2 pont	
$18\,280=200x+9320$ $200x=8960$	1 pont	
$x=44{,}8$ (tehát a magyar résztvevők életkorának átlaga 44,8 év).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. c) harmadik megoldás		
Az *ABG* háromszögben $BG=10\sqrt{2}$.	1 pont	
$ABG\sphericalangle=90°$ (mert *AB* merőleges a *BCGF* síkra, és így merőleges annak bármely egyenesére).	1 pont	
 Az ábra szerint az *ABG* derékszögű háromszög beírt körének középpontja *O*, sugara *r*, és a kör az *AB* befogót az *R* pontban érinti. Legyen továbbá $BAG\sphericalangle=\alpha$. $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{10\sqrt{2}}{10}=\sqrt{2}$, innen $\alpha\approx 54{,}7°$. Mivel a beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja, ezért $BAO\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}$ és $OBA\sphericalangle=45°$.	2 pont	
(Az *ARO* derékszögű háromszögből) $AR=r\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, másrészt $RB=r$ miatt $AR+RB=r\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+r=10$.	1 pont	
A beírt kör sugara $r=\frac{10}{\mathrm{ctg}\,27{,}35°+1}\approx 3{,}41$ egység.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. c) első megoldás		
Az ABG háromszögben $BG = 10\sqrt{2}$, és (például a térbeli Pitagorasz-tétellel) $AG = \sqrt{10^2+10^2+10^2} = 10\sqrt{3}$.	1 pont	
$ABG\sphericalangle = 90°$ (mert AB merőleges a $BCGF$ síkra, és így merőleges annak bármely egyenesére).	1 pont	$AB^2+BG^2=AG^2$, ezért $ABG\sphericalangle = 90°$.
(A beírt kör sugarát az $r = \frac{t}{s}$ képletből számítjuk ki.) Az ABG háromszög területe $t = \frac{AB\cdot BG}{2} = \frac{10\cdot 10\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$.	2 pont	
A háromszög kerülete $10+10\sqrt{2}+10\sqrt{3}$, innen a félkerület hossza $s = 5+5\sqrt{2}+5\sqrt{3}$.	1 pont	
A beírt kör sugara $r = \frac{50\sqrt{2}}{5+5\sqrt{2}+5\sqrt{3}} \approx 3{,}41$ egység.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. c) második megoldás		
Az ABG háromszögben $BG = 10\sqrt{2}$, és (például a térbeli Pitagorasz-tétellel) $AG = \sqrt{10^2+10^2+10^2} = 10\sqrt{3}$.	1 pont	
$ABG\sphericalangle = 90°$ (mert AB merőleges a $BCGF$ síkra, és így merőleges annak bármely egyenesére).	1 pont	
 Az ABG derékszögű háromszög beírt körének középpontját jelölje O, sugarát r, a kör az oldalakat érintse rendre a P, Q, R pontokban az ábra szerint. Egy körhöz adott külső pontból húzott két érintőszakasz hossza megegyezik, továbbá az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. Így $PORB$ egy r oldalú négyzet, $AR = AQ = 10 - r$, $GP = GQ = 10\sqrt{2} - r$.	2 pont	
Az AG átfogó a két érintőszakasz összege, tehát $10\sqrt{3} = 10 - r + 10\sqrt{2} - r$,	1 pont	
ebből a beírt kör sugara: $r = \frac{10+10\sqrt{2}-10\sqrt{3}}{2}$ $(= 5(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})) \approx 3{,}41$ egység.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

II.

5. a)		
A sorozat első 5 tagja 1, 3, 6, 10, 15;	1 pont	
az átlaguk 7.	1 pont	
A szórás: $\sqrt{\frac{(1-7)^2+(3-7)^2+(6-7)^2+(10-7)^2+(15-7)^2}{5}} =$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel számolva helyesen adja meg a szórást.*
$(=\sqrt{25{,}2}\,) \approx 5{,}02$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b)		
$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{n+2}{2}}{\binom{n+1}{2}} = \frac{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)n}{2}} =$	1 pont	
$= \frac{n+2}{n} =$	1 pont	
$= 1 + \frac{2}{n}$	1 pont	$= \frac{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{n}{n}}$
(Az $n \mapsto \frac{2}{n}$ sorozat határértéke 0, ezért) a (b_n) sorozat határértéke 1.	1 pont	*A (b_n) sorozat határértéke* $\frac{1+0}{1} = 1$.
Összesen:	**4 pont**	

