ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

9. c) **első megoldás**		
Be kell látni, hogy $g'(x) > 0$ teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén. Ebből már következik, hogy a g szigorúan monoton növekedő a teljes értelmezési tartományán.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A hányadosfüggvény deriválási szabálya alapján: $g'(x) = \frac{(3x^3+x)'(x^2+1)-(3x^3+x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$	1 pont	
$= \frac{(9x^2+1)(x^2+1)-(3x^3+x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$	1 pont	
$= \frac{(9x^4+10x^2+1)-(6x^4+2x^2)}{(x^2+1)^2} =$ $= \frac{3x^4+8x^2+1}{(x^2+1)^2}$.	1 pont	
A számláló értéke pozitív (legalább 1), és a nevező egy pozitív szám négyzete.	1 pont	
Ezért a tört pozitív, tehát $g'(x) > 0$ valóban teljesül, az állítást beláttuk.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. c) **második megoldás**		
Legyen $a < b$ ($a, b \in \mathbf{R}$). $g(b) - g(a) = \frac{3b^3+b}{b^2+1} - \frac{3a^3+a}{a^2+1} =$ $= \frac{(3b^3+b)(a^2+1)-(3a^3+a)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)}$.	1 pont	
A számláló a zárójelek felbontása, csoportosítás és kiemelés után: $3(b^3-a^3)+3a^2b^2(b-a)-ab(b-a)+b-a =$	1 pont	
$=(b-a)(3b^2+3ab+3a^2+3a^2b^2-ab+1) =$	1 pont	
$=(b-a)\left[2b^2+2a^2+(a+b)^2+3a^2b^2+1\right]$.	1 pont	
A szorzat mindkét tényezője, így a számláló is pozitív. A tört nevezője is pozitív (két pozitív szám szorzata),	1 pont	
ezért $g(b) - g(a)$ is mindig pozitív. Az állítás tehát igaz.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)

év: 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019 arány: 2,92, 2,20, 2,18, 1,34, 1,33, 2,13, 2,00	1 pont	
A kapott hét szám átlaga kb. 2,01,	1 pont	*A 2 is elfogadható.*
szórása $\sqrt{\frac{(2{,}92-2{,}01)^2+...+(2{,}00-2{,}01)^2}{7}} \approx$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a szórást számológéppel helyesen határozza meg.*
$\approx \sqrt{0{,}26} \approx 0{,}51$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

év	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
arány	2,92	2,20	2,18	1,34	1,33	2,13	2,00

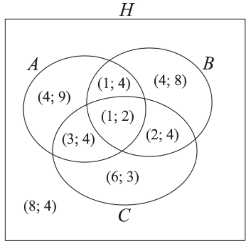
1. b)

A modell alapján számított érték: $c(6) = 17{,}84 \cdot 1{,}848^6 \approx 711$ MW.	1 pont	
$\frac{711}{640} \approx 1{,}11$,	1 pont	
tehát ez az érték kb. 11%-kal tér el a valódi adattól.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. c)

$1{,}848^x = \frac{40\,000}{17{,}84}$ $(\approx 2242{,}2)$	1 pont	
(A lg-függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $x \cdot \lg 1{,}848 \approx \lg 2242{,}2$ $x \approx \frac{\lg 2242{,}2}{\lg 1{,}848}$	2 pont	$x = \log_{1{,}848} \frac{40\,000}{17{,}84}$
$x \approx 12{,}56$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. a)

Egy-egy megfelelő számpár minden részben, például: 	6 pont	*Minden (üres részbe írt) megfelelő számpárért 1-1 pont jár, több jó számpár esetén is. Ha egy részbe több számpárt ír be a vizsgázó, és ezek között hibás is van, akkor erre a részre nem jár pont.*
Összesen:	**6 pont**	

8. d)

Annak a valószínűsége, hogy egy forgatás nem bingó, 0,8.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Tegyük fel, hogy egy játékos n számú forgatást végez. Annak a valószínűsége, hogy az n forgatás közül egyik sem bingó, $0{,}8^n$. Annak a valószínűsége, hogy legalább egy bingó van közöttük, $1 - 0{,}8^n$.	1 pont	
Innen $1 - 0{,}8^n \geq 0{,}95$, azaz $0{,}8^n \leq 0{,}05$.	1 pont*	
A 0,8 alapú exponenciális/logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért $n \geq \log_{0{,}8} 0{,}05$.	1 pont*	$n \cdot \lg 0{,}8 \leq \lg 0{,}05$ *A negatív* $\lg 0{,}8$*-del osztva:* $n \geq \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}8}$.
$n \geq 13{,}4$, azaz legalább 14-szer kell játszani.	1 pont*	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyesen megoldja az $1 - 0{,}8^n = 0{,}95$ egyenletet, akkor ezért a *-gal jelölt 3 pontból 1 pontot kapjon. Ha ez alapján indoklás nélkül helyesen válaszol („legalább 14”), akkor ezért további 1 pontot kapjon.*

9. a)

Az f függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol $f'(x) = 0$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
tehát az $x = 2$ vagy $x = 5$ helyeken.	1 pont	
Az $x = 2$ helyen a deriváltfüggvény nem vált előjelet, tehát ez nem lokális szélsőérték.	1 pont	
Az $x = 5$ helyen a deriváltfüggvény negatívból pozitívba megy át,	1 pont	
ez tehát lokális minimumhelye a függvénynek.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b)

$f'(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$	1 pont	
$f(x) \in \int f'(x)\,dx$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 - 20x + c$	1 pont	
(Mivel a grafikon áthalad a (0; 1) ponton, ezért) $f(0) = 1$,	1 pont	
tehát $c = 1$ (vagyis a keresett függvény értékeit az $f(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 - 20x + 1$ adja meg).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. a)		
A 100-as szám az 1. keréken $\frac{2}{5}=0,4$ valószínűséggel jön ki egy forgatás során (0,6 az egyéb kimenetel valószínűsége).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Pontosan 4 darab 100-as valószínűsége $\binom{10}{4}\cdot 0,4^4\cdot 0,6^6$,	1 pont	
ami közelítőleg 0,251.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b)		
A 200 Ft nyeremény valószínűsége $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=0,1$ (ekkor mindkét keréken a 100 jön ki), a 400 Ft nyeremény valószínűsége $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}=0,2$ (ekkor mindkét keréken a 200 jön ki), az 1600 Ft nyeremény valószínűsége $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=0,05$ (ekkor pedig mindkét keréken a 800 jön ki).	2 pont	
A **nyeremény** várható értéke egy játékban $0,1\cdot 200+0,2\cdot 400+0,05\cdot 1600=180$ Ft.	2 pont*	
A **nyereség** várható értéke egy játékban $180-200=-20$ Ft.	1 pont*	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

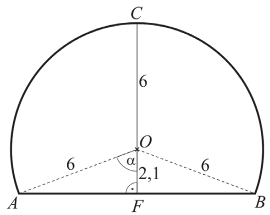
Annak a valószínűsége, hogy a játékos nem nyer: $1-(0,1+0,2+0,05)=0,65$.	1 pont	
A **nyereség** lehet (–200) Ft, 0 Ft, 200 Ft, 1400 Ft, valószínűségük rendre 0,65; 0,1; 0,2; 0,05.	1 pont	
Egy játékban a **nyereség** várható értéke: $0,65\cdot(-200)+0,1\cdot 0+0,2\cdot 200+0,05\cdot 1400=-20$ Ft.	1 pont	

8. c)		
A bingóhoz az egyik keréken a 200-as, a másikon a 800-as számnak kell kijönnie. A bingó valószínűsége $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}=$	2 pont	
$=0,2$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. b)		
Az I. állítás hamis.	1 pont	
Például a 6 osztója a $2\cdot 3$ szorzatnak, de a 6 nem osztója sem a 2-nek, sem a 3-nak.	1 pont	
A II. állítás hamis.	1 pont	
Például a 4 és a 6 is osztója a 12-nek, de a $4\cdot 6$ szorzat nem osztója a 12-nek.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. c)		
Megfordítás: Ha c osztója a-nak vagy c osztója b-nek, akkor c osztója ab-nek. Vagy: Ha c nem osztója ab-nek, akkor c nem osztója a-nak **és** c nem osztója b-nek.	1 pont	
A megfordítás igaz,	1 pont	
hiszen a feltétel szerint igaz, hogy $a = kc$ vagy $b = mc$, így $ab = (kb)c$ vagy $ab = (am)c$; tehát ab többszöröse c-nek (c osztója ab-nek) ($k, m \in \mathbf{N}^+$).	2 pont*	
Összesen:	**4 pont**	

* *Kevésbé formalizált, tartalmilag helyes bizonyítás is elfogadható.*

3. a)		
 Az ábra szerinti jelöléseket alkalmazzuk. (Az AB húr felezőpontja F, $OA = OB = OC = 6$ m, $FC = 8,1$ m, $FO = FC - OC = 2,1$ m.)	1 pont	
$\cos\alpha=\frac{OF}{OA}=0,35$, innen $\alpha\approx 69,51°$.	2 pont	
Az AOB középponti szög: $360° - 2\alpha \approx 221°$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

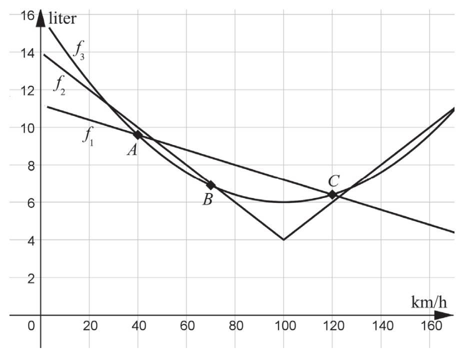
3. b)		
Az alagút olyan hengerszerű testnek tekinthető, melynek alapja az alagút függőleges keresztmetszete, magassága pedig az alagút $h = 340$ m hossza.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Az a)-beli ábra jelöléseit használjuk. Az alapterület a 221°-os középponti szögű AOB körcikk t_1 és az AOB háromszög t_2 területéből tevődik össze.) $t_1 = \frac{221°}{360°} \cdot 6^2\pi \approx 69{,}43$ m²,	2 pont	
$2\alpha \approx 139°$, $t_2 = \frac{6^2 \cdot \sin 139°}{2} \approx 11{,}81$ m².	2 pont	$AF = \sqrt{AO^2 - OF^2} \approx$ $\approx 5{,}62$ m, $t_2 = \frac{2AF \cdot OF}{2}$
Az alagút térfogata $(t_1 + t_2) \cdot h \approx 27\,622$ m³,	1 pont	
ami a kért kerekítéssel 28 000 m³.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**7 pont**	

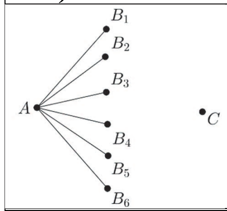
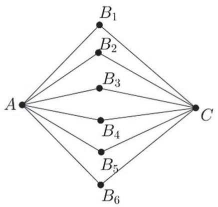
3. c)		
Kerámiaburkolatot az alaplap hosszabbik AB ívéhez tartozó palást felülete kapott. A hosszabbik AB ív $i = \frac{221°}{360°} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \pi \approx 23{,}14$ m hosszú,	2 pont	
így a kerámiaburkolattal ellátott felület $i \cdot h = 23{,}14 \cdot 340 \approx 7868$ m².	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. a) első megoldás		
A múlt héten a kereskedő x db M-es tojást vett f Ft/db egységáron, és $(450 - x)$ db L-es tojást $(f + 10)$ Ft/db egységáron. Ezen a héten $(450 - x)$ db M-es és x db L-es tojást vásárolt, ezért: $\left.\begin{array}{l} f \cdot x + (f+10)\cdot(450-x) = 25\,800 \\ f\cdot(450-x) + (f+10)\cdot x = 23\,700 \end{array}\right\}$.	2 pont	
Rendezés után: $\left.\begin{array}{r} 450f + 4500 - 10x = 25\,800 \\ 450f + 10x = 23\,700 \end{array}\right\}$. A két egyenletet összeadva és rendezve: $900f = 45\,000$.	2 pont	
$f = 50$, visszahelyettesítés után pedig $x = 120$ adódik.	1 pont	

7. c)		
($f_3(40) = 9{,}6$, tehát) $1600a + 40b + c = 9{,}6$. (1) ($f_3(70) = 6{,}9$, tehát) $4900a + 70b + c = 6{,}9$. (2) ($f_3(120) = 6{,}4$, tehát) $14\,400a + 120b + c = 6{,}4$. (3)	2 pont	
(Megoldandó a három egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer.) (1)-ből kivonva (2)-t: $-3300a - 30b = 2{,}7$ (3)-ból kivonva (2)-t: $9500a + 50b = -0{,}5$	1 pont	(3)-*ból* (1)-*et kivonva:* $12\,800a + 80b = -3{,}2$. (2)-*ből* (1)-*et kivonva:* $3300a + 30b = -2{,}7$.
Az így kapott első egyenletet 30-cal, a másodikat pedig 50-nel osztva: $-110a - b = 0{,}09$ $190a + b = -0{,}01$	1 pont	*Mindkét egyenletből kifejezve b-t:* $b = -0{,}04 - 160a$, illetve $b = -0{,}09 - 110a$.
A két egyenletet összeadva: $80a = 0{,}08$, amiből $a = 0{,}001$.	1 pont	$-0{,}04 - 160a =$ $= -0{,}09 - 110a$ $50a = 0{,}05$ $a = 0{,}001$
Visszahelyettesítéssel $b = -0{,}2$, illetve $c = 16$ adódik. (Tehát $f_3(x) = 0{,}001x^2 - 0{,}2x + 16$, ami teljesíti mindhárom feltételt.)	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: A mért adatokat (A, B, C) és a „közelítő függvényeket” (f_1, f_2, f_3) szemlélteti az alábbi ábra.



6. c)		
 Jelölje a hatodfokú pontot A, a belőle kiinduló hat él végpontját $B_1, B_2, \ldots, B_6$, a gráf nyolcadik csúcsát C. Húzzuk be az A-ból kiinduló 6 élt.	1 pont	
 (Mivel CA már nem húzható be,) a gráf maradék 7 éle a $\{C, B_1, B_2, \ldots, B_6\}$ részgráfban van. C-ből legfeljebb 6 él húzható (ezt mutatja az ábra), ezért a $\{B_1, B_2, \ldots, B_6\}$ részgráfban is van éle a gráfnak, például a B_1B_2.	2 pont	*Ha a $\{B_1, B_2, \ldots, B_6\}$ részgráfban is van éle a gráfnak, például a B_1B_2, akkor AB_1B_2 egy (gráfelméleti) háromszög, tehát igaz az állítás. Ha nem lenne ebben a részgráfban él, akkor a gráf maradék 7 éle a C-ből indulna. Ez azonban nem lehetséges (hiszen a gráf egyszerű, és CA nem éle a gráfnak).*
Ekkor AB_1B_2 egy (gráfelméleti) háromszög, az állítást tehát beláttuk.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a)		
Az autó 40 km/h sebességgel 20 km-t, 120 km/h sebességgel $120 \cdot \frac{5}{6} = 100$ km-t, összesen 120 km-t tett meg.	2 pont	
A 120 km-en $0{,}2 \cdot 9{,}6 + 6{,}4 = 8{,}32$ liter üzemanyagot fogyasztott.	1 pont	
A 100 km-re vonatkozó átlagos üzemanyagfogyasztása tehát $\frac{8{,}32}{1{,}2} \approx 6{,}93$ liter volt ezen a szakaszon.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b)		
$f_1(40) = 9{,}6$; $f_1(70) = 8{,}4$; $f_1(120) = 6{,}4$,	1 pont	
így $\lvert f_1(40) - 9{,}6\rvert + \lvert f_1(70) - 6{,}9\rvert + \lvert f_1(120) - 6{,}4\rvert =$ $(= 0 + 1{,}5 + 0) = 1{,}5$.	1 pont	
$f_2(40) = 10$; $f_2(70) = 7$; $f_2(120) = 6$,	1 pont	
így $\lvert f_2(40) - 9{,}6\rvert + \lvert f_2(70) - 6{,}9\rvert + \lvert f_2(120) - 6{,}4\rvert =$ $(= 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}4) = 0{,}9$.	1 pont	
Tehát az f_2 függvény ad jobb közelítést.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Az M-es tojás ára 50 Ft/db, az L-es tojásé 60 Ft/db. A kereskedő 120 db M-es (és 330 db L-es) tojást vásárolt a múlt héten.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: $50 \cdot 120 + 60 \cdot 330 = 25\,800$ és $50 \cdot 330 + 60 \cdot 120 = 23\,700$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a) **második megoldás**		
Ha ugyanannyi M-es és L-es tojást vásárolna a kereskedő mindkét héten, akkor ugyanannyit fizetne. Mivel az első héten fizetett többet, így az első héten vásárolt több L-es tojást.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Amennyivel több volt a múlt héten az L-es tojások száma az M-es tojások számánál, annyiszor 10 Ft-tal fizetett többet a múlt héten, mint ezen a héten.	1 pont	
$(25\,800 - 23\,700) : 10 = 210$ darabbal több L-es tojást vett a kereskedő a múlt héten.	1 pont	
Így $(450 - 210) : 2 = 120$ db M-es tojást vásárolt a múlt héten (és 330 db L-es tojást).	1 pont	
Az M-es tojás ára legyen f Ft, ekkor $120f + 330(f + 10) = 25\,800$,	1 pont	
ahonnan az M-es tojás ára $f = 50$ Ft, az L-es tojásé pedig 60 Ft.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: $50 \cdot 120 + 60 \cdot 330 = 25\,800$ és $50 \cdot 330 + 60 \cdot 120 = 23\,700$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a) **harmadik megoldás**		
Legyen az M-es tojások egységára f Ft/db, ekkor az L-eseké $(f + 10)$ Ft/db. A kereskedő mindkét fajta tojásból összesen 450-et vásárolt a két hét alatt, így $450f + 450(f + 10) = 25\,800 + 23\,700$.	2 pont	
Ebből $900f = 45\,000$,	1 pont	
így $f = 50$ Ft/db az M-es tojások ára, az L-es tojásoké pedig $50 + 10 = 60$ Ft/db.	1 pont	
Ha a múlt héten x darab M-es és $(450 - x)$ darab L-es tojást vásárolt, akkor $50x + 60(450 - x) = 25\,800$,	1 pont	
ahonnan $x = 120$, tehát ennyi a múlt héten vásárolt M-es tojások száma (az L-eseké pedig 330).	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: $50 \cdot 120 + 60 \cdot 330 = 25\,800$ és $50 \cdot 330 + 60 \cdot 120 = 23\,700$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. b) **első megoldás**		
Balázs akkor tudja elkészíteni a 4-tojásos rántottát, ha az első vagy a második tojás a romlott (mert ekkor a többi tojásból még tud rántottát készíteni), vagy ha az első 4 tojás jó.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy az elsőnek választott tojás romlott: $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy az elsőnek választott tojás jó, és a második tojás romlott: $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy az első négy tojás jó: $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy Balázs elkészítheti a rántottát: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. b) **második megoldás**		
Balázs akkor tudja elkészíteni a 4-tojásos rántottát, ha az első vagy a második tojás a romlott (mert ekkor a többi tojásból még tud rántottát készíteni), vagy ha az első 4 tojás jó.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A tojások összes lehetséges sorrendje 6! (= 720).	1 pont	
Azok a sorrendek a megfelelőek, amelyekben a romlott tojás az 1., a 2., az 5. vagy a 6. Ezek mindegyike 5! számú sorrendet jelent,	1 pont	
így a kedvező sorrendek száma összesen $4\cdot 5!$ (= 480).	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{4\cdot 5!}{6!}=\frac{4}{6}\left(=\frac{2}{3}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. b) **harmadik megoldás**		
Balázs akkor tudja elkészíteni a 4-tojásos rántottát, ha az első vagy a második tojás a romlott (mert ekkor a többi tojásból még tud rántottát készíteni), vagy ha az első 4 tojás jó.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A romlott tojás a hat hely bármelyikén ugyanakkora, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel fordul elő (mert a hat hely szerepe szimmetrikus). Azok a kedvező esetek, amelyekben a romlott tojás az 1., a 2., az 5. vagy a 6.,	3 pont	*Kedvezőtlen eset, amikor a romlott tojás a 3. vagy a 4. Ennek valószínűsége* $2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.
így a keresett valószínűség $\frac{4}{6}\left(=\frac{2}{3}\right)$.	1 pont	$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
Összesen:	**5 pont**	

6. b) **első megoldás**		
Jelölje a társaság tagjait magasság szerint növekvő sorrendben *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F*. A legalacsonyabb közülük *A*, ezért neki az első sorban kell ülnie. Így 3 helyre ülhet,	1 pont	
mögötte lévő ülésre pedig a többi 5 személy közül bárki ülhet, ez $3\cdot 5$ (= 15) eset.	1 pont	
A maradék négy személy közül a legalacsonyabbnak az első sorban kell ülnie. Ő 2 helyre ülhet,	1 pont	
mögé pedig a megmaradó 3 személy közül bárki ülhet, ez $2\cdot 3$ (= 6) eset.	1 pont	
Az utolsó két személy egyféleképpen tud leülni.	1 pont	
A lehetséges elhelyezkedések száma $15\cdot 6\cdot 1 = 90$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. b) **második megoldás**		
(Az egymás mögötti ülőhelyek számozása legyen pl. 1-2, 3-4, 5-6.) Két-két embert egymás mögé ültetünk. (Az 1-2 helyekre) az első két ember $\binom{6}{2}$(= 15)-féleképpen választható ki. A kiválasztott 2 ember csak egyféleképpen tud úgy leülni, hogy a magasabb üljön a második sorban (a 2-es számú helyen).	2 pont	
A következő két ember $\binom{4}{2}$(= 6)-féleképpen választható ki, ez a 2 ember is csak egyféleképpen tud leülni egymás mögé (a 3-4 helyekre).	2 pont	
Az utolsó két ember is egyféleképpen tud leülni (az 5-6 helyekre).	1 pont	
A lehetséges elhelyezkedések száma $15\cdot 6\cdot 1 = 90$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

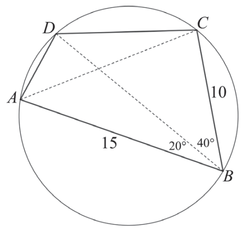
6. b) **harmadik megoldás**		
A társaság tagjai a hat helyre 6! (= 720)-féleképpen ülhetnek le.	2 pont	
Az első két egymás mögötti ember kétféleképpen tud leülni, és ebből pontosan az egyik ültetés (azaz a lehetőségek fele) lesz megfelelő. Hasonlóan a második és a harmadik páros esetében is a még lehetséges ültetések fele jó, és a fele nem jó.	2 pont	
A lehetséges ültetési módok száma tehát $\frac{6!}{2\cdot 2\cdot 2}=90$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. a) első megoldás		
A nem egymás melletti ülőhelyeket pl. balról jobbra számozva, a lányok a következő 10 lehetőség közül választhatnak: 1-3-5, 1-3-6, 1-3-7, 1-4-6, 1-4-7, 1-5-7, 2-4-6, 2-4-7, 2-5-7, 3-5-7.	2 pont*	*1 hiba esetén 1 pont, 2 vagy több hiba esetén 0 pont.*
Mindegyik lehetőséghez a lányoknak 3! (= 6) különböző ülési sorrendje tartozik.	1 pont	
A 4 fiú 4! (= 24) különböző sorrendben ülhet le.	1 pont	
A lehetőségek száma $10 \cdot 3! \cdot 4! =$	1 pont	
= 1440.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

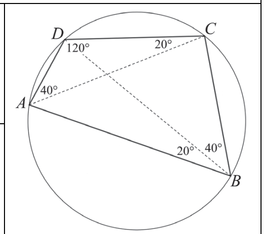
*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó. Ha sem a lányokat, sem a fiúkat nem különböztetjük meg egymástól, akkor a három lány négy x-szel jelölt „közt” határoz meg* (x L x L x L x). *A két középső közbe egy-egy fiúnak kerülnie kell, hogy ne legyenek szomszédos lányok. A maradék két fiú számára a négy köz közül kell kiválasztani kettőt úgy, hogy a kiválasztott közök sorrendje nem számít, és egy-egy köz többször is választható. A lehetőségek száma négy elem másodosztályú ismétléses kombinációinak a száma:* $\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$.

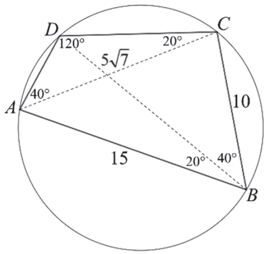
6. a) második megoldás		
(Meghatározzuk azoknak a sorrendeknek a számát, amelyekben két lány nincs egymás mellett.) A fiúk egymás közötti sorrendje 4! (= 24) lehet.	1 pont	
A 4 fiú bármely sorrendje esetén a 3 lány helyét öt x-szel jelölt hely közül választhatjuk: x F x F x F x F x.	1 pont	
Ez $\binom{5}{3}$ (= 10) különböző lehetőség.	1 pont	*Az első lány 5, a második 4, a harmadik 3 hely közül választhat. Összesen* $5 \cdot 4 \cdot 3$ (= 60) *különböző sorrendben ülhet le a három lány.*
Mindegyik lehetőség esetén a lányok egymáshoz képest 3! (= 6) különböző sorrendben ülhetnek le.	1 pont	
Az összes lehetőség száma: $4! \cdot \binom{5}{3} \cdot 3! =$	1 pont	$4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
= 1440.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

II.

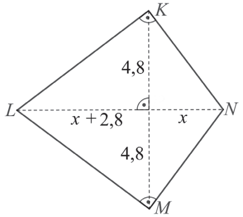
5. a)		
 (*ABC* háromszögben a *B*-nél fekvő szög 60°-os.) Koszinusztétel az *ABC* háromszögben: $AC^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 60°$.	1 pont	
$AC^2 = 225 + 100 - 150 = 175$.	1 pont	
$AC = \sqrt{175} = \sqrt{25 \cdot 7} = 5 \cdot \sqrt{7}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

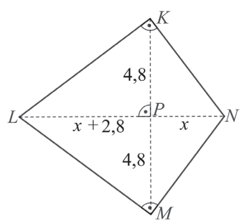
Megjegyzés: Ha a vizsgázó AC kiszámítása során közelítő értéket is használ, akkor megoldására legfeljebb 2 pontot kaphat.

5. b)		
ABCD húrnégyszög, ezért $ADC\sphericalangle = 180° - 60° = 120°$.	1 pont	
A kerületi szögek tétele miatt $ACD\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 20°$. Innen $CAD\sphericalangle = 180° - 120° - 20° = 40°$. (Az állítás igaz.)	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5. c)		
 Szinusztétel az ACD háromszögben: $\frac{AD}{AC}=\frac{\sin 20°}{\sin 120°}$.	1 pont	$\frac{CD}{AC}=\frac{\sin 40°}{\sin 120°}$
$AD=5\sqrt{7}\cdot\frac{\sin 20°}{\sin 120°}\approx 5{,}22$	1 pont	$CD\approx 9{,}82$
Az $ABCD$ négyszög területe az ABC és az ACD háromszög területének összege: $\frac{15\cdot 10\cdot\sin 60°}{2}+\frac{5\sqrt{7}\cdot 5{,}22\cdot\sin 40°}{2}\approx$ $\approx (64{,}95+22{,}19\approx)\ 87{,}1$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: A húrnégyszög félkerülete $s\approx 20{,}02$, *területe pedig (a húrnégyszögre vonatkozó területképlettel)* $\sqrt{5{,}02\cdot 10{,}02\cdot 10{,}20\cdot 14{,}80}\approx 87{,}1$.

5. d) első megoldás		
 A szimmetriaátló szakaszainak hossza x cm, illetve $x + 2{,}8$ cm.	1 pont	*A KLMN deltoid húrnégyszög (pl. a Thalész-tétel miatt).*
A KLN derékszögű háromszögben a magasságtétel miatt: $x(x+2{,}8)=4{,}8^2$.	2 pont	*Az átlók metszéspontján átmenő húrok szakaszainak szorzata egyenlő:* $x(x+2{,}8)=4{,}8^2$.
Rendezés után: $x^2+2{,}8x-23{,}04=0$.	1 pont	
Az egyenlet valós gyökei 3,6 és –6,4, de ez utóbbi nem lehetséges.	1 pont	
A deltoid LN szimmetriaátlója $3{,}6+6{,}4=10$ cm hosszú,	1 pont	
területe $(9{,}6\cdot 10:2=)$ 48 cm².	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

5. d) második megoldás		
 Pitagorasz-tétellel az NKL derékszögű háromszögből: $NK^2+KL^2=(2x+2{,}8)^2$, NPK derékszögű háromszögből: $NK^2=x^2+4{,}8^2$, KPL derékszögű háromszögből: $KL^2=(x+2{,}8)^2+4{,}8^2$.	2 pont	*Az LPK és KPN derékszögű háromszögek hasonlók, mert hegyesszögeik is páronként egyenlők (merőleges szárú hegyesszögpárok).*
Tehát $x^2+4{,}8^2+(x+2{,}8)^2+4{,}8^2=(2x+2{,}8)^2$.	1 pont	*A megfelelő oldalak arányának egyenlőségéből* $\frac{NP}{KP}=\frac{KP}{LP}$, *azaz* $\frac{x}{4{,}8}=\frac{4{,}8}{x+2{,}8}$.
$2x^2+5{,}6x+53{,}92=4x^2+11{,}2x+7{,}84$ $2x^2+5{,}6x-46{,}08=0$	1 pont	$x^2+2{,}8x-23{,}04=0$
Az egyenlet valós gyökei 3,6 és –6,4, de ez utóbbi nem lehetséges.	1 pont	
(Például Pitagorasz-tétellel) $KN = 6$ cm, $KL = 8$ cm,	1 pont	
a derékszögű deltoid területe $\frac{KN\cdot KL}{2}\cdot 2=48$ cm².	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	