9. a)		
A medence tervrajzának x tengely feletti része egy olyan háromszög, amelynek a harmadik csúcsa az $y = x$ és az $y = -2x + 2$ egyenesek metszéspontja.	1 pont	
$x = -2x + 2$, amiből $x = \frac{2}{3}$ és $y = x = \frac{2}{3}$.	1 pont	
A háromszög alakú rész területe tehát $\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{2}{3} =\right) \frac{1}{3}$.	1 pont	
Az x tengely alatti rész területe: $-\int_0^1 (x^3 - x)dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$	1 pont	
$= \frac{1}{4}$.	1 pont	
A tervrajzon a medence területe $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =\right) \frac{7}{12}$ (területegység).	1 pont	
Mivel a tervrajzon 1 egység a valóságban 12 m, ezért 1 területegység a valóságban $(12^2 =)$ 144 m^2.	1 pont	
A medence területe $\frac{7}{12}\cdot 144 = 84$ m^2 lesz.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

9. b)		
$f'(x) = -3x^2 + k$	1 pont	
Az érintőegyenesek meredeksége: $f'(1) = k - 3$, illetve $f'(2) = k - 12$.	1 pont	
Az érintési pontok $(1;\ k - 1)$, illetve $(2;\ 2k - 8)$,	1 pont	
az érintők egyenlete: $y = (k - 3)(x - 1) + k - 1$,	1 pont	$y = kx - 3x + 2$
illetve $y = (k - 12)(x - 2) + 2k - 8$.	1 pont	$y = kx - 12x + 16$
A metszéspont első koordinátájára fennáll: $kx - 3x + 2 = kx - 12x + 16$.	1 pont	
$x = \frac{14}{9}$	1 pont	
A metszéspont első koordinátája tehát (k értékétől függetlenül) $x = \frac{14}{9}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

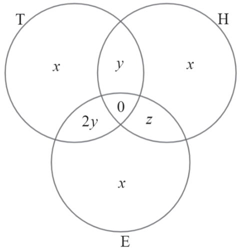
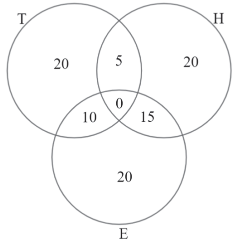
Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

8. a)		
$f(g(x)) = 2\sqrt{x} - 1$	1 pont	
$g(f(x)) = \sqrt{2x-1}$	1 pont	
Így megoldandó a $2\sqrt{x} - 1 = \sqrt{2x-1}$ egyenlet ($x \geq 1$). (Mindkét oldal pozitív az értelmezési tartomány miatt.) Négyzetre emelve: $4x - 4\sqrt{x} + 1 = 2x - 1$.	1 pont	
Rendezve és kettővel osztva: $x + 1 = 2\sqrt{x}$.	1 pont	$x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$
(Mindkét oldal pozitív.) Négyzetre emelve: $x^2 + 2x + 1 = 4x$, majd nullára rendezve: $x^2 - 2x + 1 = 0$.	1 pont	$(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$
Amiből $x = 1$ (amely eleme mindkét függvény értelmezési tartományának).	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy (az értelmezési tartományon) ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. b)		
$\int_a^b (2x-1)dx = \left[x^2 - x\right]_a^b =$	1 pont	
$= b^2 - b - a^2 + a =$	1 pont	
$= b^2 - a^2 - (b-a) = (b-a)(b+a) - (b-a) =$ $= (b - a)(b + a - 1)$ valóban.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">8. c)</td></tr>
<tr><td>Felhasználjuk, hogy
$\int_a^b (2x-1)dx = (b-a)(b+a-1) = 8.$
Mivel $b > a$, ezért $b - a > 0$,
tehát $(b + a - 1)$-nek is pozitívnak kell lennie.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Továbbá a és b egészek, tehát mindkét szorzótényező egész, így (a sorrendet is figyelembe véve) a 8 négyféleképpen bontható két tényező szorzatára:
$8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 1 \cdot 8$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Amiből:
<table>
<tr><td>$b - a$</td><td>$b + a - 1$</td><td>b</td><td>a</td></tr>
<tr><td>8</td><td>1</td><td>5</td><td>–3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>3,5</td><td>–0,5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>3,5</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>8</td><td>5</td><td>4</td></tr>
</table></td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Mivel a és b egészek, így két megoldása van a feladatnak: $a = –3$, $b = 5$ vagy $a = 4$, $b = 5$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