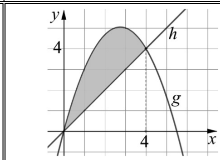
5. c) első megoldás		
A számtani sorozat összegképlete alapján az első n tag összege $100 = \frac{(2c_1+(n-1)\cdot 0{,}25)\cdot n}{2}$, az első $2n$ tag összege $300 = \frac{(2c_1+(2n-1)\cdot 0{,}25)\cdot 2n}{2}$.	2 pont	
Az első egyenletből $2c_1n + 0{,}25n^2 - 0{,}25n = 200$, a második egyenletből $2c_1n + 0{,}5n^2 - 0{,}25n = 300$.	2 pont	
Az első egyenletet kivonjuk a másodikból: $0{,}25n^2 = 100$, azaz $n^2 = 400$.	2 pont	
Az egyenlet megoldása $n = 20$ ($n = -20$ nem lehet).	1 pont	
Ellenőrzés ($c_1 = 2{,}625$, $S_{20} = 100$, $S_{40} = 300$ valóban).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

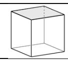
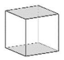
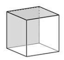
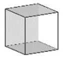
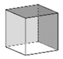
5. c) második megoldás		
A számtani sorozat összegképlete alapján az első n tag összege $100=\frac{(2c_1+(n-1)\cdot 0,25)\cdot n}{2}$, az első $2n$ tag összege $300=\frac{(2c_1+(2n-1)\cdot 0,25)\cdot 2n}{2}$.	2 pont	
(Kifejezzük $2c_1$-et:) Az első egyenletből $2c_1=\frac{200}{n}-(n-1)\cdot 0,25$, a második egyenletből $2c_1=\frac{300}{n}-(2n-1)\cdot 0,25$,	2 pont	
így $\frac{200}{n}-(n-1)\cdot 0,25=\frac{300}{n}-(2n-1)\cdot 0,25$.	1 pont	
Szorzunk $4n$-nel, és rendezünk: $n^2=400$.	1 pont	
Az egyenlet megoldása $n = 20$ ($n = –20$ nem lehet).	1 pont	
Ellenőrzés ($c_1 = 2,625$, $S_{20} = 100$, $S_{40} = 300$ valóban).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

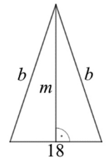
5. c) harmadik megoldás		
Jelölje d a sorozat differenciáját! $c_{n+1}=c_1+nd$, $c_{n+2}=c_2+nd$, és így tovább: a sorozat első n tagja összegénél $n\cdot nd=n^2d$-vel nagyobb a sorozat második n tagjának az összege.	2 pont	
A második n tag összege $300 – 100 = 200$,	1 pont	
ez pedig $200 – 100 = 100$-zal nagyobb az első n tag összegénél.	1 pont	
Innen $100 = n^2d$.	1 pont	
Mivel $d = 0,25$, így $n^2 = 400$.	1 pont	
Az egyenlet megoldása $n = 20$ ($n = –20$ nem lehet).	1 pont	
Ellenőrzés ($c_1 = 2,625$, $S_{20} = 100$, $S_{40} = 300$ valóban).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

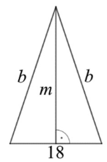
8. b) első megoldás		
Dóri egy csokoládé vásárlása esetén $\frac{1}{8}$ valószínűséggel kapja meg a hiányzó kockát ($\frac{7}{8}$ valószínűséggel nem).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A komplementer esemény valószínűségét számítjuk ki.) Annak valószínűsége, hogy egyik ajándék sem megfelelő: $\left(\frac{7}{8}\right)^3$.	1 pont	
Annak valószínűsége tehát, hogy valamelyik ajándék megfelelő: $1-\left(\frac{7}{8}\right)^3$,	1 pont	
ami kb. 0,330.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. b) második megoldás		
Dóri egy csokoládé vásárlása esetén $\frac{1}{8}$ valószínűséggel kapja meg a hiányzó kockát. Így annak valószínűsége, hogy mindhárom csoki a hiányzó kockát tartalmazza: $\left(\frac{1}{8}\right)^3\approx 0,002$.	1 pont	
Lehet, hogy a három csoki közül kettőben is a hiányzó kocka van, de a harmadikban nem. Ennek a valószínűsége $\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{8}\right)\approx 0,041$.	1 pont	
Lehet, hogy a három csoki közül egyben a hiányzó kocka van, de a másik kettőben nem. Ennek a valószínűsége $\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^2\approx 0,287$.	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát (körülbelül): $0,002 + 0,041 + 0,287 = 0,330$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. c)		
A h egyenes egyenlete $y = x$.	1 pont	
Megkeressük g (parabola) és h közös pontjait: $\frac{1}{3}(-2x^2+11x) = x$.	1 pont	
Nullára rendezve: $0 = 2x^2 - 8x$, ahonnan $x = 0$, illetve $x = 4$. (Két közös pont van, az origó és a $C(4;\,4)$ pont.)	1 pont	
A két metszéspont között a parabola az egyenes fölött helyezkedik el, ezért a keresett területet az $\int_0^4 \left(\frac{1}{3}(-2x^2+11x) - x\right)dx$ integrál értéke adja.	1 pont	
$\int_0^4 \left(\frac{1}{3}(-2x^2+11x) - x\right)dx = \left[-\frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right]_0^4 =$	2 pont	
$\left(= -\frac{2}{9}\cdot 4^3 + \frac{4}{3}\cdot 4^2\right) = \frac{64}{9}$	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

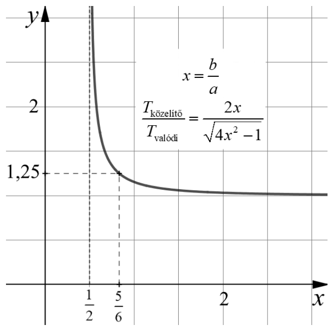
8. a)		
Ha a sárga lapok száma 1, akkor 1 megfelelő kocka van.	1 pont	
Ha a sárga lapok száma 2, akkor 2 lehetőség van: ezek lehetnek egymással szemközti vagy élben szomszédos lapok.	1 pont	 
Ha a sárga lapok száma 3, akkor ezek elhelyezkedését tekintve két eset lehetséges: 1. eset: Ha van közöttük két szemközti sárga lap, akkor a forgásszimmetria miatt a harmadik sárga lap egyértelmű, ezért ez 1 színezési lehetőség.	1 pont	
2. eset: Ha nincsenek szemközti sárga lapok, akkor a három sárga lapnak egy közös csúcsa van, tehát ez is 1 színezési lehetőség.	1 pont	
Ha a sárga lapok száma 4 vagy 5, akkor a kék lapok száma rendre 2, illetve 1, így ilyen színezésből is 2, illetve 1 van (ugyanúgy, mint 2, illetve 1 sárga lap esetén).	1 pont	
Összesen 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8 különböző kocka készíthető valóban.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. a) **első megoldás**		
Legyen a háromszög szára (cm-ben mérve) b. Az egyiptomi számítás szerint a terület közelítőleg $\frac{18\cdot b}{2} = 9b$.	1 pont	
A háromszög alapjához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel) $m = \sqrt{b^2 - 9^2}$.	1 pont	
A háromszög területe valójában $\frac{18\cdot m}{2} = 9\cdot\sqrt{b^2-81}$.	1 pont	
A valódi terület ($m < b$ miatt) kisebb, mint a közelítő érték,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért, ha a számításban elkövetett hiba kisebb, mint 25%, akkor $\frac{9b}{9\cdot\sqrt{b^2-81}} < 1{,}25$.	1 pont	
Rendezve: $b < 1{,}25\cdot\sqrt{b^2-81}$.	1 pont	
(Mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:) $b^2 < 1{,}5625\cdot(b^2-81)$, ahonnan $b^2 > \frac{1{,}5625\cdot 81}{0{,}5625} = 225$,	2 pont	
innen $b > 15$. A háromszög szára tehát nagyobb, mint 15 cm. (Ilyen háromszög mindig létezik.)	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

6. a) **második megoldás**		
Legyen a háromszög alapjához tartozó magassága (cm-ben mérve) m. A háromszög területe valójában $\frac{18\cdot m}{2} = 9m$.	1 pont	
A háromszög szára (Pitagorasz-tétellel) $b = \sqrt{m^2 + 9^2}$.	1 pont	
Az egyiptomi számítás szerint a terület közelítőleg $\frac{18\cdot b}{2} = 9\cdot\sqrt{m^2+81}$.	1 pont	
A valódi terület ($m < b$ miatt) kisebb, mint a közelítő érték,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért ha a számításban elkövetett hiba kisebb, mint 25%, akkor $\frac{9\cdot\sqrt{m^2+81}}{9m} < 1{,}25$.	1 pont	

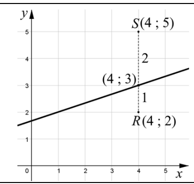
Rendezve: $\sqrt{m^2+81}<1,25m$.	1 pont	
(Mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:) $m^2+81<1,5625m^2$, ahonnan $m^2>\dfrac{81}{0,5625}=144$, tehát $m > 12$,	2 pont	
és így $b>\sqrt{12^2+9^2}=15$. A háromszög szára tehát nagyobb, mint 15 cm. (Ilyen háromszög mindig létezik.)	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: A grafikonon látható, hogy mely esetekben „működik jól” az ókori egyiptomiak közelítése (a = alap hossza, b = szár hossza).



6. b)		
$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=6!=2^4\cdot3^2\cdot5$ $(=5\cdot12^2)$	1 pont	
$6!\cdot k$ pontosan akkor (pozitív) négyzetszám, ha a prímtényezős felbontásában minden prímszám kitevője páros szám,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért k csak $5m^2$ alakú lehet ($k, m\in \mathbf{N}^+$). (Ekkor $6!\cdot k=5\cdot12^2\cdot5\cdot m^2=(60m)^2$.)	2 pont	
Megoldandó az $5m^2<1000$ egyenlet.	1 pont	
$m<\sqrt{200}\approx14,1$,	1 pont	
tehát 14 olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amelyik a feltételeknek megfelel.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: A feltételnek megfelelő számok a négyzetszámok ötszörösei közül az 1000-nél kisebbek, tehát 5 $(=5\cdot1^2)$, 20, 45, 80, 125, 180, 245, 320, 405, 500, 605, 720, 845, 980 $(=5\cdot14^2)$.

7. a)		
Az egyenes 4 abszcisszájú pontja (4; 3).	1 pont	
Az R függőleges távolsága 3 – 2 = 1,	1 pont	
az S függőleges távolsága 5 – 3 = 2.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. b)		
Az A pontnak az $y = mx$ egyenestől mért függőleges távolsága az (1; 3) és az (1; m) pontok távolsága. Ugyanígy a B pont függőleges távolsága a (3; 5) és a (3; 3m), a C ponté pedig a (4; 4) és a (4; 4m) pontok távolsága.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Tehát az alábbi összeg minimumát keressük: $(m-3)^2+(3m-5)^2+(4m-4)^2=$	2 pont	
$=26m^2-68m+50$.	1 pont	
Az $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú f függvénynek minimuma van, ha $a > 0$, és ezt a minimumot $x=-\dfrac{b}{2a}$-nál veszi fel.	1 pont*	*A konkrét esetben:* $f'(m)=52m-68$, *ennek a zérushelyénél minimális lesz f értéke (mert f főegyütthatója pozitív).*
A $26m^2-68m+50$ kifejezés tehát $m=\dfrac{68}{52}=\dfrac{17}{13}$-nál lesz minimális. (A keresett egyenes egyenlete $y=\dfrac{17}{13}x$.)	1 pont	$52m-68=0$ $m=\dfrac{68}{52}$
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzések: 1. A *-gal jelölt pontot az alábbi gondolatért is megkaphatja a vizsgázó.*

$26m^2-68m+50=26\left(m-\dfrac{17}{13}\right)^2+k$ (ahol $k=\dfrac{72}{13}$).	1 pont	

2. A pontokra legjobban illeszkedő (origón átmenő) egyenest és az ettől az egyenestől mért függőleges távolságokat szemlélteti az ábra. A legkisebb négyzetösszeg kb. 5,54.