Azonosító jel: | | | | | | | | | | | | | | | |

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2022. május 3. 9:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $9^{x+1}+15\cdot 3^{x}=6$

b) $\frac{1}{4}\cdot \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{8}=0$

a)	6 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	11 pont	

2. **a)** Egy **számtani** sorozat első tagja 5, differenciája 3, az első *n* tag összege pedig 4900. Határozza meg *n* értékét!

b) Egy **mértani** sorozat első és második tagjának összege 6, harmadik és negyedik tagjának összege pedig 96. Adja meg a sorozat első tagját és hányadosát!

a)	5 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	13 pont	

3. Egy társasházban 50-en laknak. A lakók 38%-a nő, 32%-a szemüveges.

a) Legalább, illetve legfeljebb hányan lehetnek a lakók között a nem szemüveges férfiak?

A társasház kertje egy 15 méter hosszú, 10 méter széles téglalap alakú földterület, amely az egyik átlója mentén ketté van osztva: az egyik fele füvesítve van, a másik felén virágágyás található. A füvesített rész derékszögű csúcsában van egy öntöző, amely egy 10 méter sugarú negyedkör alakú területet locsol a kertben.

b) Mekkora az a füvesített terület, amelyet nem ér el az öntöző?

a)	5 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Egy biliárdgolyó készletben található 9 golyó tömegére a következő mérési eredményeket kapták (grammban): 163, 163, 163, 163, 163, 164, 165, 166, 166.
Egy ilyen készletet akkor hitelesítenek a minőségellenőrzésen, ha az alábbi feltételek mindegyikének megfelel:

- minden golyó tömege legalább 160 gramm és legfeljebb 170 gramm;
- a golyók tömegének terjedelme legfeljebb 3 gramm;
- a golyók tömegének szórása legfeljebb 1 gramm.

a) Hitelesíthető-e ez a készlet?

Egy dobozban 3 piros és 7 kék golyó található.

b) Kihúzunk a dobozból egymás után **két** golyót úgy, hogy az elsőként kihúzott golyót a húzás után **nem tesszük vissza**. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott két golyó között lesz piros!

c) Kihúzunk a 10 golyó közül egymás után **három** golyót úgy, hogy a kihúzott golyót a következő húzás előtt mindig **visszatesszük**. Legyen az A esemény az, hogy a kihúzott három golyó közül pontosan kettő piros, a B esemény pedig az, hogy a kihúzott golyók között van piros.
Határozza meg a $P(A|B)$ valószínűséget!

a)	5 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Lali, Pali és Vali egy palacsintázóban ebédelnek. Lali 3 mogyorókrémes, 1 túrós és 2 fahéjas palacsintáért 1500 Ft-ot, Pali 4 mogyorókrémes, 2 túrós és 1 fahéjas palacsintáért 1740 Ft-ot, Vali pedig 1 mogyorókrémes, 2 túrós és 2 fahéjas palacsintáért 1170 Ft-ot fizetett.

a) Mennyibe kerül 1-1 darab a különböző fajta palacsintákból?

Lali vesz még egy lekváros palacsintát 210 Ft-ért. Lali zsebében 100, 50, 20, 10 és 5 Ft-os érmék vannak, mindegyikből több is. Ezek közül 6 érmét választ ki.

b) Igazolja, hogy 6 érmével három különböző módon fizethető ki 210 Ft! (Két fizetést különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik címletű érméből eltérő számút használunk fel a két fizetés során.)

c) Hányféle sorrendben vehet elő Lali 6 olyan érmét a zsebéből, amelyek összege 210 Ft, ha egyesével húzza elő őket? (Az azonos címletű érméket nem különböztetjük meg egymástól.)

a)	8 pont	
b)	5 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Egy egyenlőszárú háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0; 0)$, $B(82; 0)$ és $C(41; 71)$. Géza szerint ez a háromszög szabályos.

a) Határozza meg a háromszög szögeit fokban, három tizedesjegyre kerekítve!

b) Határozza meg a háromszög AC és AB oldalainak arányát négy tizedesjegyre kerekítve!