7. c)		
Az adatokat halmazábrán szemléltetve: 	1 pont	
A feladat szövege alapján: (1) $x + 3y = 35$; (2) $x + y + z = 40$; (3) $x + 2y + z = 45$.	2 pont	
A (3) egyenletből kivonva a (2) egyenletet kapjuk, hogy $y = 5$.	1 pont	
Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe: $x = 20$.	1 pont	
Végül a (2) egyenletből: $20 + 5 + z = 40$, tehát $z = 15$.	1 pont	
Tehát a selejtraktárban $3 \cdot 20 + 3 \cdot 5 + 15 = 90$ selejtes termék van.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
Értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^+$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
(A logaritmus azonossága alapján) $\log_3 x(x+2)=1$	1 pont	$\log_3 x(x+2)=\log_3 3$
(A logaritmus definíciója miatt) $x(x+2)=3$.	1 pont	*(A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért)* $x(x+2)=3$.
$x^2+2x-3=0$	1 pont	
$x=-3$ vagy $x=1$.	1 pont	
A –3 nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért nem megoldás.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
Az 1 eleme az értelmezési tartománynak, és (az értelmezési tartományon) ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát az 1 megoldás.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b) első megoldás		
A $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ azonosság felhasználásával $4(1-\cos^2 x)-16\cos^2 x=-1$.	1 pont	$4\sin^2 x-16(1-\sin^2 x)=-1$
$20\cos^2 x=5$ $\cos^2 x=\frac{1}{4}$	1 pont	$20\sin^2 x=15$ $\sin^2 x=\frac{3}{4}$
Első eset: $\cos x=\frac{1}{2}$.	1 pont	$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ vagy $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.	1 pont	$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ *vagy* $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
Második eset: $\cos x=-\frac{1}{2}$.	1 pont	$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ vagy $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.	1 pont	$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ *vagy* $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért mindegyik kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. b) második megoldás		
Hibás termék választásának valószínűsége 0,005, nem hibás termék választásának valószínűsége 0,995.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kérdezett valószínűség: $\sum_{k=2}^{15}\binom{15}{k}\cdot 0{,}005^k\cdot 0{,}995^{15-k}$.	1 pont	
Az összeg első tagja: $P(2)=\binom{15}{2}\cdot 0{,}005^2\cdot 0{,}995^{13}$ $(\approx 0{,}0025)$,	1 pont	
($P(3)\approx 5{,}36\cdot 10^{-5}$ kiszámítása és valószínűségi megfontolások alapján arra jutunk, hogy) a fenti 14 tagú összeg minden további tagja kisebb $5{,}4\cdot 10^{-5}$-nél, ezért az összeg kisebb $(0{,}0025+13\cdot 5{,}4\cdot 10^{-5}=)$ 0,003202-nál.	2 pont	
A keresett valószínűség így valóban biztosan kisebb 1%-nál.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:

1. A $\sum_{k=2}^{15}\binom{15}{k}\cdot 0{,}005^k\cdot 0{,}995^{15-k}$ *összeg első 5 tagja és a megfelelő tagok összege az alábbi táblázatban látható.*

i	$\binom{15}{i}\cdot 0{,}005^i\cdot 0{,}995^{15-i}$	$\sum_{k=2}^{i}\binom{15}{k}\cdot 0{,}005^k\cdot 0{,}995^{15-k}$
2	$\approx 0{,}002459$	$\approx 0{,}002459$
3	$\approx 5{,}36\cdot 10^{-5}$	$\approx 0{,}002513$
4	$\approx 8{,}07\cdot 10^{-7}$	$\approx 0{,}002514$
5	$\approx 8{,}93\cdot 10^{-9}$	$\approx 0{,}002514$
6	$\approx 7{,}48\cdot 10^{-11}$	$\approx 0{,}002514$

2. Ha a vizsgázó az a) feladatban rossz modellt használ (visszatevés nélküli helyett visszatevéses), akkor erre a részfeladatra nem jár pont.
Ha a vizsgázó a b) feladatban rossz modellt használ (visszatevéses helyett visszatevés nélküli), akkor erre a részfeladatra legfeljebb 2 pontot kaphat.

7. a) **első megoldás**		
A 600 termékből 15 elemű (visszatevés nélküli) minta összesen $\binom{600}{15}$ $(\approx 3{,}014\cdot 10^{29})$ -féleképpen választható ki (összes eset száma).	1 pont	
Az 594 nem hibás termékből $\binom{594}{15}$ $(\approx 2{,}588\cdot 10^{29})$ -féleképpen választható ki 15 elemű minta (kedvező esetek száma).	1 pont	
Tehát a kérdezett valószínűség $\frac{\binom{594}{15}}{\binom{600}{15}} \approx 0{,}859$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. a) **második megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy a mintavétel első eleme nem hibás, $\frac{594}{600}$. Ezt követően annak a valószínűsége, hogy a mintavétel második eleme nem hibás, $\frac{593}{599}$. És így tovább mind a 15 elemre.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Tehát a keresett valószínűség: $\frac{594}{600}\cdot\frac{593}{599}\cdot\ldots\cdot\frac{580}{586}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}859$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. b) **első megoldás**		
Hibás termék választásának valószínűsége 0,005, nem hibás termék választásának valószínűsége 0,995.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A komplementer esemény: 0 db vagy 1 db hibás termék van a 15 elemű mintában.) Annak a valószínűsége, hogy nincs hibás termék a mintában: $P(0) = 0{,}995^{15}$ $(\approx 0{,}9276)$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy pontosan 1 hibás termék van a mintában: $P(1) = \binom{15}{1}\cdot 0{,}005\cdot 0{,}995^{14}$ $(\approx 0{,}0699)$,	2 pont	
tehát a kérdezett valószínűség $1 - P(0) - P(1) = 0{,}0025$.	1 pont	
Ez valóban kisebb 1%-nál.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b) **második megoldás**		
A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság felhasználásával $4\sin^2 x - 16\cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x)$. $5\sin^2 x = 15\cos^2 x$	1 pont	
Mivel $\cos x = 0$ nem lehetséges (mert akkor $\sin^2 x = 1$ lenne), ezért $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3$, vagyis $\mathrm{tg}^2 x = 3$.	1 pont	
Első eset: $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$.	1 pont	
$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$	1 pont	
Második eset: $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$.	1 pont	
$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$	1 pont	
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért mindegyik kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a megoldásokat fokban helyesen adja meg, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.
2. Ha a vizsgázó válaszát periódus nélkül adja meg, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.
3. Ha a vizsgázó periódussal adja meg az egyenlet megoldásait, de a $k \in$ **Z** *feltételt egyszer sem említi, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.*

2. a) **első megoldás**		
1 gallon üzemanyaggal 25,4 mérföld, azaz $25{,}4\cdot 1{,}61 \approx 40{,}89$ km tehető meg.	1 pont	
Ezért 100 km megtételéhez $100 : 40{,}89 \approx 2{,}45$ gallon üzemanyag szükséges.	1 pont	
Ez $2{,}45\cdot 3{,}79 \approx 9{,}29$ liter,	1 pont	
tehát (a kért kerekítéssel) 9,3 liter/100 km az átlagfogyasztás.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

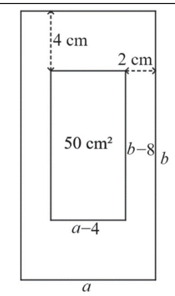
2. a) **második megoldás**		
(Mivel 1 gallon ≈ 3,79 liter, ezért) 1 liter üzemanyaggal $25{,}4 : 3{,}79 \approx 6{,}70$ mérföld,	1 pont	
azaz $6{,}70\cdot 1{,}61 \approx 10{,}79$ km tehető meg.	1 pont	
Ezért a 100 km megtételéhez szükséges üzemanyag $100 : 10{,}79 \approx 9{,}27$ liter,	1 pont	
tehát (a kért kerekítéssel) 9,3 liter/100 km az átlagfogyasztás.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

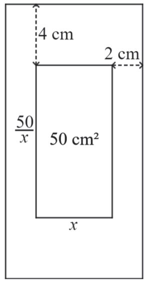
2. b)		
Ha a rendszám két magánhangzóval kezdődik: $5 \cdot 5$ (= 25) eset.	1 pont*	
Ha a rendszám két mássalhangzóval kezdődik (az összes elvileg lehetséges esetből a felsorolt nem előforduló esetek számát kivonva): $21 \cdot 21 - 7$ (= 434) eset.	2 pont*	
Ez összesen 25 + 434 = 459 lehetőség.	1 pont*	
A rendszám további része $26 \cdot 26 \cdot 999$ (= 675 324)-féleképpen folytatható.	1 pont	
Tehát összesen $459 \cdot 675\,324 = 309\,973\,716$ rendszám felel meg az összes feltételnek.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Komplementer módszerrel számolva: $26 \cdot 26$ (= 676)-féleképpen lehet az első és a második betűt megválasztani.	1 pont	
Ezek közül nem megfelelő, ha: 1) az első helyen magánhangzó, a második helyen pedig mássalhangzó áll, ez $5 \cdot 21$ (= 105) eset; 2) az első helyen mássalhangzó, a második helyen pedig magánhangzó áll, ez $21 \cdot 5$ (= 105) eset; 3) a letiltott kétjegyű betűk valamelyikével kezdődik a rendszám, ez 7 eset.	2 pont	
Ez összesen $676 - (2 \cdot 105 + 7) = 459$ lehetőség.	1 pont	

2. c)		
C	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

6. c) második megoldás		
Ha a kartonlap oldalhosszai a cm, illetve b cm, akkor az 50 cm^2 területű téglalap oldalai $a - 4$ cm, illetve $b - 8$ cm ($a > 4$ és $b > 8$).	1 pont	
Ekkor $(a - 4)(b - 8) = 50$.	1 pont	
Ebből $b = \frac{50}{a-4} + 8$, a kartonlap területe pedig $ab = a\left(\frac{50}{a-4} + 8\right) = \frac{50a}{a-4} + 8a$.	1 pont	
A T: $]4; \infty[\to \mathbf{R}$; $T(a) = \frac{50a}{a-4} + 8a$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T'(a) = 8 - \frac{200}{(a-4)^2} = 0$	1 pont	
Innen $a = 9$ (mert $a > 4$).	1 pont	
$T''(a) = \frac{400}{(a-4)^3}$, tehát $T''(9) > 0$. A függvénynek ezért a 9 (lokális és egyben abszolút) minimumhelye.	1 pont	*Ha $a < 9$, akkor $T' < 0$, ha $a > 9$, akkor $T' > 0$, ezért a 9 abszolút minimumhelye a T-nek.*
Ha $a = 9$, akkor $b = 18$, tehát a legkisebb területű kartonlap oldalhosszai 9 cm, illetve 18 cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

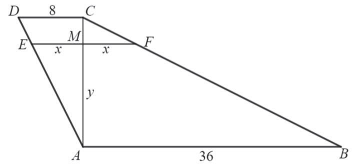
6. c) első megoldás		
Az 50 cm^2-es téglalap oldalai x cm és $\frac{50}{x}$ cm hosszúak, és az x cm-es oldal legyen párhuzamos a kartonlap felső és alsó élével ($x > 0$).	1 pont	
A kartonlap területe $(x+4)\cdot\left(\frac{50}{x}+8\right)=82+8x+\frac{200}{x}$ cm^2.	2 pont	
A T: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $T(x)=82+8x+\frac{200}{x}$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T'(x)=8-\frac{200}{x^2}=0$	1 pont*	
Innen $x = 5$ (mert $x > 0$).	1 pont*	
$T''(x)=\frac{400}{x^3}$, tehát $T''(5)>0$. A függvénynek ezért az 5 (lokális és egyben abszolút) minimumhelye.	1 pont*	*Ha $x < 5$, akkor $T' < 0$, ha $x > 5$, akkor $T' > 0$, ezért az 5 abszolút minimumhelye a T-nek.*
Mivel $\frac{50}{x}=\frac{50}{5}=10$, ezért a legkisebb területű kartonlap méretei $(5 + 2\cdot 2 =)$ 9 cm, illetve $(10 + 2\cdot 4 =)$ 18 cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

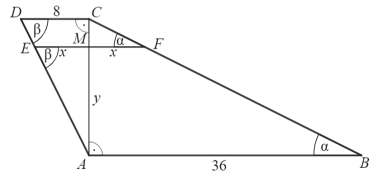
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

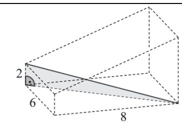
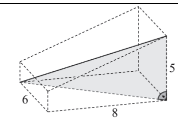
A $82+8x+\frac{200}{x}$ összeg második és harmadik tagjára alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget: $82+8x+\frac{200}{x}\ge 82+2\cdot\sqrt{8x\cdot\frac{200}{x}}=82+80=162$.	2 pont	
Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $8x=\frac{200}{x}$,	1 pont	
amiből $x^2=25$, azaz $x = 5$ (mert $x > 0$).	1 pont	

3. a)		
A trapéz szárainak hossza: $BC=\sqrt{36^2+11^2}\approx 37{,}6$ m, $AD=\sqrt{8^2+11^2}\approx 13{,}6$ m.	2 pont	
A kert kerülete 36 + 37,6 + 8 + 13,6 = 95,2 m.	1 pont	
A kert területe $\frac{36+8}{2}\cdot 11=242$ m^2.	1 pont	$T=\frac{36\cdot 11}{2}+\frac{8\cdot 11}{2}=242$ m^2
Összesen:	**4 pont**	

3. b)		
A henger alakú kút sugara 0,05 méter.	1 pont	
Ha a kút mélysége (a henger magassága) h méter, akkor a kút térfogata: $0{,}1 = 0{,}05^2\cdot\pi\cdot h$.	1 pont	
$h \approx 12{,}7$ (méter mély a kút).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. c) első megoldás		
 (Az e egyenes az AC átlót az M pontban metszi. A feltétel szerint $EM = MF = x$. Keressük az $AM = y$ távolságot.)	1 pont	
Az AME háromszög hasonló az ACD háromszöghöz (mert szögeik egyenlők), így $\frac{x}{y}=\frac{8}{11}$. A CMF háromszög hasonló a CAB háromszöghöz (mert szögeik egyenlők), így $\frac{x}{11-y}=\frac{36}{11}$.	2 pont	*A CAD szögben a párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján $\frac{x}{8}=\frac{y}{11}$. Az ACB szögben a párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján $\frac{x}{36}=\frac{11-y}{11}$.*
Behelyettesítve az első aránypárból kapott $x=\frac{8y}{11}$ kifejezést: $\frac{\frac{8y}{11}}{11-y}=\frac{36}{11}$.	1 pont	
$8y = 36(11 - y)$	1 pont	
$y = 9$, tehát a keresett távolság 9 (méter).	1 pont	
	6 pont	

3. c) **második megoldás**		
(Az e egyenes az AC átlót az M pontban metszi. A feltétel szerint $EM = MF = x$. Keressük az $AM = y$ távolságot.)	1 pont	
Az ábrán jelölt α és β szögek tangensei az ABC, illetve az ADC háromszögben: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{11}{36}$ és $\operatorname{tg}\beta = \frac{11}{8}$.	1 pont	$\alpha = 16{,}99°$ $\beta = 53{,}97°$
Az MFC, illetve az AEM háromszögben a tangensek segítségével felírható: $x \cdot \operatorname{tg}\alpha + x \cdot \operatorname{tg}\beta = 11$.	1 pont	
$\frac{11}{36}x + \frac{11}{8}x = 11$	1 pont	
$x = \frac{72}{11}$	1 pont	
$y = \frac{72}{11} \cdot \frac{11}{8} = 9$, tehát a keresett távolság 9 (méter).	1 pont	
	6 pont	

6. a)		
(A test a 6 cm-es él felezőpontján átmenő függőleges síkra szimmetrikus, ezért) csak kétféle hosszúságú testátló van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A rövidebb testátló hossza (egy $6 \times 8 \times 2$ cm élű téglatest testátlója:) $\sqrt{6^2 + 8^2 + 2^2}\ (= \sqrt{104}) \approx 10{,}2$ cm.	1 pont	
A hosszabb testátló hossza (egy $6 \times 8 \times 5$ cm élű téglatest testátlója:) $\sqrt{6^2 + 8^2 + 5^2}\ (= \sqrt{125}) \approx 11{,}2$ cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. b) első megoldás		
A téglalap területe, amelyből a test hálója kivágható: $(15 \cdot 16 =)\ 240\ \text{cm}^2$.	1 pont	
A test hálójában a 3 téglalap együttes területe $(6 \cdot 15 =)\ 90\ \text{cm}^2$, a két trapéz területe együtt $(8 \cdot 7 =)\ 56\ \text{cm}^2$.	1 pont	
A test hálójának területe $(90 + 56 =)\ 146\ \text{cm}^2$,	1 pont	
ez a téglalap területének $(146 : 240 \approx)$ 60,8%-a,	1 pont	
tehát 39,2% hulladék keletkezik.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. b) második megoldás		
A téglalap területe, amelyből a test hálója kivágható: $(15 \cdot 16 =)\ 240\ \text{cm}^2$.	1 pont	
A hulladék összetevői: két 5 cm oldalú négyzet, melyek összterülete $50\ \text{cm}^2$; két 2×5 cm-es téglalap, melyek összterülete $20\ \text{cm}^2$; két derékszögű háromszög, melyek befogói 3 cm és 8 cm hosszúak, ezek összterülete $24\ \text{cm}^2$.	2 pont	
A hulladék területe összesen $(50 + 20 + 24 =)\ 94\ \text{cm}^2$,	1 pont	
tehát $(94 : 240 \approx)$ 39,2% hulladék keletkezik.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten (például az alábbihoz hasonló táblázat alapján) felsorolja a megfelelő lehetőségeket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.
A táblázatban a filmek sorrendje Kocka, A kör, Képlet. Az első sorban vannak a Pali által, az első oszlopban pedig a Lilla által adott pontszámok a filmek sorrendjében. A többi cellában a pontszámok összegei vannak a filmek sorrendjében. A szürke hátterű cellákban a félkövér betűtípussal kiemelt pontösszegű filmet nézi meg Pali és Lilla. A fehér hátterű cellákban a két legkisebb pontösszeg egyenlő, ekkor nem néznek filmet.

Pali/ Lilla	123	132	213	231	312	321
123	246	255	336	354	435	444
132	255	264	345	363	444	453
213	336	345	426	444	525	534
231	354	363	444	462	543	552
312	435	444	525	543	624	633
321	444	453	534	552	633	642

5. d)		
A 83 értékelés összege $83 \cdot 5 = 415$.	1 pont	
46 darab 1-es értékelés esetén a maradék 37 értékelés összege 415 – 46 = 369.	1 pont	
Ez az összeg csak úgy adódhat, ha 36 darab 10-es értékelés mellett 1 darab 9-es értékelést kapott a film.	1 pont	
A szórás: $\sqrt{\frac{46\cdot(1-5)^2+(9-5)^2+36\cdot(10-5)^2}{83}}=\sqrt{\frac{1652}{83}}\approx$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
$\approx 4{,}46$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. a) első megoldás		
A számtani sorozat első 20 tagjának összege $\frac{a_1+108}{2}\cdot 20=1115$.	1 pont	
$a_1+108=111{,}5$, így a sorozat első tagja: $a_1=3{,}5$.	2 pont	
(Mivel $a_{20}=a_1+19d$, így) a sorozat differenciája: $d=\frac{108-3{,}5}{19}=$	1 pont	
= 5,5.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. a) második megoldás		
A számtani sorozat 20. tagja: $a_1+19d=108$.	1 pont	
Az első 20 tag összege: $\frac{2a_1+19d}{2}\cdot 20=1115$.	1 pont	
$a_1=108-19d$ -t behelyettesítve és 10-zel osztva: $2(108-19d)+19d=111{,}5$.	1 pont	
Innen $d = 5{,}5$.	1 pont	
$a_1=(108-19\cdot 5{,}5=)\,3{,}5$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. b)		
(A sorozat tagjai $3,\ 3\cdot 3,\ 3\cdot 3^2\ldots$, így) az első n tag szorzata: $3\cdot 3^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot 3^n=3^{435}$.	1 pont	
(A hatványozás azonossága miatt) $3^{1+2+\ldots+n}=3^{435}$.	1 pont	
(Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $1 + 2 + \ldots + n = 435$.	1 pont	
Az első n egész szám összege: $\frac{n(n+1)}{2}=435$.	1 pont	
$n^2+n-870=0$	1 pont	
$n = -30$ vagy $n = 29$.	1 pont	
($n\in\mathbf{Z}^+$ miatt) az n értéke 29 (ami valóban megfelel).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II.

5. a)		
A *Kocka* 2 + 3 = 5 pontot, *A kör* 1 + 2 = 3 pontot, a *Képlet* pedig 3 + 1 = 4 pontot kapna.	1 pont	
A kör című filmet néznék meg.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5. b)		
A három filmre adott pontszámok összege 12, tehát mindhárom filmnek 4 pontot kell kapnia.	1 pont	
(Pontegyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha az egyik film Palitól 1 pontot és Lillától 3 pontot kap; egy másik film Palitól és Lillától is 2 pontot kap; a harmadik film Palitól 3 és Lillától 1 pontot kap.) Tehát a Pali által adott pontszámok egyértelműen meghatározzák a Lilla által adott pontszámokat.	1 pont	
Pali az 1, 2, 3 pontszámokat 3! = 6-féleképp oszthatja ki a három film között, tehát 6 ilyen eset van.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felsorolja a megfelelő lehetőségeket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

5. c) első megoldás		
Feltehetjük, hogy Pali a *Kocka* című filmnek 1, *A kör*-nek 2, a *Képlet*-nek pedig 3 pontot adott. Lilla 6-féleképpen pontozhat, megvizsgáljuk, hogy az egyes esetekben néznek-e filmet.	1 pont	
(táblázat lent)	4 pont	
(Mivel Pali bármely pontsorrendje esetén a 6 lehetséges esetből 4-ben néznek filmet, ezért) a kérdezett valószínűség $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

P	L	L	L	L	L	L
Kocka: 1	1	1	2	2	3	3
A kör: 2	2	3	1	3	1	2
Képlet: 3	3	2	3	1	2	1
Összegek	2,4,6	2,5,5	3,3,6	3,5,4	4,3,5	4,4,4
Filmnézés	I	I	N	I	I	N

5. c) második megoldás		
(A pontszámokat Pali is és Lilla is 3! = 6-féleképpen oszthatja ki.) Az összes eset száma $6\cdot 6=36$.	1 pont	
A megnézendő film pontösszege csak 2 vagy 3 lehet.	1 pont	
I. eset (az összeg 2): Ekkor az egyik film mindkettőjüktől 1 pontot kap. Ekkor a másik két film $2\cdot 2=4$-féleképpen kaphatja meg a maradék pontokat. Mivel a megnézendő film 3-féle lehet, ez $4\cdot 3=12$ lehetőség.	1 pont	
II. eset (az összeg 3): Ekkor a megnézendő film például Palitól 1 pontot, Lillától pedig 2 pontot kap. Mivel több film nem kaphat 3 pontot, ezért amelyik film Lillától 1 pontot kap (ez 2-féle film lehet), annak Palitól 3-at kell kapnia. A harmadik film pontszámai ezek után egyértelműek. Mivel Pali és Lilla szerepe felcserélhető, és a megnézendő film 3-féle lehet, ez $2\cdot 2\cdot 3=12$ lehetőség. (A kedvező esetek száma tehát 12 + 12 = 24.)	2 pont	
A kérdezett valószínűség így $\frac{12+12}{36}=\frac{2}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. c) harmadik megoldás		
(A pontszámokat Pali is és Lilla is 3! = 6-féleképpen oszthatja ki.) Az összes eset $6\cdot 6=36$ lehetőség.	1 pont	
Komplementer módszerrel dolgozva: abban az esetben nem néznek filmet, ha a pontszámokban az első helyen holtverseny van. Ekkor a kapott pontösszegek a következők lehetnek: 4, 4, 4 vagy 3, 3, 6 (valamilyen sorrendben).	1 pont	
I. eset (4, 4, 4): Ekkor az egyik film mindkettőjüktől 2 pontot kap. A másik két film az egyiktől 1 pontot, a másiktól pedig 3 pontot kap. Az a film, amelyik mindkettőjüktől 2 pontot kap, 3-féle lehet, a másik két film pedig 2-féleképpen kaphatja meg a maradék pontokat. Ez $3\cdot 2=6$ lehetőség.	1 pont	
II. eset (3, 3, 6): Ekkor az egyik film mindkettőjüktől 3 pontot kap. A másik két film az egyiktől 1 pontot, a másiktól pedig 2 pontot kap. Az a film, amelyik mindkettőjüktől 3 pontot kap, 3-féle lehet, a másik két film pedig 2-féleképpen kaphatja meg a maradék pontokat. Ez $3\cdot 2=6$ lehetőség.	1 pont	
Annak a valószínűsége tehát, hogy nem néznek filmet, $\frac{6+6}{36}=\frac{1}{3}$.	1 pont	
A kérdezett valószínűség így $\left(1-\frac{1}{3}=\right)\frac{2}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	