ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
$9\cdot 9^x+15\cdot 3^x-6=0$	1 pont	
Mivel $9^x=(3^x)^2$, ezért az egyenlet 3^x-ben másodfokú: $9\cdot(3^x)^2+15\cdot 3^x-6=0$.	1 pont	
$3^x=-2$ vagy $3^x=\frac{1}{3}$.	1 pont	
Az első eset nem lehetséges (mert $3^x>0$),	1 pont	
a második esetből pedig $x=-1$ adódik.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

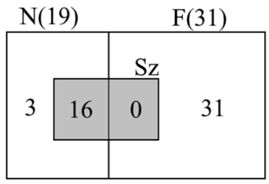
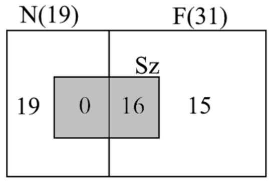
1. b)		
$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$	1 pont	
$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$ vagy $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.	2 pont	
$x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$ vagy $x=\frac{7\pi}{12}+k\cdot\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a megoldásokat fokban helyesen adja meg, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.
2. Ha a vizsgázó a válaszát periódus nélkül vagy hibás periódussal adja meg, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.
3. Ha a vizsgázó a válaszát periódussal adja meg, de a $k\in\mathbf{Z}$ feltételt egyszer sem említi, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

2. a)		
A számtani sorozat összegképletét használva: $\frac{2\cdot 5+3(n-1)}{2}\cdot n=4900$.	1 pont	
$3n^2+7n-9800=0$	2 pont	
$n_1=56$ (ami valóban megoldása a feladatnak),	1 pont	
n_2 $(=-58,\dot{3})<0$, ami nem megoldás.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

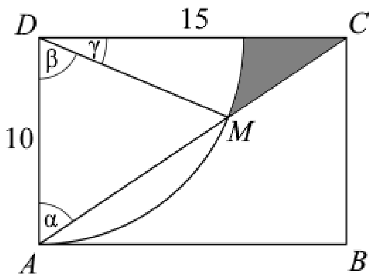
2. b) első megoldás		
Jelölje a mértani sorozat első tagját a, hányadosát q. $\left.\begin{array}{r} a+aq=6 \\ aq^2+aq^3=96 \end{array}\right\}$	2 pont	
A második egyenlet átalakítva: $q^2(a+aq)=96$. Ezt az egyenletet elosztva az elsővel megkapjuk, hogy $q^2=16$,	2 pont	
amiből $q = 4$ vagy $q = –4$.	1 pont	
(Az első egyenletből) $q = 4$ esetén $a=\frac{6}{5}$,	1 pont	*Az első négy tag:* 1,2; 4,8; 19,2; 76,8,
$q = –4$ esetén $a = –2$.	1 pont	*vagy* –2; 8; –32; 128.
Ellenőrzés: $\frac{6}{5}+\frac{24}{5}\left(=\frac{30}{5}\right)=6$ és $\frac{96}{5}+\frac{384}{5}\left(=\frac{480}{5}\right)=96$, illetve (–2) + 8 = 6 és (–32) + 128 = 96.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

2. b) második megoldás		
Jelölje a mértani sorozat első tagját a, hányadosát q. $\left.\begin{array}{r} a+aq=6 \\ aq^2+aq^3=96 \end{array}\right\}$	2 pont	
Az első egyenletből q-t kifejezve: $q=\frac{6-a}{a}$ $(a \neq 0)$. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve: $\frac{(6-a)^2}{a}+\frac{(6-a)^3}{a^2}=96$.	1 pont	
$a(36-12a+a^2)+(216-108a+18a^2-a^3)=96a^2$ Rendezve és 18-cal osztva: $5a^2+4a-12=0$,	1 pont	$(6-a)^2(a+6-a)=96a^2$ $(6-a)^2=(4a)^2$ $6-a=4a$ *vagy* $a-6=4a$
amiből $a=\frac{6}{5}$ vagy $a = –2$.	1 pont	
$a=\frac{6}{5}$ esetén $q = 4$,	1 pont	
$a = –2$ esetén $q = –4$.	1 pont	
Ellenőrzés: $\frac{6}{5}+\frac{24}{5}\left(=\frac{30}{5}\right)=6$ és $\frac{96}{5}+\frac{384}{5}\left(=\frac{480}{5}\right)=96$, illetve (–2) + 8 = 6 és (–32) + 128 = 96.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">3. a)</td></tr>
<tr><td>A lakók közül 19 nő, 31 férfi, illetve 16 szemüveges, 34 nem szemüveges.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Legfeljebb 31 nem szemüveges férfi lehet,</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>ha egyik férfi sem szemüveges.</td><td>1 pont</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Legalább (31 – 16 =) 15 nem szemüveges férfi van,</td><td>1 pont*</td><td></td></tr>
<tr><td>ha minden szemüveges lakó férfi.</td><td>1 pont*</td><td>
</td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A férfiak és a nem szemüvegesek számának összege 31 + 34 = 65, de csak 50 lakó van, így legalább 15-öt mindkét részhalmazban megszámoltunk,	1 pont	
tehát legalább 15 nem szemüveges férfi van.	1 pont	

<table>
<tr><td colspan="3">3. b)</td></tr>
<tr><td>A feladat megértését tükröző ábra.


(Használjuk az ábra betűzéseit: A füvesített terület az ADC háromszög. Az öntözött terület a D középpontú negyedkör. Keressük a sötétített síkidom területét.)</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>(Az ADC derékszögű háromszögből) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{15}{10}$,</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>innen $\alpha \approx 56{,}3^\circ$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Mivel $DA = DM = 10$ (m), ezért DAM háromszög egyenlőszárú, így $\beta = 180^\circ - 2\alpha \approx 67{,}4^\circ$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
</table>

A füvesített terület: $T_1 = \frac{10 \cdot 15}{2} = 75$ (m^2).	1 pont*	
A $\gamma = 90° - \beta \approx 22{,}6°$ középponti szögű, 10 méter sugarú körcikk területe: $T_2 = \frac{22{,}6}{360} \cdot 10^2 \cdot \pi \approx 19{,}7$ (m^2).	1 pont*	
A *DAM* háromszög területe: $T_3 = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 67{,}4°}{2} \approx 46{,}2$ (m^2).	1 pont*	
A locsolásból kimaradó füvesített terület nagysága: $T_1 - (T_2 + T_3) = 75 - 65{,}9 = 9{,}1$ m^2.	1 pont*	
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

$DM = DA = 10$ (m) és $DC = 15$ (m), valamint $\gamma = 90° - \beta \approx 22{,}6°$,	1 pont	
így a *CDM* háromszög területe: $T_4 = \frac{15 \cdot 10 \cdot \sin 22{,}6°}{2} \approx 28{,}8$ (m^2).	1 pont	
A γ középponti szögű, 10 méter sugarú körcikk területe: $T_2 = \frac{22{,}6}{360} \cdot 10^2 \cdot \pi \approx 19{,}7$ (m^2).	1 pont	
A locsolásból kimaradó füvesített terület nagysága: $T_4 - T_2 = 9{,}1$ m^2.	1 pont	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó. Jelölje T_1 a füvesített területet, T_3 a DAM háromszög területét, T_5 az $AD = 10$ méter sugarú negyedkör területét, T_6 a β középponti szögű, 10 méter sugarú körcikk területét, végül T_7 az AM húr által határolt kisebbik körszelet területét.*

$T_1 = \frac{10 \cdot 15}{2} = 75$ m^2, $T_3 = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 67{,}4°}{2} \approx 46{,}2$ m^2, $T_5 = \frac{10^2 \cdot \pi}{4} \approx 78{,}5$ m^2,

$T_6 = \frac{67{,}4}{360} \cdot 10^2 \cdot \pi \approx 58{,}8$ m^2, $T_7 = T_6 - T_3 = 12{,}6$ m^2.

Ezekkel: $T_{\text{kimaradó}} = T_{\text{füvesített}} - T_{\text{meglocsolt füvesített}} = T_1 - (T_5 - T_7) = T_1 - (T_5 - (T_6 - T_3)) =$

$= T_1 - T_5 + T_6 - T_3 = 9{,}1$ m^2.

4. a)		
Az első két kritériumnak megfelel a készlet.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a kiszámolt szórásra hivatkozva helyesen válaszol.*
A mért tömegek átlaga $\left(\frac{5\cdot 163+164+165+2\cdot 166}{9}=\frac{1476}{9}=\right)$ 164 (gramm).	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
A mért tömegek szórása: $\sqrt{\frac{5\cdot(163-164)^2+(165-164)^2+2\cdot(166-164)^2}{9}}=$	1 pont	
$=\frac{\sqrt{14}}{3}\approx 1{,}25$ (gramm).	1 pont	
A készlet nem hitelesíthető.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. b) első megoldás		
P(lesz piros) = 1 – P(mindkettő kék)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Két kék golyót (a sorrendre való tekintet nélkül) $\binom{7}{2}$(= 21)-féleképpen tudunk kiválasztani (kedvező esetek száma).	1 pont	*A sorrendet is figyelembe véve* $7\cdot 6\ (=42)$.
Két golyót összesen $\binom{10}{2}$(= 45)-féleképpen tudunk kiválasztani (összes eset száma).	1 pont	$10\cdot 9\ (=90)$
A keresett valószínűség tehát $1-\frac{21}{45}=\frac{8}{15}\approx 0{,}533$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. b) második megoldás		
P(lesz piros) = P(1 piros) + P(2 piros)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$P(1\ \text{piros}) = \dfrac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} \left(= \dfrac{21}{45}\right)$	1 pont	$\dfrac{3\cdot 7 + 7\cdot 3}{10\cdot 9}$
$P(2\ \text{piros}) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} \left(= \dfrac{3}{45}\right)$	1 pont	$\dfrac{3\cdot 2}{10\cdot 9}$
A keresett valószínűség tehát $\dfrac{21}{45} + \dfrac{3}{45} = \dfrac{8}{15} \approx 0{,}533$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. c) első megoldás		
$P(AB) = P(A) = \binom{3}{2}\cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7\ (= 0{,}189)$	2 pont	
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}7^3\ (= 0{,}657)$	2 pont	$P(B) = P(1\ \textit{piros}) +$ $+ P(2\ \textit{piros}) + P(3\ \textit{piros}) =$ $= 0{,}441 + 0{,}189 + 0{,}027$
$P(A\,\vert\,B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0{,}189}{0{,}657} \approx 0{,}288$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. c) második megoldás		
$10^3 - 7^3 = 657$ olyan eset van, amelyben a kihúzott golyók közt van piros (ez az összes eset száma a keresett feltételes valószínűségre vonatkozóan).	2 pont	
Ezek közül $3\cdot 3^2\cdot 7 = 189$ esetben van 2 piros golyó (kedvező esetek száma).	2 pont	
Tehát a keresett valószínűség $\dfrac{189}{657} \approx 0{,}288$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

II.

5. a)		
A mogyorókrémes palacsinta árát m-mel, a túrósét t-vel, és a fahéjasét f-fel jelölve: (1) $3m + t + 2f = 1500$, (2) $4m + 2t + f = 1740$, (3) $m + 2t + 2f = 1170$.	2 pont	
(2) és (3) különbsége: $3m - f = 570$, (1) és (3) különbsége: $2m - t = 330$.	2 pont	
Amiből $f = 3m - 570$ és $t = 2m - 330$.	1 pont	
Ezeket visszahelyettesítve bármelyik eredeti egyenletbe: $m = 270$, $t = 210$, $f = 240$. (Egy mogyorókrémes palacsinta 270 Ft-ba, egy túrós 210 Ft-ba, egy fahéjas pedig 240 Ft-ba kerül.)	2 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: $3 \cdot 270 + 210 + 2 \cdot 240 = 1500$, $4 \cdot 270 + 2 \cdot 210 + 240 = 1740$, $270 + 2 \cdot 210 + 2 \cdot 240 = 1170$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

5. b)		
100 Ft-osból 0 vagy 1 darab lehetett a 6 érme között (2 db 100 Ft-os esetén legfeljebb 4 érmét használt volna).	1 pont	
1 darab 100 Ft-os esetén, 50 Ft-os nélkül legfeljebb 200 Ft-ot tudna kifizetni; legalább 2 db 50 Ft-ossal pedig legfeljebb 5 érmét használt volna, így 1 db 50 Ft-os volt. A maradék 60 Ft-ot 20-20-10-10 összeállításban tudja 4 db érmével kifizetni.	1 pont	
Ha nem volt 100 Ft-os, akkor lehetett 4 db 50 Ft-os, és mellette 2 db 5 Ft-os;	1 pont	
ha pedig 3 db 50 Ft-os volt, akkor a maradék 60 Ft-ot 20-20-20 összeállításban tudja 3 db érmével kifizetni.	1 pont	
Háromnál kevesebb 50 Ft-os esetén legfeljebb 180 Ft-ot tudna kifizetni. Tehát valóban 3 különböző lehetőség van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

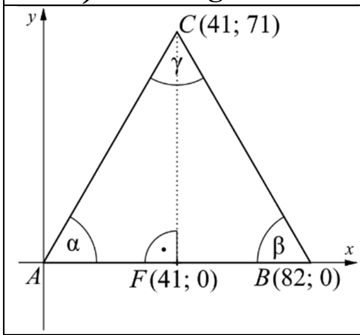
Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó megadja a 3 különböző lehetőséget (100-50-20-20-10-10, 50-50-50-50-5-5, 50-50-50-20-20-20)*, akkor ezért 3 pontot kapjon. Annak igazolásáért, hogy több lehetőség nincs, további 2 pont jár.*
2. Ha a vizsgázó egy (például az alábbihoz hasonló) táblázatban megvizsgálja az összes lehetőséget, akkor teljes pontszámot kapjon.

100 Ft-os	50 Ft-os	20 Ft-os	10 Ft-os	5 Ft-os	darabszám összesen
2	legfeljebb 2 db				≤ 4
1	2	legfeljebb 2 db			≤ 5
1	1	3	0	0	5
1	1	2	2	0	6
1	1	2	2-nél kevesebb 10 Ft-os esetén legalább 3 db		≥ 7
1	1	2-nél kevesebb 20 Ft-os esetén legalább 5 db			≥ 7
1	0	legalább 6 db			≥ 7
0	4	0	1	0	5
0	4	0	0	2	6
0	3	3	0	0	6
0	3	3-nál kevesebb 20 Ft-os esetén legalább 4 db			≥ 7
0	2	legalább 6 db			≥ 8
0	≤ 1	legalább 8 db			≥ 8

5. c)

A 100-50-20-20-10-10 esetben $\frac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!}(=180)$, az 50-50-50-50-5-5 esetben $\frac{6!}{4!\cdot 2!}(=15)$, az 50-50-50-20-20-20 esetben $\frac{6!}{3!\cdot 3!}(=20)$ különböző sorrendben vehette elő a zsebéből Lali a 6 érmét.	2 pont	*Az első esetben* $6\cdot 5\cdot\binom{4}{2}$, *a második esetben* $\binom{6}{4}$, *a harmadik esetben* $\binom{6}{3}$ *különböző sorrend lehetséges.*
Összesen 180 + 15 + 20 = 215 sorrend lehetséges.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a b) feladat megoldásából származó rossz adatokkal helyesen számol, és a megoldandó probléma lényegében nem változott meg, akkor a megfelelő pontok járnak.

6. a) **első megoldás**		
 Az AB oldal felezőpontja $F\ (41;\ 0)$, így az AFC derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{71}{41}$. Ebből $\alpha \approx 59{,}9951°$.	2 pont*	
Mivel $AC = BC$, ezért a B csúcsnál fekvő szög $\beta \approx 59{,}9951°$.	1 pont	
$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - 119{,}9902° = 60{,}0098°$.	1 pont	
Három tizedesjegyre kerekítve a háromszög szögei 59,995°, 59,995° és 60,010°. (Tehát Gézának nincs igaza, a háromszög nem szabályos.)	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó az* $\overrightarrow{AB}$ *és* $\overrightarrow{AC}$ *vektorok skaláris szorzatát kétféleképpen felírja, és ezek egyenlőségéből fejezi ki* $\cos\alpha$*-t:*

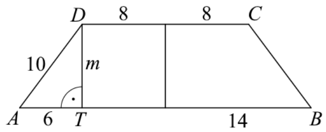
$\cos\alpha = \frac{82 \cdot 41 + 0 \cdot 71}{82 \cdot \sqrt{6722}}$ ($\approx 0{,}50007$). *Ebből* $\alpha \approx 59{,}9951°$.

6. a) **második megoldás**		
$AB = 82$, $BC = CA = \sqrt{6722}$	1 pont	
Koszinusztétellel: $\cos\gamma = \frac{2 \cdot 6722 - 82^2}{2 \cdot 6722}$ ($\approx 0{,}49985$),	1 pont	
amiből $\gamma \approx 60{,}0098°$.	1 pont	
$\alpha = \beta = \frac{180° - \gamma}{2} \approx 59{,}9951°$	1 pont	
Három tizedesjegyre kerekítve a háromszög szögei 59,995°, 59,995° és 60,010°. (Tehát Gézának nincs igaza, a háromszög nem szabályos.)	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

6. b)		
$AC = \sqrt{6722}$ ($\approx 81{,}9878$)	1 pont	
Így $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{6722}}{82}$ ($\approx 0{,}999851$).	1 pont	
Négy tizedesjegyre kerekítve az arány 0,9999.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzések: 1. Az $\frac{AB}{AC}$ *arány* ($\approx 1{,}0001$) *is elfogadható.*

2. Kerekítési hiba miatt a vizsgázó a feladatban összesen legfeljebb 1 pontot veszítsen.

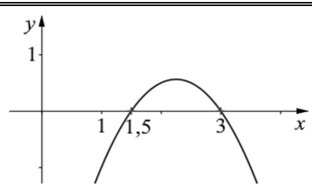
6. c) **első megoldás**		
A csonkakúp magassága $\sqrt{10^2-6^2}=8$ (cm),	2 pont	
térfogata $V_{cs}=\frac{8\pi}{3}(14^2+14\cdot8+8^2)=992\pi\ (\approx 3116)$ (cm^3).	2 pont	
A közelítő henger alapkörének sugara $((14+8):2=)\ 11$ (cm),	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
térfogata $V_h=8\cdot11^2\cdot\pi=968\pi\ (\approx 3041)$ (cm^3).	1 pont	
Ez a pontos értéknek $(3041:3116\approx)$ 0,976-szerese, azaz 97,6%-a.	1 pont	$968\pi:992\pi\approx0{,}976$
A relatív hiba tehát –2,4%.	1 pont	*A 2,4% is elfogadható.*
Összesen:	**8 pont**	

6. c) **második megoldás**		
A csonkakúp térfogata $V_{cs}=\frac{m\pi}{3}(14^2+14\cdot8+8^2)$.	2 pont	
A közelítő henger alapkörének sugara $((14+8):2=)\ 11$ (cm),	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
térfogata $V_h=8\cdot11^2\cdot\pi$.	1 pont	
A két térfogat hányadosa: $\frac{V_h}{V_{cs}}=\frac{m\cdot11^2\cdot\pi}{\frac{m\pi}{3}(14^2+14\cdot8+8^2)}$.	1 pont	
Egyszerűsítve: $\frac{V_h}{V_{cs}}=\frac{11^2}{\frac{14^2+14\cdot8+8^2}{3}}\left(=\frac{121}{124}\right)\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}976$, azaz a henger térfogata a csonkakúp térfogatának 97,6%-a.	1 pont	
A relatív hiba tehát –2,4%.	1 pont	*A 2,4% is elfogadható.*
Összesen:	**8 pont**	

7. a) **első megoldás**		
Összesen 450 + 400 + 500 = 1350 gramm lisztből sütött kenyeret Flóra.	1 pont	
Ehhez $1350 \cdot \frac{5}{9} = 750$ gramm búzaliszt kell.	1 pont	
Tehát a hozzáadott lisztből (750 – 450 =) 300 gramm volt a búzaliszt.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. a) **második megoldás**		
Jelölje x a hozzáadott búzaliszt tömegét (grammban). Ekkor a rozsliszt tömege $500 - x$ (gramm). A kétfajta liszt tömegének aránya: $\frac{450+x}{400+(500-x)} = \frac{5}{4}$.	1 pont	
$1800 + 4x = 4500 - 5x$	1 pont	
$x = 300$ (Tehát a hozzáadott lisztből 300 gramm volt a búzaliszt.)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

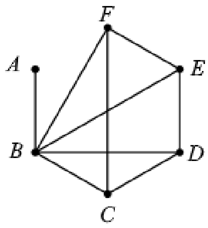
7. a) **harmadik megoldás**		
50 gramm búzaliszt hozzáadásával éppen elérhető az előírt arány (500 : 400 = 5 : 4).	1 pont	
A maradék 450 gramm hozzákevert lisztben is 5 : 4 arányban kell lennie a búzalisztnek és a rozslisztnek, azaz $\left(450 \cdot \frac{5}{9} =\right) 250$ gramm a búzaliszt mennyisége.	1 pont	
Tehát a hozzáadott lisztből (50 + 250 =) 300 gramm volt a búzaliszt.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. b)		
Ha $0 < x < 5$, akkor x^2 pozitív,	1 pont	
tehát pontosan akkor van nyereség, ha $(x - 3)(1,5 - x) > 0$.	1 pont	
Ez akkor teljesül, ha a két tényező azonos előjelű. A két tényező egyszerre nem lehet pozitív. Mindkettő negatív, ha $1,5 < x < 3$. (Ezzel az állítást beláttuk.)	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. c)		
A nyereségfüggvény: $n(x) = -0,8x^4 + 3,6x^3 - 3,6x^2$.	1 pont	
Ennek deriváltfüggvénye: $n'(x) = -3,2x^3 + 10,8x^2 - 7,2x$.	1 pont	
Az *n* függvénynek szélsőértéke lehet, ha $n'(x) = 0$. $-3,2x^3 + 10,8x^2 - 7,2x = 0$	1 pont	
Kiemelve *x*-et, az $x(-3,2x^2 + 10,8x - 7,2) = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = 0$, $x_2 \approx 0,91$, $x_3 \approx 2,46$.	2 pont	
Mivel csak $1,5 < x < 3$ esetén nyereséges a termelés, ezért az $x \approx 2,46$ helyen kell megvizsgálni a függvényt.	1 pont	
A második derivált: $n''(x) = -9,6x^2 + 21,6x - 7,2$. $n''(2,46) < 0$, tehát az *n* függvénynek itt (abszolút) maximuma van.	1 pont	
$n(2,46) = 0,8 \cdot 2,46^2 \cdot (-0,54) \cdot (-0,96) \approx 2,51$.	1 pont	
A legnagyobb elérhető napi nyereség tehát körülbelül 25 100 tallér, ami kb. 2,46 tonna liszt előállításával és eladásával érhető el.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

8. a) első megoldás		
Két lány között $\binom{5}{2} = 10$,	1 pont	
egy lány és egy fiú között $5 \cdot 7 = 35$ ölelés volt.	1 pont	
Összesen (10 + 35 =) 45 találkozásnál volt ölelés.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. a) második megoldás		
Összesen $\binom{12}{2} = 66$ köszöntés volt,	1 pont	
ebből $\binom{7}{2} = 21$ volt kézfogás.	1 pont	
Tehát (66 – 21 =) 45 találkozásnál volt ölelés.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b) **első megoldás**		
Ha a lejátszott 9 mérkőzést a hatpontú *ABCDEF* egyszerű gráffal szemléltetjük, akkor a gráfban a csúcsok fokszámának összege $(2 \cdot 9 =)$ 18.	1 pont	
A feladat szövege szerint *B*, *C*, *D*, *E*, *F* fokszáma 1, 3 vagy 5 lehet, és az öt fokszám összege 17 (mert *A* fokszáma 1).	1 pont	
Legalább egy 5 fokszámú csúcsnak lennie kell közöttük (ha nem lenne, akkor a fokszámok összege legfeljebb $5 \cdot 3 = 15$ lenne).	1 pont	
Csak a *B* csúcsnak lehet 5 a fokszáma, mert csak *B* játszott *A*-val.	1 pont	
Ezekkel a feltételekkel a *C*, *D*, *E*, *F* csúcsok fokszáma csak 3 lehet (mert a négy csúcs fokszámának összege 12).	1 pont	*Ekkor CDEF részgráfban minden csúcs fokszáma 2,*
Mivel *C* és *E* között nincs él, ezért a *CB*, *CD*, *CF* élek és az *EB*, *ED*, *EF* élek is léteznek.	1 pont	*és a CE él nem létezik.*
Így a *D*-ből induló 3 él *DB*, *DC* és *DE*. A *DF* él tehát nem létezik: Dóra nem játszott még Fanni ellen. 	1 pont	*Ez csak úgy lehetséges, hogy a DF él sem létezik.*
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó további indoklás nélkül helyesen felrajzolja a már lejátszott mérkőzések gráfját, és ez alapján jól válaszol, akkor ezért 4 pontot kapjon.

8. b) **második megoldás**		
Ha a lejátszott 9 mérkőzést a hatpontú *ABCDEF* egyszerű gráffal szemléltetjük, akkor a *BCDEF* részgráfban 8 élt kell behúzni az összesen lehetséges 10-ből (mert az *A*-ból csak *B*-be indul él).	3 pont	
A két hiányzó él közül az egyik a *CE*.	1 pont	
A másik hiányzó él nem indulhat sem *C*-ből, sem *E*-ből, mert akkor annak a pontnak a fokszáma 2 lenne (tehát páros), sem *B*-ből, mert akkor ennek a fokszáma 4 lenne (tehát páros).	2 pont	
A másik nem behúzott él ezért csak a *DF* lehet, azaz Dóra nem játszott még Fanni ellen.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

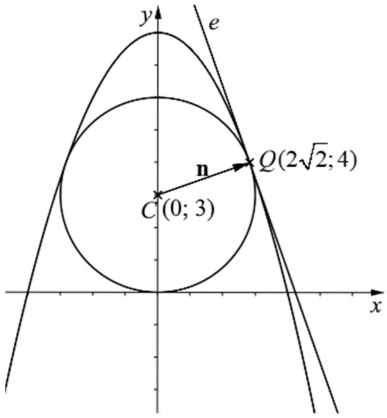
8. c)		
András, Csaba és Dóra összes lehetséges dobásainak száma 6^3 (= 216).	1 pont	
Bori pontosan akkor nyer, ha – a többiek mindhárman 5-nél kisebbet dobnak, – vagy a többiek mindhárman 6-ost dobnak, – vagy pontosan ketten dobnak 6-ost, egy valaki pedig 5-nél kisebbet dob.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mindhárman 5-nél kisebbet 4^3 (= 64)-féleképpen dobhatnak.	1 pont	
Mindhárman 6-ost csak 1-féleképpen dobhatnak.	1 pont	
A három dobás között pontosan két 6-os és egy 5-nél kisebb dobás $\binom{3}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 4$ (= 12)-féleképpen lehetséges.	1 pont	
A kérdezett valószínűség: $\frac{64+1+12}{216}=\frac{77}{216}$ ($\approx 0{,}356$).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. a)		
A parabola egyenlete átrendezve: $y=-\frac{1}{2}x^2+8$.	1 pont	
Ez tehát egy „lefelé nyíló” parabola, melynek paramétere $p = 1$, tengelypontja pedig a (0; 8) pont.	1 pont	
A parabola fókuszpontja ezért a (0; 7,5) pont.	1 pont	
A kör középpontja a C(0; 3) pont.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b) első megoldás		
$(2\sqrt{2})^2+2\cdot 4=16$, valamint $(2\sqrt{2})^2+(4-3)^2=9$ is igaz (ezért Q valóban pontja a parabolának és a körnek is).	2 pont	
A kör $Q(2\sqrt{2};4)$ pontbeli érintőjének egy normálvektora $\mathbf{n}=\overrightarrow{CQ}=(2\sqrt{2};1)$,	1 pont	
egyenlete $2\sqrt{2}x+y\,(=2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}+1\cdot 4)=12$.	1 pont	
Az érintő egyenletéből y-t kifejezve és beírva a parabola egyenletébe: $x^2+24-4\sqrt{2}x=16$.	1 pont	
Rendezve $x^2-4\sqrt{2}x+8=0$, azaz $(x-2\sqrt{2})^2=0$.	1 pont	
Ennek az egyenletnek egy megoldása van $(x=2\sqrt{2})$, ezért a kör érintőjének egy közös pontja van a parabolával (és nem párhuzamos az y tengellyel), tehát érinti a parabolát is.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. b) **második megoldás**		
$(2\sqrt{2})^2+2\cdot 4=16$, valamint $(2\sqrt{2})^2+(4-3)^2=9$ is igaz (ezért Q valóban pontja a parabolának és a körnek is).	2 pont	
A kör $Q(2\sqrt{2};\,4)$ pontbeli érintőjének egy normálvektora $\mathbf{n}=\overrightarrow{CQ}=(2\sqrt{2};1)$,	1 pont	
ezért az érintő meredeksége $-\frac{2\sqrt{2}}{1}=-2\sqrt{2}$.	1 pont	*Az érintő egyenlete* $2\sqrt{2}x+y=12$.
Az $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+8$ ($x\in\mathbf{R}$) függvény deriváltfüggvénye $f'(x)=-x$,	1 pont	
ezért a parabolához a Q-ban húzott érintő meredeksége $f'(2\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$.	1 pont	*Az érintő egyenlete* $y=-2\sqrt{2}x+12$.
A két görbének tehát valóban közös a Q-beli érintője.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megoldásához közelítő értéket is felhasznál, akkor legfeljebb 6 pontot kapjon.



9. c)		
Az $x^2=16$ egyenlet megoldásaiból kapjuk, hogy a parabola –4-ben és 4-ben metszi az x tengelyt.	1 pont	
A parabola és az x tengely által közrezárt korlátos síkidom területe $\int_{-4}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+8\right)dx=$	1 pont	
$=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+8x\right]_{-4}^{4}=$	1 pont	
$=\left(-\frac{32}{3}+32\right)-\left(\frac{32}{3}-32\right)=$	1 pont	
$=\frac{128}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	