Egy csonkakúp alapkörének sugara 14 cm, fedőkörének sugara 8 cm, alkotója 10 cm hosszú. Géza szeretné gyorsan megbecsülni a csonkakúp térfogatát, ezért azt egy henger térfogatával közelíti. A közelítő henger alapkörének sugara megegyezik a csonkakúp alap- és fedőköre sugarának számtani közepével, magassága pedig egyenlő a csonkakúp magasságával.

c) Határozza meg Géza közelítésének relatív hibáját! (Relatív hibának nevezzük a közelítő értéknek a pontos értéktől mért százalékos eltérését.)

a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

7. Flóra kétfajta lisztből süt kenyeret. A kenyérhez a recept alapján $5:4$ arányban kell búzaliszt és rozsliszt. Eredetileg 450 gramm búzalisztet és 400 gramm rozslisztet kevert össze, de további, összesen 500 gramm liszt hozzáadásával sikerült elérnie a recept által előírt arányt.

a) A hozzáadott 500 gramm lisztből hány gramm volt a búzaliszt?

Ha egy cég x tonna lisztet állít elő egy nap alatt ($0 < x < 5$), és ezt a mennyiséget el is adja, akkor egy elemzés szerint a napi nyereség értékét az $n(x) = 0{,}8x^2(x-3)(1{,}5-x)$ képlet adja meg, a nyereséget tízezer tallérban számítva. (Negatív helyettesítési érték veszteséget jelent.)

b) Mutassa meg, hogy csak $1{,}5 < x < 3$ esetén nyereséges a napi termelés!

c) Hány tallér az elérhető legnagyobb napi nyereség, és ezt hány tonna liszt (előállítása és eladása) esetén érik el?

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy baráti összejövetelen 7 fiú és 5 lány vett részt, találkozáskor mindenki üdvözölte a többieket. A fiúk kézfogással köszöntek egymásnak, két lány, illetve egy fiú és egy lány pedig öleléssel köszöntötte egymást.

a) Hány olyan találkozás volt, ahol öleléssel köszöntötték egymást?

Egy hatfős baráti társaság tagjai András, Bori, Csaba, Dóra, Ervin és Fanni bajnokságon döntik el, hogy ki a legjobb pingpongos közülük. Mindenki mindenki ellen egy mérkőzést játszik. Amikor 9 mérkőzést már lejátszottak, akkor kiderült, hogy mindegyikük páratlan számú mérkőzésen van túl. András az eddigi egyetlen meccsét Bori ellen játszotta, Csaba még nem játszott Ervin ellen.

b) Játszott-e már Dóra Fanni ellen?

András, Bori, Csaba és Dóra egy szabályos dobókockával dobnak egyet-egyet, és az nyer, aki a legnagyobb olyan számot dobta, amit a többiek nem dobtak (például 6, 6, 4, 1 dobások esetén a 4-est dobó játékos nyer). Ha nincs ilyen szám, akkor nem nyer senki.
Bori 5-öst dobott, a többiek ezután fognak dobni.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Bori nyer?

a)	3 pont	
b)	7 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Adott az $x^2 + 2y = 16$ egyenletű parabola és az $x^2 + (y-3)^2 = 9$ egyenletű kör.

a) Határozza meg a parabola fókuszpontjának és a kör középpontjának a koordinátáit!

b) Igazolja, hogy a $Q(2\sqrt{2};\, 4)$ pont a parabolának és a körnek is pontja, és a kör Q-ban húzott érintője érinti a parabolát is!

c) Határozza meg a parabola és az x tengely által közrezárt korlátos síkidom területét!

a)	4 pont	
b)	7 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	11		**51**	
	2.	13			
	3.	13			
	4.	14			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző