Azonosító jel:															

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2022. május 3. 9:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. **a)** Egy szabályos dobókockával 7-szer dobunk, és a dobott számokat összeadjuk. Hány olyan különböző dobássorozat van, amelyben a hét dobott szám összege 9? (A dobott számok sorrendje is számít.)

b) Egy szabályos dobókockával 8-szor dobtunk. Az első hét dobás 2, 1, 3, 5, 4, 3, 5 volt. Mi lehetett a nyolcadik dobás, ha tudjuk, hogy a nyolc dobás után a dobott számok átlaga nagyobb volt, mint a dobott számok mediánja?

c) Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második dobás nagyobb lesz, mint az első?

a)	4 pont	
b)	6 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	14 pont	

2. **a)** Adottak az A, B, C kijelentések. Az A és B kijelentések logikai értéke igaz, a C kijelentés logikai értéke hamis.
Határozza meg az alábbi állítások logikai értékét! (Válaszait **itt** nem szükséges indokolnia.)

(1) $A \wedge C$
(2) $\neg A \vee B$
(3) $B \rightarrow C$
(4) $(A \wedge \neg B) \vee C$

Jelölje x és y a derékszögű koordináta-rendszer egy tetszőleges pontjának első, illetve második koordinátáját, és legyen c egy valós szám.

b) Igaz-e a következő állítás?
Ha $c \leq 12$, *akkor* $x^2 + 4x + y^2 - 6y + c = 0$ *egy kör egyenlete.*
(Válaszát indokolja!)

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és a megfordított állításról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! (Válaszát indokolja!)

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	10 pont	

3. Egy háromszög három oldalának hossza (valamilyen sorrendben) tekinthető egy mértani sorozat három szomszédos tagjának. Két oldal hosszát ismerjük, az egyik 12 cm, a másik 27 cm.

a) Milyen hosszú lehet a harmadik oldal?

Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza $AC = 30$ egység és $BC = 40$ egység. Megrajzoljuk a derékszögű csúcsból induló magasságvonalat, szögfelezőt és súlyvonalat. Ezek metszéspontját az átfogóval jelölje rendre P, Q és R.

b) Írja fel egész számokkal az $AP:PQ:QR:RB$ arányt! Pontos értékekkel számoljon!

a)	5 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Különböző közlekedési ágazatok gazdaságosságát gyakran hasonlítják össze. Ennek részeként meghatározzák 1 személy 1 kilométer távolságra történő elszállításának üzemanyagköltségét.

Egy Boeing 737-700 típusú utasszállító repülőgép átlagos üzemanyag-fogyasztása az 1200 km-es Budapest–Amszterdam repülési útvonalon kb. 2,4 tonna óránként. A gép átlagsebessége az úton kb. 750 km/h, a szállítható személyek száma 150 fő. A repülőgép üzemanyagának egységára 900 euró/tonna.

Egy személyautó üzemanyag-fogyasztása kb. 6 liter/100 km, a szállítható személyek száma 5 fő. A személyautó üzemanyagának egységára 1,2 euró/liter.

a) Tegyük fel, hogy a repülőgépen és a személyautóban is minden férőhely foglalt. Csak az üzemanyagköltséget tekintve a vizsgált repülőjárat vagy a személyautó szállít el olcsóbban 1 személyt 1 kilométer távolságra?

Az egyik repülőjárat fedélzetén szendvicset, üdítőt és kávét lehet kapni. A szendvics ára 3,50 euró, az üdítő ára 3 euró, a kávé ára 2,50 euró. A szendvicsből és üdítőből álló menü ára 5,50 euró.

Kávéból 28 adagot adtak el. Kétszer annyi szendvicset adtak el menüben, mint menün kívül, és 10-zel kevesebb üdítőt adtak el menüben, mint menün kívül. Az elszámolásnál kiderült, hogy az összes bevételnek éppen az egyharmada származott menü eladásából.

b) Határozza meg a fedélzeti eladásokból származó bevételt ezen a repülőjáraton!

a)	7 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy háromszög oldalai a, $a + 1$ és $a + 2$ egység hosszúak.

a) Igazolja, hogy ha a háromszög legnagyobb szöge γ, akkor $\cos\gamma = \frac{a-3}{2a}$.

b) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát, ha a háromszög legnagyobb szöge 120 fokos!

Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza 8 cm, 15 cm és 17 cm. A háromszöglemez egy pontját véletlenszerűen kiválasztjuk.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a pont mindegyik csúcstól legalább 3 cm távolságra lesz?

a)	6 pont	
b)	3 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Egy gyárban olyan 5 liter űrtartalmú lábosokat készítenek, melyek alakja jó közelítéssel (felül nyitott) forgáshenger.

a) Mekkora az 5 literes lábos alapkörének a sugara, ha magassága 15 cm?

b) A lábosok külső felületét vékony, piros zománcréteggel vonják be.
Mekkora legyen az 5 literes lábos alapkörének a sugara, hogy a külső felület bevonásához a lehető legkevesebb zománcot kelljen felhasználni?

Minden egyes elkészült termék (egymástól függetlenül) p valószínűséggel selejtes. Egy kamion több ezer lábost szállított a megrendelőnek, melyek közül a minőségellenőrök 20-at vizsgálnak meg a szállítmány átvétele előtt.

c) Legfeljebb mekkora lehet p értéke, ha legalább 0,8 annak a valószínűsége, hogy a 20 megvizsgált termék egyike sem selejtes?

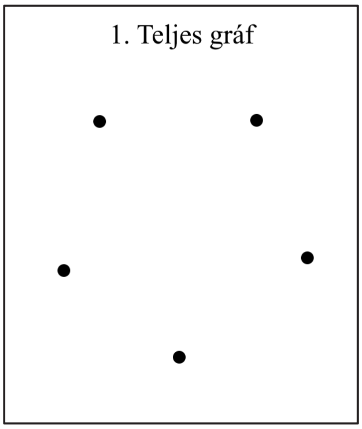
a)	3 pont	
b)	8 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

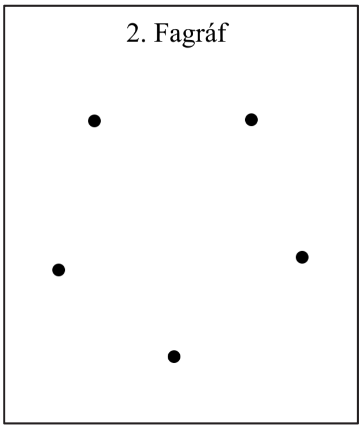
**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

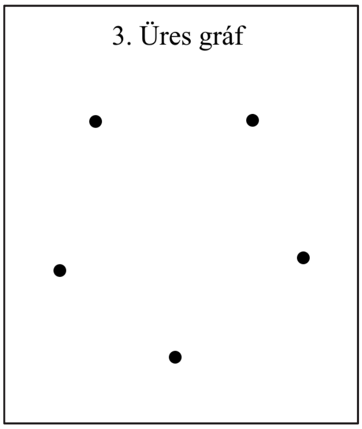
7. **a)** Két pozitív egész szám relatív prím, legkisebb közös többszörösük 35 700. Határozza meg az ilyen tulajdonságú számpárok számát!
(Az (a, b) és a (b, a) számpárokat nem tekintjük különbözőknek.)

b) Legyen $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Hány olyan részhalmaza van H-nak, amelyben az elemek szorzata osztható 9-cel? (Egyelemű halmaz esetén az „elemek szorzatának” az egyetlen elem értékét tekintjük.)

c) Egy papírlapon adott öt pont. A pontok mellé egy-egy pozitív egész számot írunk. Az adott pontok legyenek egy olyan ötpontú egyszerű gráf csúcsai, amelynek két csúcsa pontosan akkor van éllel összekötve, ha a csúcsok mellé írt számok közül az egyik többszöröse a másiknak.
Az alábbi három ábra mindegyikén 5-5 pont látható. Írjon mindhárom ábrán az 5 pont mellé **különböző** pozitív egész számokat, majd rajzolja meg a fenti szabály szerint a gráf éleit úgy, hogy az első esetben egy teljes gráfot, a második esetben egy fagráfot, a harmadik esetben pedig egy üres gráfot kapjon (az üres gráfnak egyetlen éle sincsen)!







a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. A közúti forgalomban gyakran előfordul, hogy egy autónak hirtelen meg kell állnia. Száraz útviszonyok között jellemzően 7,5 m/s² egy autó lassulása.
Ebben az esetben a pillanatnyi sebességet a megtett út függvényében leíró összefüggés: $v(x)=\sqrt{v_0^2-2\cdot 7{,}5\cdot x}$, ahol x a fékezés megkezdésétől mért út hossza méterben, v_0 pedig a fékezés megkezdésekor az autó sebessége m/s-ban.

a) Egy autó (száraz útviszonyok között) 18 m/s sebességgel halad, amikor megkezdi a fékezést. Meg tud-e állni az útra kigurult labda előtt, ha a labda ekkor 20 méter távolságra van tőle?

b) Balesetek vizsgálatakor a szakértők a féknyom hosszából állapítják meg az autó sebességét, mellyel a fékezés megkezdésekor haladt. Egy autó (száraz útviszonyok között) a fékezés megkezdésétől kezdve a teljes megállásig 40 méteres féknyomot hagyott. Hány m/s volt az autó sebessége a fékezés megkezdésekor?

Az akadály észlelésétől az autó megállásáig megtett út a **féktávolság**. Ez két részből tevődik össze: **a sofőr reakcióideje alatt megtett út**ból és a **fékút**ból.
A sofőr reakcióideje az észlelés és a fékezés megkezdése között eltelő idő; ezalatt az autó változatlan sebességgel halad. A fékezés megkezdésétől az autó megállásáig megtett utat nevezzük fékútnak.
Havas, jeges úton 1,5 m/s²-re csökken a lassulás, ekkor a fékezés során a pillanatnyi sebességet leíró összefüggés alakja megváltozik: $v(x)=\sqrt{v_0^2-2\cdot 1{,}5\cdot x}$.

c) Tegyük fel, hogy egy sofőr reakcióideje 0,8 másodperc. Számítsa ki, hogy mekkora a száraz útviszonyok között 15 m/s (54 km/h) sebességgel haladó autó **féktávolsága**! Havas-jeges úton haladva mekkora sebesség esetén lesz ugyanekkora a féktávolság?

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. **a)** Határozza meg az *f*: **R** → **R**, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ függvényben az a, b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk az alábbiakat:

(1) $f(0)=1$;
(2) $f(1)=0$;
(3) $f'(2)=f''(1)$ (az *f* első deriváltjának $x = 2$-ben vett értéke megegyezik az *f* második deriváltjának $x = 1$-ben vett értékével).

b) Igazolja, hogy az $y=x^3-4x^2+2x+3$ és az $y=x^3+3$ egyenletű görbének két közös pontja van, és számítsa ki a görbék által közbezárt síkidom területét!

a)	10 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

<table>
<tr><td></td><td rowspan="2">a feladat sorszáma</td><td colspan="4">pontszám</td></tr>
<tr><td>maximális</td><td>elért</td><td>maximális</td><td>elért</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I. rész</td><td>1.</td><td>14</td><td></td><td rowspan="4">51</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II. rész</td><td></td><td>16</td><td></td><td rowspan="4">64</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">← nem választott feladat</td></tr>
<tr><td colspan="4">Az írásbeli vizsgarész pontszáma</td><td>115</td><td></td></tr>
</table>

dátum | javító tanár

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">pontszáma egész számra kerekítve</td></tr>
<tr><td>elért</td><td>programba beírt</td></tr>
<tr><td>I. rész</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II. rész</td><td></td><td></td></tr>
</table>

dátum | dátum

javító tanár | jegyző