ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. május 3.

# MATEMATIKA

# EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

**minden vizsgázó számára**

# JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

# I.

| **1. a)** első megoldás | | |
|---|---|---|
| A legkisebb elérhető összeg 7, így az 1-esek mellett vagy 1 db 3-ast, vagy 2 db 2-est kell dobni. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| 6 db 1-est és 1 db 3-ast 7-féleképpen dobhatunk. | 1 pont | |
| 5 db 1-est és 2 db 2-est $\binom{7}{2}$(= 21)-féleképpen dobhatunk. | 1 pont | $\frac{7!}{2!\cdot 5!}$ |
| Összesen 7 + 21 = 28 a lehetőségek száma. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **1. a)** második megoldás | | |
|---|---|---|
| A legkisebb elérhető összeg 7, a maradék 2 értéket kell „szétosztanunk” a 7 dobás között. | 1 pont | |
| 7-ből választunk ki 2 dobást, a kiválasztás sorrendje nem számít, és ismétlődés lehetséges.<br>Hét elem másodosztályú ismétléses kombinációinak számát kell meghatároznunk. | 1 pont | |
| Ezek száma $\binom{7+2-1}{2}=28$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.*

| **1. b)** | | |
|---|---|---|
| Az adatok nagyság szerint rendezve: 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5.<br>A medián 1-es, 2-es vagy 3-as dobás esetén 3 lesz, míg 4-es, 5-ös vagy 6-os esetén 3,5. | 2 pont | |
| Az első 7 dobás összege 23,<br>így az 1-es, 2-es, … , 6-os dobások után az átlag rendre $\frac{24}{8}(=3), \frac{25}{8}, \frac{26}{8}, \frac{27}{8}, \frac{28}{8}(=3{,}5), \frac{29}{8}$ lesz. | 2 pont | |
| Tehát 2-es, 3-as, illetve 6-os dobás esetén lesz az átlag nagyobb, mint a medián. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

## 1. c) első megoldás

| | | |
|---|---|---|
| Az összes eset száma $6 \cdot 6 = 36$. | 1 pont | |
| Ha az első dobás 1-es, akkor a második dobás 5-féle lehet (2, 3, 4, 5, 6);<br>ha az első dobás 2-es, akkor 4; ha 3-as, akkor 3;<br>ha 4-es, akkor 2; ha 5-ös akkor 1 (ha 6-os, akkor 0) lehetőség van.<br>A kedvező esetek száma (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) 15. | 2 pont | (lásd a táblázatot alább) |
| A kérdezett valószínűség $\frac{15}{36}$ (≈ 0,417). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | × | × | × | × | × |
| 2 | | | × | × | × | × |
| 3 | | | | × | × | × |
| 4 | | | | | × | × |
| 5 | | | | | | × |
| 6 | | | | | | |

## 1. c) második megoldás

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{6}$ annak a valószínűsége, hogy a két dobott szám egyenlő. | 1 pont | |
| Ugyanakkora valószínűséggel lesz az első, illetve a második dobás a nagyobb, | 1 pont | |
| ezért annak a valószínűsége, hogy a második dobás a nagyobb: $\frac{1-\frac{1}{6}}{2} = \frac{5}{12}$ (≈ 0,417). | 2 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

## 2. a)

| | | |
|---|---|---|
| (1) hamis<br>(2) igaz<br>(3) hamis<br>(4) hamis | 3 pont | *3 jó válaszért 2 pont, 2 jó válaszért 1 pont jár.*<br>*2-nél kevesebb jó válasz esetén nem jár pont.* |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

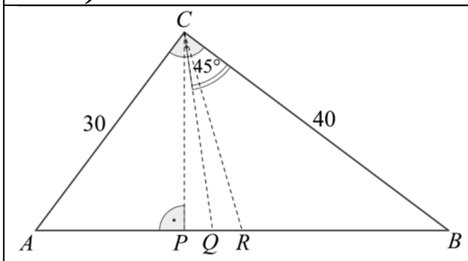
## 2. b)

| | | |
|---|---|---|
| $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13 - c$ | 2 pont | |
| Ha $c \le 12$, akkor $13 - c > 0$, és így az egyenlet egy ((–2; 3) középpontú, $\sqrt{13-c}$ sugarú) kör egyenlete. | 1 pont | |
| Az állítás igaz. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

## 2. c)

| | | |
|---|---|---|
| Az állítás megfordítása: Ha $x^2 + 4x + y^2 - 6y + c = 0$ egy kör egyenlete, akkor $c \le 12$. | 1 pont | *Más, ekvivalens megfogalmazás is elfogadható.* |
| Egy ellenpélda $c = 12{,}75$ (ekkor a kör sugara $\sqrt{13-c} = 0{,}5$). | 1 pont | *Ellenpélda:* $12 < c < 13$. |
| A megfordított állítás tehát hamis. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| | | |
|---|---|---|
| **3. a)** | | |
| Jelölje a mértani sorozat hányadosát $q$, a háromszög harmadik oldalának hosszát pedig cm-ben mérve $x$. (Három esetet vizsgálunk $x$ hossza alapján.) Ha $x < 12$, akkor $\frac{x}{12} = \frac{12}{27}$, innen $x = \frac{16}{3}$ $(\approx 5{,}33)$. | 1 pont | *$x < 12$ nem lehet, mert akkor $x + 12 < 27$ miatt nem létezne háromszög.* |
| Ha $x > 27$, akkor $\frac{x}{27} = \frac{27}{12}$, innen $x = \frac{243}{4}$ $(= 60{,}75)$. | 1 pont | *$x > 27$ esetén $q > 2$, tehát a harmadik oldal nagyobb lenne $2 \cdot 27 = 54$-nél. $12 + 27 < 54$, így ilyen háromszög nem létezik.* |
| Ebben a két esetben nem kapunk háromszöget, mert nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. | 1 pont | |
| Ha $12 < x < 27$, akkor $\frac{x}{12} = \frac{27}{x}$, innen $x = \sqrt{12 \cdot 27} = 18$ $(x > 0)$. | 1 pont | |
| $x = 18$ cm megfelelő (mert $12 + 18 > 27$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| | | |
|---|---|---|
| **3. b)** | | |
|  (Először az $AB$, $AP$, $AQ$, $AR$ szakaszok hosszát határozzuk meg.) A Pitagorasz-tételből $AB = 50$, | 1 pont | |
| ezért $AR = RB$ $(= AB : 2) = 25$. | 1 pont | |
| A befogótételből $AP \cdot AB = AC^2$, ezért $AP = 900 : 50 = 18$. | 2 pont | $BP = 32$ |
| A szögfelezőtétel miatt $AQ : QB = 3 : 4$, ezért $AQ = \frac{3}{7} \cdot AB = \frac{150}{7}$. | 2 pont | $BQ = \frac{200}{7}$ |
| $PQ = (AQ - AP = \frac{150}{7} - 18 =) \frac{24}{7}$<br>$QR = (AR - AQ = 25 - \frac{150}{7} =) \frac{25}{7}$ | 1 pont | |
| $AP : PQ : QR : RB = 18 : \frac{24}{7} : \frac{25}{7} : 25 = 126 : 24 : 25 : 175$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a megoldása során közelítő értéket is felhasznál, akkor ezért 1 pontot veszítsen.*

| **4. a)** | | |
|---|---|---|
| A repülőgép menetideje $\frac{1200}{750} = 1{,}6$ óra. | 1 pont | |
| Ezalatt $1{,}6 \cdot 2{,}4 = 3{,}84$ tonna üzemanyagot fogyaszt el, | 1 pont | |
| ennek ára $3{,}84 \cdot 900 = 3456$ euró. | 1 pont | |
| Ekkora összegért 150 személyt szállít el 1200 km-re, tehát 1 személy 1 kilométerre történő elszállításának költsége kb. $\frac{3456}{150 \cdot 1200} = 0{,}0192$ euró. | 1 pont | |
| A személyautó 6 liter üzemanyagot fogyaszt el 100 km távolságon, ennek ára $6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2$ euró. | 1 pont | |
| Ekkora összegért 5 személyt szállít el 100 km-re, tehát 1 személy 1 kilométerre történő elszállításának költsége kb. $\frac{7{,}2}{5 \cdot 100} = 0{,}0144$ euró. | 1 pont | |
| Csak az üzemanyagköltséget tekintve tehát ez a személyautó gazdaságosabb a vizsgált repülőjáratnál. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **4. b)** | | |
|---|---|---|
| Jelölje az eladott menük számát $x$. Ekkor a menün kívül eladott szendvicsek száma $\frac{x}{2}$, az üdítők száma pedig $x + 10$. | 2 pont | |
| A nem menü eladásból származó bevétel (euróban) $\frac{x}{2} \cdot 3{,}5 + (x+10) \cdot 3 + 28 \cdot 2{,}5 = 4{,}75x + 100$. | 1 pont | |
| A menük eladásából származó bevétel $5{,}5x$, így $2 \cdot 5{,}5x = 4{,}75x + 100$. | 1 pont | |
| Innen $6{,}25x = 100$, azaz $x = 16$. | 1 pont | |
| A teljes bevétel (16 menü, ezen kívül 8 szendvics és 26 üdítő, valamint 28 kávé eladási ára) $16 \cdot 5{,}5 + 8 \cdot 3{,}5 + 26 \cdot 3 + 28 \cdot 2{,}5 = 264$ euró. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: A menüből származó bevétel $5{,}5 \cdot 16 = 88$ euró, ez valóban harmada a teljes bevételnek. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

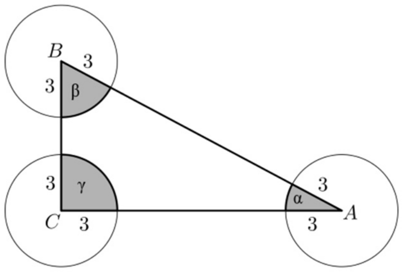
# II.

| 5. a) | | |
|---|---|---|
| A háromszög legnagyobb szöge az $a + 2$ hosszúságú oldallal szemben van. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Erre a szögre felírva a koszinusztételt: $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(a+1)} =$ | 1 pont | |
| $= \dfrac{a^2 - 2a - 3}{2a(a+1)} =$ | 1 pont | |
| $= \dfrac{(a+1)(a-3)}{2a(a+1)} =$ | 2 pont* | |
| $= \dfrac{a-3}{2a}$ valóban ($a \neq -1$). | 1 pont* | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| Belátjuk, hogy $\dfrac{a^2-2a-3}{2a(a+1)} = \dfrac{a-3}{2a}$. | 1 pont | |
| A bal oldali tört (pozitív) nevezőjével szorozva: $a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1)$. | 1 pont | |
| Ez azonosság. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az állítást beláttuk. | 1 pont | |

| 5. b) | | |
|---|---|---|
| $\cos 120° = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{a-3}{2a}$, | 1 pont | |
| innen $a = 1{,}5$. | 1 pont | |
| A háromszög oldalainak hossza 1,5; 2,5 és 3,5 egység (és ilyen háromszög valóban létezik). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **5. c)** | | |
|---|---|---|
| <br>Használjuk az ábra jelöléseit!<br>(Mindhárom oldal hosszabb 6 cm-nél, ezért) a mindhárom csúcstól legalább 3 cm távolságra lévő pontok az *ABC* háromszög „világos” részében (és annak határán) vannak. A kérdezett valószínűség e rész területének és az *ABC* háromszög területének a hányadosa. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.* |
| A derékszögű háromszög területe $\frac{8\cdot 15}{2} = 60$ (cm$^2$). | 1 pont | |
| $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ezért a három körcikk együttes területe egy 3 cm sugarú kör területének a fele, | 2 pont* | |
| vagyis $4{,}5\pi \approx 14{,}14$ (cm$^2$). | 1 pont* | |
| Így a nem sötétített rész területe<br>($60 - 4{,}5\pi \approx$) 45,86 (cm$^2$). | 1 pont | $1 - \frac{4{,}5\pi}{60} \approx 0{,}764$ |
| A keresett valószínűség tehát $\frac{45{,}86}{60} \approx 0{,}764$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés:*
*A *-gal jelzett pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó kiszámítja a háromszög hegyesszögeit:* $\alpha \approx 28{,}07°$, $\beta \approx 61{,}93°$ *(1 pont), továbbá a körcikkek területének összegét: az A középpontú,* $\alpha$ *középponti szögű körcikk területe kb.* 2,205 cm$^2$*, a B középpontú,* $\beta$ *középponti szögű körcikk területe kb.* 4,864 cm$^2$*, a C középpontú negyedkör területe pedig körülbelül* 7,069 cm$^2$ *(1 pont). A sötétített rész területe kb.* (2,205 + 4,864 + 7,069 ≈) 14,14 cm$^2$ *(1 pont).*

| 6. a) | | |
|---|---|---|
| 5 liter = 5000 $cm^3$ | 1 pont | |
| $V = r^2\pi m = 15r^2\pi = 5000$ | 1 pont | |
| $r = \sqrt{\frac{5000}{15\pi}} \approx 10{,}3$ cm a lábos alapkörének a sugara. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 6. b) | | |
|---|---|---|
| $V = r^2\pi m = 5000$, innen $m = \frac{5000}{r^2\pi}$. | 1 pont | |
| (A felül nyitott forgáshenger felszínét kell minimalizálni.) $A = r^2\pi + 2r\pi m = r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{5000}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{10\,000}{r}$ | 2 pont | |
| A pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(r) = r^2\pi + \frac{10\,000}{r}$ függvény deriváltfüggvénye $f'(r) = 2r\pi - \frac{10000}{r^2}$. | 1 pont* | |
| (Az $f$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.) $f'(r) = 0$, innen $r = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}} \approx 11{,}7$ cm. | 2 pont* | |
| $r < \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$ esetén $f'(r) < 0$, $r > \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$ esetén $f'(r) > 0$, így ezen a helyen az $f$ függvénynek minimuma van. | 1 pont* | $f''(r) = 2\pi + \frac{20\,000}{r^3}$ $f''\left(\sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}\right) > 0$ |
| A lehető legkevesebb zománcra akkor van szükség, ha a lábos alapkörének sugara kb. 11,7 cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

*Megjegyzések: 1. Ekkor m = r, a szükséges zománcmennyiség pedig kb.* 1285 $cm^2$.
*2. A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| $A(r) = r^2\pi + \frac{10\,000}{r} = r^2\pi + \frac{5000}{r} + \frac{5000}{r}$. | 1 pont | |
| A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján: $A(r) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{r^2\pi \cdot \frac{5000}{r} \cdot \frac{5000}{r}} = 3 \cdot \sqrt[3]{25\,000\,000\pi}$. | 2 pont | |
| Egyenlőség pontosan akkor lehet, ha $r^2\pi = \frac{5000}{r}$, vagyis $r = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$ (≈ 11,7). | 1 pont | |

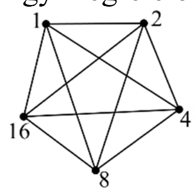
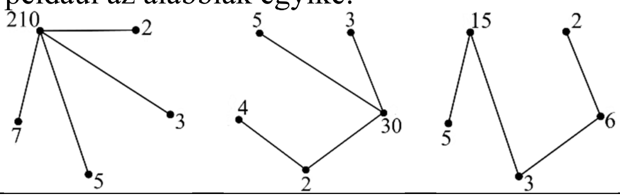
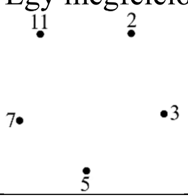
| **6. c)** | | |
|---|---|---|
| $1 - p$ annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott termék nem selejtes. | 1 pont | |
| $(1 - p)^{20}$ annak a valószínűsége, hogy a 20 kiválasztott termék egyike sem selejtes. | 1 pont | |
| A szöveg alapján $(1 - p)^{20} \geq 0{,}8$, | 1 pont | |
| azaz ($1 - p \geq 0$ miatt) $p \leq 1 - \sqrt[20]{0{,}8}$ . | 1 pont | |
| Legfeljebb kb. 0,011 lehet $p$ értéke. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **7. a)** | | |
|---|---|---|
| $35\,700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$ | 1 pont | |
| A két szám akkor relatív prím, ha nincs közös prímtényezőjük. Így az öt különböző prímtényezőt kell (a felbontásban szereplő kitevőjével együtt) két csoportra szétosztanunk. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Az első szám különböző prímtényezőinek megadásakor mind az öt prím esetén külön-külön eldönthetjük, hogy kiválasztjuk-e vagy sem. Ez $2^5 = 32$ lehetőség. (Ha egyik tényezőt sem választjuk be, akkor a szám értéke 1.) | 2 pont | *Pl. a* 17 *az egyik szám prímtényezője, elegendő mellé választani a többi prímtényezőt (a nem választott prímek szorzata vagy az* 1 *a másik szám).* |
| Így azonban minden számpárt kétszer is megkapunk (a csoportok felcserélhetők), tehát $32 : 2 = 16$ megfelelő számpár létezik. | 1 pont | *A másik négy prímtényező „beválasztására” (kitevőjével együtt)* $2^4 = 16$ *lehetőség van.* |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzés: A* 16 *megfelelő számpár:* (1, 35 700), (3, 11 900), (4, 8925), (7, 5100), (12, 2975), (17, 2100), (21, 1700), (25, 1428), (28, 1275), (51, 700), (68, 525), (75, 476), (84, 425), (100, 357), (119, 300), (175, 204).

| **7. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A $H$ halmaz egy $H'$ részhalmazában az elemek szorzata akkor lesz osztható 9-cel, ha vagy $9 \in H'$, vagy pedig ha $9 \notin H'$ és $\{3; 6\} \subseteq H'$ teljesül. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Ha $9 \in H'$, akkor $H$ másik 9 eleméről szabadon eldönthetjük, hogy eleme-e $H'$-nek vagy nem. Így ilyen részhalmazból $2^9 = 512$ darab van. | 1 pont | |
| Ha $9 \notin H'$, akkor $3 \in H'$ és $6 \in H'$, és $H$ további 7 eleméről szabadon eldönthetjük, hogy eleme-e $H'$-nek vagy nem. Így ilyen részhalmazból $2^7 = 128$ darab van. | 2 pont | |
| Összesen tehát (512 + 128 =) 640 megfelelő részhalmaza van $H$-nak. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **7. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Komplementer módszert használunk. A $H$ halmaz egy $H'$ részhalmazában az elemek szorzata akkor nem lesz osztható 9-cel, ha $9 \notin H'$, továbbá a 3 és a 6 közül legalább az egyik nem eleme $H'$-nek. | 1 pont | |
| Ha $9 \notin H'$ és $3 \notin H'$, akkor $H$ másik 8 eleméről szabadon eldönthetjük, hogy eleme-e $H'$-nek vagy nem. Így ilyen részhalmazból $2^8 = 256$ darab van. | 1 pont | $2^7 = 128$ *olyan részhalmaza van H-nak, melyre* $9 \notin H'$, $3 \notin H'$ és $6 \in H'$. |
| Ugyanígy 256 olyan részhalmaza van $H$-nak, melynek sem a 9 sem a 6 nem eleme. | 1 pont | *Ugyanennyi olyan részhalmaz van, melyre* $9 \notin H'$, $3 \in H'$ és $6 \notin H'$, *illetve olyan is, melyre* $9 \notin H'$, $3 \notin H'$ és $6 \notin H'$. |
| Így viszont kétszer számoltuk azokat a részhalmazokat, melyeknek sem a 9, sem a 3, sem a 6 nem eleme. Ezekből $2^7 = 128$ darab van, így a nem megfelelő részhalmazok száma (256 + 256 – 128 =) 384. | 1 pont | *A nem megfelelő részhalmazok száma* $3 \cdot 2^7 = 384$. |
| $H$-nak összesen $2^{10} = 1024$ részhalmaza van, így a megfelelő részhalmazok száma (1024 – 384 =) 640. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

<table>
<tr><td colspan="3">7. c)</td></tr>
<tr><td>Egy megfelelően számozott teljes gráf, például:<br>
</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Egy megfelelően számozott fagráf,<br>például az alábbiak egyike:<br>
</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Egy megfelelően számozott üres gráf, például:<br>
</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>6 pont</td><td></td></tr>
</table>

*Megjegyzések: 1. Ha a vizsgázó valamelyik esetben jó számokat ír a pontok mellé, de hibázik az élek berajzolásában, akkor arra az esetre 1 pontot kapjon.*
*2. A teljes gráf és egy fagráf felrajzolásáért – megfelelő számozás nélkül – nem jár pont.*

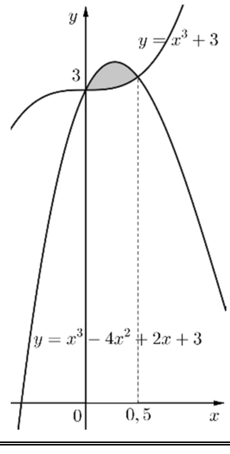
| **8. a)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| (A szöveg szerint $v_0 = 18$ m/s és $x = 20$ m.)<br>Ezekkel az adatokkal $v(20) = \sqrt{18^2 - 15\cdot 20} =$ | 2 pont | |
| $= \sqrt{24} \approx 4{,}9$ (m/s) > 0. | 1 pont | |
| Tehát 20 méter fékezés után kb. 4,9 m/s (≈ 17,6 km/h) sebességgel halad az autó, azaz nem tud megállni. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **8. a)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| (A szöveg szerint $v_0 = 18$ m/s.)<br>$v(x) = 0$ m/s, ha $18^2 - 15x = 0$ . | 2 pont | |
| Ekkor $x = \dfrac{18^2}{15} = 21{,}6$ (m), | 1 pont | |
| tehát a fékútja nagyobb 20 méternél.<br>Nem tud megállni. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **8. b)** | | |
|---|---|---|
| (A szöveg szerint megálláskor $x = 40$ m.)<br>$v(40) = 0$ m/s, ha $v_0^2 - 15\cdot 40 = 0$ . | 2 pont | |
| Innen $v_0 \approx 24{,}5$ m/s (≈ 88 km/h) volt az autó sebessége a fékezés megkezdésekor. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **8. c)** | | |
|---|---|---|
| A sofőr reakcióideje alatt megtett út $15\cdot 0{,}8 = 12$ (m). | 1 pont | |
| A kezdeti sebesség $v_0 = 15$ m/s.<br>$v(x) = 0$ m/s, ha $15^2 - 15x = 0$ ,<br>ekkor $x = 15$ méter a fékút. | 2 pont | |
| Így száraz útviszonyok között a féktávolság<br>15 + 12 = 27 méter. | 1 pont | |
| Az autó sebessége havas-jeges úton legyen $v$ (m/s).<br>A sofőr reakcióideje alatt megtett út $v\cdot 0{,}8$ (m). | 1 pont | |
| $v^2 - 3x = 0$ , innen $x = \dfrac{v^2}{3}$ (m) a fékút. | 1 pont | |
| $\dfrac{v^2}{3} + 0{,}8v = 27$ , azaz $\dfrac{v^2}{3} + 0{,}8v - 27 = 0$ . | 1 pont | |
| Az egyenlet pozitív megoldása $v \approx 7{,}88$, | 1 pont | |
| azaz havas-jeges úton haladva kb. 7,88 m/s (≈ 28,4 km/h) sebesség esetén lesz ugyanakkora a féktávolság, mint száraz úton, 15 m/s (54 km/h) sebességnél. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

| 9. a) | | |
|---|---|---|
| $f(0) = c$, ezért $c = 1$, továbbá | 1 pont | |
| $f(1) = 0$ miatt $a + b + 2 = 0$. | 1 pont | |
| $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ | 1 pont | |
| $f''(x) = 6x + 2a$ | 1 pont | |
| $f'(2) = 12 + 4a + b$ és $f''(1) = 6 + 2a$ | 1 pont | |
| A feltétel szerint $12 + 4a + b = 6 + 2a$, | 1 pont | |
| amiből $2a + b + 6 = 0$. | 1 pont | |
| Az $\begin{cases} a+b+2=0 \\ 2a+b+6=0 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása $a = -4$, $b = 2$. | 2 pont | |
| Ellenőrzés: Az $f$: **R** → **R**, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ függvény minden feltételnek megfelel: $f(0) = 1$, $f(1) = 1 - 4 + 2 + 1 = 0$, $f'(2) = f''(1)$ $(= -2)$ valóban. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **10 pont** | |

| 9. b) | | |
|---|---|---|
| Az $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3$ egyenletből $-4x^2 + 2x = 0$ adódik. | 1 pont | |
| Ennek az egyenletnek valóban két valós gyöke van: a 0 és a 0,5. (A metszéspontok (0; 3) és (0,5; 3,125).) | 1 pont |  |
| A kérdezett területet az $\left\lvert \int_0^{0,5} (x^3 - 4x^2 + 2x + 3 - (x^3 + 3))dx \right\rvert$ értéke adja meg. | 1 pont | $\int_0^{0,5} (x^3 - 4x^2 + 2x + 3)dx - \int_0^{0,5} (x^3 + 3)dx$ |
| $\left\lvert \int_0^{0,5} (-4x^2 + 2x)dx \right\rvert = \left\lvert \left[ -\frac{4x^3}{3} + x^2 \right]_0^{0,5} \right\rvert = \left\lvert -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 0 \right\rvert =$ | 2 pont | *Az integrálok kiszámított értékével:* $\frac{307}{192} - \frac{97}{64} = \frac{1}{12}$. |
| $= \frac{1}{12}$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |