ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

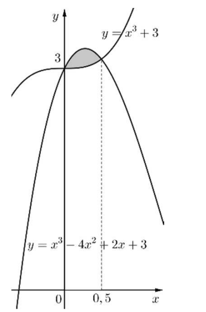
Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

9. a)		
$f(0) = c$, ezért $c = 1$, továbbá	1 pont	
$f(1) = 0$ miatt $a + b + 2 = 0$.	1 pont	
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$	1 pont	
$f''(x) = 6x + 2a$	1 pont	
$f'(2) = 12 + 4a + b$ és $f''(1) = 6 + 2a$	1 pont	
A feltétel szerint $12 + 4a + b = 6 + 2a$,	1 pont	
amiből $2a + b + 6 = 0$.	1 pont	
Az $\begin{cases} a+b+2=0 \\ 2a+b+6=0 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása $a = -4$, $b = 2$.	2 pont	
Ellenőrzés: Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ függvény minden feltételnek megfelel: $f(0) = 1$, $f(1) = 1 - 4 + 2 + 1 = 0$, $f'(2) = f''(1)$ $(= -2)$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

9. b)		
Az $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3$ egyenletből $-4x^2 + 2x = 0$ adódik.	1 pont	
Ennek az egyenletnek valóban két valós gyöke van: a 0 és a 0,5. (A metszéspontok (0; 3) és (0,5; 3,125).)	1 pont	
A kérdezett területet az $\left\lvert \int_0^{0,5} (x^3 - 4x^2 + 2x + 3 - (x^3 + 3))dx \right\rvert$ értéke adja meg.	1 pont	$\int_0^{0,5} (x^3 - 4x^2 + 2x + 3)dx - \int_0^{0,5} (x^3 + 3)dx$
$\left\lvert \int_0^{0,5} (-4x^2 + 2x)dx \right\rvert = \left\lvert \left[-\frac{4x^3}{3} + x^2 \right]_0^{0,5} \right\rvert = \left\lvert -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 0 \right\rvert =$	2 pont	*Az integrálok kiszámított értékével:* $\frac{307}{192} - \frac{97}{64} = \frac{1}{12}$.
$= \frac{1}{12}$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a) első megoldás		
A legkisebb elérhető összeg 7, így az 1-esek mellett vagy 1 db 3-ast, vagy 2 db 2-est kell dobni.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
6 db 1-est és 1 db 3-ast 7-féleképpen dobhatunk.	1 pont	
5 db 1-est és 2 db 2-est $\binom{7}{2}$(= 21)-féleképpen dobhatunk.	1 pont	$\frac{7!}{2!\cdot 5!}$
Összesen 7 + 21 = 28 a lehetőségek száma.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. a) második megoldás		
A legkisebb elérhető összeg 7, a maradék 2 értéket kell „szétosztanunk” a 7 dobás között.	1 pont	
7-ből választunk ki 2 dobást, a kiválasztás sorrendje nem számít, és ismétlődés lehetséges. Hét elem másodosztályú ismétléses kombinációinak számát kell meghatároznunk.	1 pont	
Ezek száma $\binom{7+2-1}{2}=28$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

1. b)		
Az adatok nagyság szerint rendezve: 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5. A medián 1-es, 2-es vagy 3-as dobás esetén 3 lesz, míg 4-es, 5-ös vagy 6-os esetén 3,5.	2 pont	
Az első 7 dobás összege 23, így az 1-es, 2-es, … , 6-os dobások után az átlag rendre $\frac{24}{8}(=3), \frac{25}{8}, \frac{26}{8}, \frac{27}{8}, \frac{28}{8}(=3{,}5), \frac{29}{8}$ lesz.	2 pont	
Tehát 2-es, 3-as, illetve 6-os dobás esetén lesz az átlag nagyobb, mint a medián.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. a) első megoldás		
(A szöveg szerint $v_0 = 18$ m/s és $x = 20$ m.) Ezekkel az adatokkal $v(20) = \sqrt{18^2 - 15\cdot 20} =$	2 pont	
$=\sqrt{24} \approx 4{,}9$ (m/s) > 0.	1 pont	
Tehát 20 méter fékezés után kb. 4,9 m/s (≈ 17,6 km/h) sebességgel halad az autó, azaz nem tud megállni.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. a) második megoldás		
(A szöveg szerint $v_0 = 18$ m/s.) $v(x) = 0$ m/s, ha $18^2 - 15x = 0$.	2 pont	
Ekkor $x = \frac{18^2}{15} = 21{,}6$ (m),	1 pont	
tehát a fékútja nagyobb 20 méternél. Nem tud megállni.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

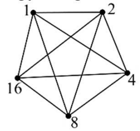
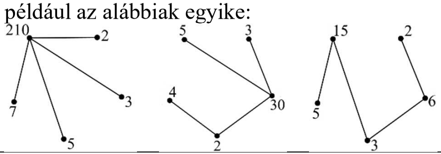
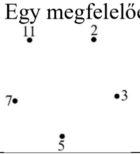
8. b)		
(A szöveg szerint megálláskor $x = 40$ m.) $v(40) = 0$ m/s, ha $v_0^2 - 15\cdot 40 = 0$.	2 pont	
Innen $v_0 \approx 24{,}5$ m/s (≈ 88 km/h) volt az autó sebessége a fékezés megkezdésekor.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. c)		
A sofőr reakcióideje alatt megtett út $15\cdot 0{,}8 = 12$ (m).	1 pont	
A kezdeti sebesség $v_0 = 15$ m/s. $v(x) = 0$ m/s, ha $15^2 - 15x = 0$, ekkor $x = 15$ méter a fékút.	2 pont	
Így száraz útviszonyok között a féktávolság 15 + 12 = 27 méter.	1 pont	
Az autó sebessége havas-jeges úton legyen v (m/s). A sofőr reakcióideje alatt megtett út $v\cdot 0{,}8$ (m).	1 pont	
$v^2 - 3x = 0$, innen $x = \frac{v^2}{3}$ (m) a fékút.	1 pont	
$\frac{v^2}{3} + 0{,}8v = 27$, azaz $\frac{v^2}{3} + 0{,}8v - 27 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet pozitív megoldása $v \approx 7{,}88$,	1 pont	
azaz havas-jeges úton haladva kb. 7,88 m/s (≈ 28,4 km/h) sebesség esetén lesz ugyanakkora a féktávolság, mint száraz úton, 15 m/s (54 km/h) sebességnél.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. b) második megoldás

Komplementer módszert használunk. A H halmaz egy H' részhalmazában az elemek szorzata akkor nem lesz osztható 9-cel, ha $9 \notin H'$, továbbá a 3 és a 6 közül legalább az egyik nem eleme H'-nek.	1 pont	
Ha $9 \notin H'$ és $3 \notin H'$, akkor H másik 8 eleméről szabadon eldönthetjük, hogy eleme-e H'-nek vagy nem. Így ilyen részhalmazból $2^8 = 256$ darab van.	1 pont	*$2^7 = 128$ olyan részhalmaza van H-nak, melyre $9 \notin H'$, $3 \notin H'$ és $6 \in H'$.*
Ugyanígy 256 olyan részhalmaza van H-nak, melynek sem a 9 sem a 6 nem eleme.	1 pont	*Ugyanennyi olyan részhalmaz van, melyre $9 \notin H'$, $3 \in H'$ és $6 \notin H'$, illetve olyan is, melyre $9 \notin H'$, $3 \notin H'$ és $6 \notin H'$.*
Így viszont kétszer számoltuk azokat a részhalmazokat, melyeknek sem a 9, sem a 3, sem a 6 nem eleme. Ezekből $2^7 = 128$ darab van, így a nem megfelelő részhalmazok száma (256 + 256 – 128 =) 384.	1 pont	*A nem megfelelő részhalmazok száma $3 \cdot 2^7 = 384$.*
H-nak összesen $2^{10} = 1024$ részhalmaza van, így a megfelelő részhalmazok száma (1024 – 384 =) 640.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. c)

Egy megfelelően számozott teljes gráf, például: 	2 pont	
Egy megfelelően számozott fagráf, például az alábbiak egyike: 	2 pont	
Egy megfelelően számozott üres gráf, például: 	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések: 1. Ha a vizsgázó valamelyik esetben jó számokat ír a pontok mellé, de hibázik az élek berajzolásában, akkor arra az esetre 1 pontot kapjon.
2. A teljes gráf és egy fagráf felrajzolásáért – megfelelő számozás nélkül – nem jár pont.

1. c) első megoldás

Az összes eset száma $6 \cdot 6 = 36$.	1 pont	(táblázat lent)
Ha az első dobás 1-es, akkor a második dobás 5-féle lehet (2, 3, 4, 5, 6); ha az első dobás 2-es, akkor 4; ha 3-as, akkor 3; ha 4-es, akkor 2; ha 5-ös akkor 1 (ha 6-os, akkor 0) lehetőség van. A kedvező esetek száma (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) 15.	2 pont	
A kérdezett valószínűség $\frac{15}{36}$ (≈ 0,417).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

	1	2	3	4	5	6
1		×	×	×	×	×
2			×	×	×	×
3				×	×	×
4					×	×
5						×
6						

1. c) második megoldás

$\frac{1}{6}$ annak a valószínűsége, hogy a két dobott szám egyenlő.	1 pont	
Ugyanakkora valószínűséggel lesz az első, illetve a második dobás a nagyobb,	1 pont	
ezért annak a valószínűsége, hogy a második dobás a nagyobb: $\frac{1-\frac{1}{6}}{2} = \frac{5}{12}$ (≈ 0,417).	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. a)

(1) hamis (2) igaz (3) hamis (4) hamis	3 pont	*3 jó válaszért 2 pont, 2 jó válaszért 1 pont jár. 2-nél kevesebb jó válasz esetén nem jár pont.*
Összesen:	**3 pont**	

2. b)

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13 - c$	2 pont	
Ha $c \le 12$, akkor $13 - c > 0$, és így az egyenlet egy ((–2; 3) középpontú, $\sqrt{13-c}$ sugarú) kör egyenlete.	1 pont	
Az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

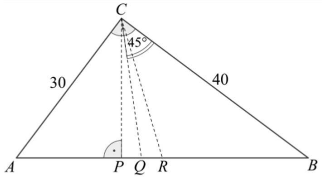
2. c)

Az állítás megfordítása: Ha $x^2 + 4x + y^2 - 6y + c = 0$ egy kör egyenlete, akkor $c \le 12$.	1 pont	*Más, ekvivalens megfogalmazás is elfogadható.*
Egy ellenpélda $c = 12,75$ (ekkor a kör sugara $\sqrt{13-c} = 0,5$).	1 pont	*Ellenpélda:* $12 < c < 13$.
A megfordított állítás tehát hamis.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. a)

Jelölje a mértani sorozat hányadosát q, a háromszög harmadik oldalának hosszát pedig cm-ben mérve x. (Három esetet vizsgálunk x hossza alapján.) Ha $x < 12$, akkor $\frac{x}{12} = \frac{12}{27}$, innen $x = \frac{16}{3}$ ($\approx 5{,}33$).	1 pont	*$x < 12$ nem lehet, mert akkor $x + 12 < 27$ miatt nem létezne háromszög.*
Ha $x > 27$, akkor $\frac{x}{27} = \frac{27}{12}$, innen $x = \frac{243}{4}$ ($= 60{,}75$).	1 pont	*$x > 27$ esetén $q > 2$, tehát a harmadik oldal nagyobb lenne $2 \cdot 27 = 54$-nél. $12 + 27 < 54$, így ilyen háromszög nem létezik.*
Ebben a két esetben nem kapunk háromszöget, mert nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.	1 pont	
Ha $12 < x < 27$, akkor $\frac{x}{12} = \frac{27}{x}$, innen $x = \sqrt{12 \cdot 27} = 18$ ($x > 0$).	1 pont	
$x = 18$ cm megfelelő (mert $12 + 18 > 27$).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b)

 (Először az AB, AP, AQ, AR szakaszok hosszát határozzuk meg.) A Pitagorasz-tételből $AB = 50$,	1 pont	
ezért $AR = RB$ ($= AB : 2$) $= 25$.	1 pont	
A befogótételből $AP \cdot AB = AC^2$, ezért $AP = 900 : 50 = 18$.	2 pont	$BP = 32$
A szögfelezőtétel miatt $AQ : QB = 3 : 4$, ezért $AQ = \frac{3}{7} \cdot AB = \frac{150}{7}$.	2 pont	$BQ = \frac{200}{7}$
$PQ = (AQ - AP = \frac{150}{7} - 18 =) \frac{24}{7}$ $QR = (AR - AQ = 25 - \frac{150}{7} =) \frac{25}{7}$	1 pont	
$AP : PQ : QR : RB = 18 : \frac{24}{7} : \frac{25}{7} : 25 = 126 : 24 : 25 : 175$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a megoldása során közelítő értéket is felhasznál, akkor ezért 1 pontot veszítsen.

6. c)

$1 - p$ annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott termék nem selejtes.	1 pont	
$(1 - p)^{20}$ annak a valószínűsége, hogy a 20 kiválasztott termék egyike sem selejtes.	1 pont	
A szöveg alapján $(1 - p)^{20} \geq 0{,}8$,	1 pont	
azaz ($1 - p \geq 0$ miatt) $p \leq 1 - \sqrt[20]{0{,}8}$.	1 pont	
Legfeljebb kb. 0,011 lehet p értéke.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a)

$35\,700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$	1 pont	
A két szám akkor relatív prím, ha nincs közös prímtényezőjük. Így az öt különböző prímtényezőt kell (a felbontásban szereplő kitevőjével együtt) két csoportra szétosztanunk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első szám különböző prímtényezőinek megadásakor mind az öt prím esetén külön-külön eldönthetjük, hogy kiválasztjuk-e vagy sem. Ez $2^5 = 32$ lehetőség. (Ha egyik tényezőt sem választjuk be, akkor a szám értéke 1.)	2 pont	*Pl. a 17 az egyik szám prímtényezője, elegendő mellé választani a többi prímtényezőt (a nem választott prímek szorzata vagy az 1 a másik szám).*
Így azonban minden számpárt kétszer is megkapunk (a csoportok felcserélhetők), tehát $32 : 2 = 16$ megfelelő számpár létezik.	1 pont	*A másik négy prímtényező „beválasztására” (kitevőjével együtt) $2^4 = 16$ lehetőség van.*
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: A 16 *megfelelő számpár:* (1, 35 700), (3, 11 900), (4, 8925), (7, 5100), (12, 2975), (17, 2100), (21, 1700), (25, 1428), (28, 1275), (51, 700), (68, 525), (75, 476), (84, 425), (100, 357), (119, 300), (175, 204).

7. b) első megoldás

A H halmaz egy H' részhalmazában az elemek szorzata akkor lesz osztható 9-cel, ha vagy $9 \in H'$, vagy pedig ha $9 \notin H'$ és $\{3; 6\} \subseteq H'$ teljesül.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha $9 \in H'$, akkor H másik 9 eleméről szabadon eldönthetjük, hogy eleme-e H'-nek vagy nem. Így ilyen részhalmazból $2^9 = 512$ darab van.	1 pont	
Ha $9 \notin H'$, akkor $3 \in H'$ és $6 \in H'$, és H további 7 eleméről szabadon eldönthetjük, hogy eleme-e H'-nek vagy nem. Így ilyen részhalmazból $2^7 = 128$ darab van.	2 pont	
Összesen tehát ($512 + 128 =$) 640 megfelelő részhalmaza van H-nak.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. a)		
5 liter = 5000 cm^3	1 pont	
$V = r^2\pi m = 15r^2\pi = 5000$	1 pont	
$r = \sqrt{\frac{5000}{15\pi}} \approx 10{,}3$ cm a lábos alapkörének a sugara.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. b)		
$V = r^2\pi m = 5000$, innen $m = \frac{5000}{r^2\pi}$.	1 pont	
(A felül nyitott forgáshenger felszínét kell minimalizálni.) $A = r^2\pi + 2r\pi m = r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{5000}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{10\,000}{r}$	2 pont	
A pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(r) = r^2\pi + \frac{10\,000}{r}$ függvény deriváltfüggvénye $f'(r) = 2r\pi - \frac{10000}{r^2}$.	1 pont*	
(Az *f* függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.) $f'(r) = 0$, innen $r = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}} \approx 11{,}7$ cm.	2 pont*	
$r < \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$ esetén $f'(r) < 0$, $r > \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$ esetén $f'(r) > 0$, így ezen a helyen az *f* függvénynek minimuma van.	1 pont*	$f''(r) = 2\pi + \frac{20\,000}{r^3}$ $f''\left(\sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}\right) > 0$
A lehető legkevesebb zománcra akkor van szükség, ha a lábos alapkörének sugara kb. 11,7 cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések: 1. Ekkor m = r, a szükséges zománcmennyiség pedig kb. 1285 cm^2.
*2. A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

$A(r) = r^2\pi + \frac{10\,000}{r} = r^2\pi + \frac{5000}{r} + \frac{5000}{r}$.	1 pont	
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján: $A(r) \ge 3 \cdot \sqrt[3]{r^2\pi \cdot \frac{5000}{r} \cdot \frac{5000}{r}} = 3 \cdot \sqrt[3]{25\,000\,000\pi}$.	2 pont	
Egyenlőség pontosan akkor lehet, ha $r^2\pi = \frac{5000}{r}$, vagyis $r = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$ ($\approx 11{,}7$).	1 pont	

4. a)		
A repülőgép menetideje $\frac{1200}{750} = 1{,}6$ óra.	1 pont	
Ezalatt $1{,}6 \cdot 2{,}4 = 3{,}84$ tonna üzemanyagot fogyaszt el,	1 pont	
ennek ára $3{,}84 \cdot 900 = 3456$ euró.	1 pont	
Ekkora összegért 150 személyt szállít el 1200 km-re, tehát 1 személy 1 kilométerre történő elszállításának költsége kb. $\frac{3456}{150 \cdot 1200} = 0{,}0192$ euró.	1 pont	
A személyautó 6 liter üzemanyagot fogyaszt el 100 km távolságon, ennek ára $6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2$ euró.	1 pont	
Ekkora összegért 5 személyt szállít el 100 km-re, tehát 1 személy 1 kilométerre történő elszállításának költsége kb. $\frac{7{,}2}{5 \cdot 100} = 0{,}0144$ euró.	1 pont	
Csak az üzemanyagköltséget tekintve tehát ez a személyautó gazdaságosabb a vizsgált repülőjáratnál.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. b)		
Jelölje az eladott menük számát *x*. Ekkor a menün kívül eladott szendvicsek száma $\frac{x}{2}$, az üdítők száma pedig $x + 10$.	2 pont	
A nem menü eladásból származó bevétel (euróban) $\frac{x}{2} \cdot 3{,}5 + (x+10) \cdot 3 + 28 \cdot 2{,}5 = 4{,}75x + 100$.	1 pont	
A menük eladásából származó bevétel $5{,}5x$, így $2 \cdot 5{,}5x = 4{,}75x + 100$.	1 pont	
Innen $6{,}25x = 100$, azaz $x = 16$.	1 pont	
A teljes bevétel (16 menü, ezen kívül 8 szendvics és 26 üdítő, valamint 28 kávé eladási ára) $16 \cdot 5{,}5 + 8 \cdot 3{,}5 + 26 \cdot 3 + 28 \cdot 2{,}5 = 264$ euró.	1 pont	
Ellenőrzés: A menüből származó bevétel $5{,}5 \cdot 16 = 88$ euró, ez valóban harmada a teljes bevételnek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

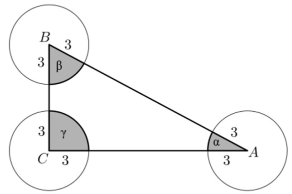
II.

5. a)		
A háromszög legnagyobb szöge az $a + 2$ hosszúságú oldallal szemben van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Erre a szögre felírva a koszinusztételt: $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(a+1)} =$	1 pont	
$= \dfrac{a^2 - 2a - 3}{2a(a+1)} =$	1 pont	
$= \dfrac{(a+1)(a-3)}{2a(a+1)} =$	2 pont*	
$= \dfrac{a-3}{2a}$ valóban ($a \neq -1$).	1 pont*	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Belátjuk, hogy $\dfrac{a^2 - 2a - 3}{2a(a+1)} = \dfrac{a-3}{2a}$.	1 pont	
A bal oldali tört (pozitív) nevezőjével szorozva: $a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1)$.	1 pont	
Ez azonosság. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az állítást beláttuk.	1 pont	

5. b)		
$\cos 120° = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{a-3}{2a}$,	1 pont	
innen $a = 1{,}5$.	1 pont	
A háromszög oldalainak hossza 1,5; 2,5 és 3,5 egység (és ilyen háromszög valóban létezik).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. c)		
 Használjuk az ábra jelöléseit! (Mindhárom oldal hosszabb 6 cm-nél, ezért) a mindhárom csúcstól legalább 3 cm távolságra lévő pontok az ABC háromszög „világos” részében (és annak határán) vannak. A kérdezett valószínűség e rész területének és az ABC háromszög területének a hányadosa.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
A derékszögű háromszög területe $\dfrac{8 \cdot 15}{2} = 60$ (cm^2).	1 pont	
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ezért a három körcikk együttes területe egy 3 cm sugarú kör területének a fele,	2 pont*	
vagyis $4{,}5\pi \approx 14{,}14$ (cm^2).	1 pont*	
Így a nem sötétített rész területe ($60 - 4{,}5\pi \approx$) 45,86 (cm^2).	1 pont	$1 - \dfrac{4{,}5\pi}{60} \approx 0{,}764$
A keresett valószínűség tehát $\dfrac{45{,}86}{60} \approx 0{,}764$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés:
*A *-gal jelzett pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó kiszámítja a háromszög hegyesszögeit:* $\alpha \approx 28{,}07°$, $\beta \approx 61{,}93°$ *(1 pont), továbbá a körcikkek területének összegét: az A középpontú,* α *középponti szögű körcikk területe kb.* 2,205 cm^2*, a B középpontú,* β *középponti szögű körcikk területe kb.* 4,864 cm^2*, a C középpontú negyedkör területe pedig körülbelül* 7,069 cm^2 *(1 pont). A sötétített rész területe kb.* (2,205 + 4,864 + 7,069 ≈) 14,14 cm^2 *(1 pont).*