ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
Értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^+$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
(A logaritmus azonossága alapján) $\log_3 x(x+2)=1$	1 pont	$\log_3 x(x+2)=\log_3 3$
(A logaritmus definíciója miatt) $x(x+2)=3$.	1 pont	*(A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért)* $x(x+2)=3$.
$x^2+2x-3=0$	1 pont	
$x=-3$ vagy $x=1$.	1 pont	
A –3 nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért nem megoldás.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
Az 1 eleme az értelmezési tartománynak, és (az értelmezési tartományon) ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát az 1 megoldás.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b) első megoldás		
A $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ azonosság felhasználásával $4(1-\cos^2 x)-16\cos^2 x=-1$.	1 pont	$4\sin^2 x-16(1-\sin^2 x)=-1$
$20\cos^2 x=5$ $\cos^2 x=\frac{1}{4}$	1 pont	$20\sin^2 x=15$ $\sin^2 x=\frac{3}{4}$
Első eset: $\cos x=\frac{1}{2}$.	1 pont	$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ vagy $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.	1 pont	$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ *vagy* $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.
Második eset: $\cos x=-\frac{1}{2}$.	1 pont	$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ vagy $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.	1 pont	$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ *vagy* $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért mindegyik kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b) második megoldás		
A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság felhasználásával $4\sin^2 x - 16\cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x)$. $5\sin^2 x = 15\cos^2 x$	1 pont	
Mivel $\cos x = 0$ nem lehetséges (mert akkor $\sin^2 x = 1$ lenne), ezért $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3$, vagyis $\mathrm{tg}^2 x = 3$.	1 pont	
Első eset: $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$.	1 pont	
$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$	1 pont	
Második eset: $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$.	1 pont	
$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$	1 pont	
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért mindegyik kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a megoldásokat fokban helyesen adja meg, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.
2. Ha a vizsgázó válaszát periódus nélkül adja meg, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.
3. Ha a vizsgázó periódussal adja meg az egyenlet megoldásait, de a $k \in \mathbf{Z}$ feltételt egyszer sem említi, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.

2. a) első megoldás		
1 gallon üzemanyaggal 25,4 mérföld, azaz $25{,}4 \cdot 1{,}61 \approx 40{,}89$ km tehető meg.	1 pont	
Ezért 100 km megtételéhez $100 : 40{,}89 \approx 2{,}45$ gallon üzemanyag szükséges.	1 pont	
Ez $2{,}45 \cdot 3{,}79 \approx 9{,}29$ liter,	1 pont	
tehát (a kért kerekítéssel) 9,3 liter/100 km az átlagfogyasztás.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. a) második megoldás		
(Mivel 1 gallon ≈ 3,79 liter, ezért) 1 liter üzemanyaggal $25{,}4 : 3{,}79 \approx 6{,}70$ mérföld,	1 pont	
azaz $6{,}70 \cdot 1{,}61 \approx 10{,}79$ km tehető meg.	1 pont	
Ezért a 100 km megtételéhez szükséges üzemanyag $100 : 10{,}79 \approx 9{,}27$ liter,	1 pont	
tehát (a kért kerekítéssel) 9,3 liter/100 km az átlagfogyasztás.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. b)		
Ha a rendszám két magánhangzóval kezdődik: $5 \cdot 5$ (= 25) eset.	1 pont*	
Ha a rendszám két mássalhangzóval kezdődik (az összes elvileg lehetséges esetből a felsorolt nem előforduló esetek számát kivonva): $21 \cdot 21 - 7$ (= 434) eset.	2 pont*	
Ez összesen 25 + 434 = 459 lehetőség.	1 pont*	
A rendszám további része $26 \cdot 26 \cdot 999$ (= 675 324)-féleképpen folytatható.	1 pont	
Tehát összesen $459 \cdot 675\,324 = 309\,973\,716$ rendszám felel meg az összes feltételnek.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

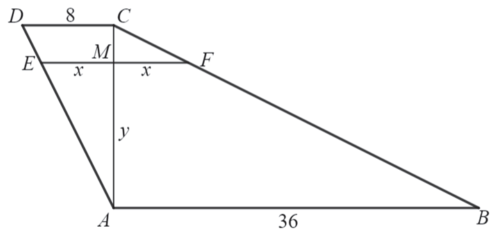
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

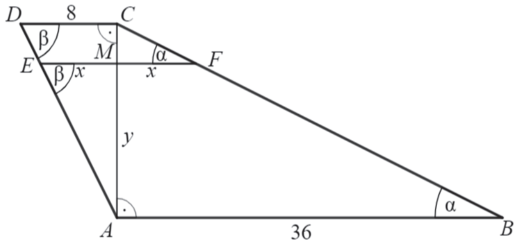
Komplementer módszerrel számolva: $26 \cdot 26$ (= 676)-féleképpen lehet az első és a második betűt megválasztani.	1 pont	
Ezek közül nem megfelelő, ha: 1) az első helyen magánhangzó, a második helyen pedig mássalhangzó áll, ez $5 \cdot 21$ (= 105) eset; 2) az első helyen mássalhangzó, a második helyen pedig magánhangzó áll, ez $21 \cdot 5$ (= 105) eset; 3) a letiltott kétjegyű betűk valamelyikével kezdődik a rendszám, ez 7 eset.	2 pont	
Ez összesen $676 - (2 \cdot 105 + 7) = 459$ lehetőség.	1 pont	

2. c)		
C	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

3. a)		
A trapéz szárainak hossza: $BC=\sqrt{36^2+11^2}\approx 37{,}6$ m, $AD=\sqrt{8^2+11^2}\approx 13{,}6$ m.	2 pont	
A kert kerülete 36 + 37,6 + 8 + 13,6 = 95,2 m.	1 pont	
A kert területe $\frac{36+8}{2}\cdot 11=242$ m^2.	1 pont	$T=\frac{36\cdot 11}{2}+\frac{8\cdot 11}{2}=242$ m^2
Összesen:	**4 pont**	

3. b)		
A henger alakú kút sugara 0,05 méter.	1 pont	
Ha a kút mélysége (a henger magassága) h méter, akkor a kút térfogata: $0{,}1=0{,}05^2\cdot\pi\cdot h$.	1 pont	
$h\approx 12{,}7$ (méter mély a kút).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. c) első megoldás		
 (Az e egyenes az AC átlót az M pontban metszi. A feltétel szerint $EM=MF=x$. Keressük az $AM=y$ távolságot.)	1 pont	
Az AME háromszög hasonló az ACD háromszöghöz (mert szögeik egyenlők), így $\frac{x}{y}=\frac{8}{11}$. A CMF háromszög hasonló a CAB háromszöghöz (mert szögeik egyenlők), így $\frac{x}{11-y}=\frac{36}{11}$.	2 pont	*A CAD szögben a párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján* $\frac{x}{8}=\frac{y}{11}$. *Az ACB szögben a párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján* $\frac{x}{36}=\frac{11-y}{11}$.
Behelyettesítve az első aránypárból kapott $x=\frac{8y}{11}$ kifejezést: $\frac{\frac{8y}{11}}{11-y}=\frac{36}{11}$.	1 pont	
$8y=36(11-y)$	1 pont	
$y=9$, tehát a keresett távolság 9 (méter).	1 pont	
	6 pont	

3. c) **második megoldás**		
 (Az *e* egyenes az *AC* átlót az *M* pontban metszi. A feltétel szerint $EM = MF = x$. Keressük az $AM = y$ távolságot.)	1 pont	
Az ábrán jelölt α és β szögek tangensei az *ABC*, illetve az *ADC* háromszögben: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{11}{36}$ és $\operatorname{tg}\beta = \frac{11}{8}$.	1 pont	α = 16,99° β = 53,97°
Az *MFC*, illetve az *AEM* háromszögben a tangensek segítségével felírható: $x \cdot \operatorname{tg}\alpha + x \cdot \operatorname{tg}\beta = 11$.	1 pont	
$\frac{11}{36}x + \frac{11}{8}x = 11$	1 pont	
$x = \frac{72}{11}$	1 pont	
$y = \frac{72}{11} \cdot \frac{11}{8} = 9$, tehát a keresett távolság 9 (méter).	1 pont	
	6 pont	

4. a) **első megoldás**		
A számtani sorozat első 20 tagjának összege $\frac{a_1+108}{2}\cdot 20=1115$.	1 pont	
$a_1+108=111{,}5$, így a sorozat első tagja: $a_1=3{,}5$.	2 pont	
(Mivel $a_{20}=a_1+19d$, így) a sorozat differenciája: $d=\frac{108-3{,}5}{19}=$	1 pont	
= 5,5.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. a) **második megoldás**		
A számtani sorozat 20. tagja: $a_1+19d=108$.	1 pont	
Az első 20 tag összege: $\frac{2a_1+19d}{2}\cdot 20=1115$.	1 pont	
$a_1=108-19d$ -t behelyettesítve és 10-zel osztva: $2(108-19d)+19d=111{,}5$.	1 pont	
Innen $d=5{,}5$.	1 pont	
$a_1=(108-19\cdot 5{,}5=)\ 3{,}5$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. b)		
(A sorozat tagjai 3, $3\cdot 3$, $3\cdot 3^2$…, így) az első n tag szorzata: $3\cdot 3^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot 3^n=3^{435}$.	1 pont	
(A hatványozás azonossága miatt) $3^{1+2+\ldots+n}=3^{435}$.	1 pont	
(Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $1+2+\ldots+n=435$.	1 pont	
Az első n egész szám összege: $\frac{n(n+1)}{2}=435$.	1 pont	
$n^2+n-870=0$	1 pont	
$n=-30$ vagy $n=29$.	1 pont	
($n\in\mathbf{Z}^+$ miatt) az n értéke 29 (ami valóban megfelel).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II.

5. a)		
A *Kocka* 2 + 3 = 5 pontot, *A kör* 1 + 2 = 3 pontot, a *Képlet* pedig 3 + 1 = 4 pontot kapna.	1 pont	
A kör című filmet néznék meg.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5. b)		
A három filmre adott pontszámok összege 12, tehát mindhárom filmnek 4 pontot kell kapnia.	1 pont	
(Pontegyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha az egyik film Palitól 1 pontot és Lillától 3 pontot kap; egy másik film Palitól és Lillától is 2 pontot kap; a harmadik film Palitól 3 és Lillától 1 pontot kap.) Tehát a Pali által adott pontszámok egyértelműen meghatározzák a Lilla által adott pontszámokat.	1 pont	
Pali az 1, 2, 3 pontszámokat 3! = 6-féleképp oszthatja ki a három film között, tehát 6 ilyen eset van.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felsorolja a megfelelő lehetőségeket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

5. c) első megoldás		
Feltehetjük, hogy Pali a *Kocka* című filmnek 1, *A kör*-nek 2, a *Képlet*-nek pedig 3 pontot adott. Lilla 6-féleképpen pontozhat, megvizsgáljuk, hogy az egyes esetekben néznek-e filmet.	1 pont	
(lásd a táblázatot alább)	4 pont	
(Mivel Pali bármely pontsorrendje esetén a 6 lehetséges esetből 4-ben néznek filmet, ezért) a kérdezett valószínűség $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

P		L	L	L	L	L	L
Kocka:	1	1	1	2	2	3	3
A kör:	2	2	3	1	3	1	2
Képlet:	3	3	2	3	1	2	1
Összegek		2,4,6	2,5,5	3,3,6	3,5,4	4,3,5	4,4,4
Filmnézés		I	I	N	I	I	N

5. c) második megoldás		
(A pontszámokat Pali is és Lilla is 3! = 6-féleképpen oszthatja ki.) Az összes eset száma $6 \cdot 6 = 36$.	1 pont	
A megnézendő film pontösszege csak 2 vagy 3 lehet.	1 pont	

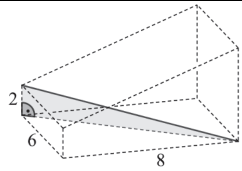
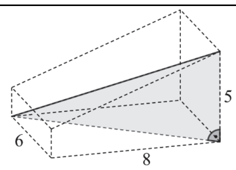
I. eset (az összeg 2): Ekkor az egyik film mindkettőjüktől 1 pontot kap. Ekkor a másik két film $2 \cdot 2 = 4$-féleképpen kaphatja meg a maradék pontokat. Mivel a megnézendő film 3-féle lehet, ez $4 \cdot 3 = 12$ lehetőség.	1 pont	
II. eset (az összeg 3): Ekkor a megnézendő film például Palitól 1 pontot, Lillától pedig 2 pontot kap. Mivel több film nem kaphat 3 pontot, ezért amelyik film Lillától 1 pontot kap (ez 2-féle film lehet), annak Palitól 3-at kell kapnia. A harmadik film pontszámai ezek után egyértelműek. Mivel Pali és Lilla szerepe felcserélhető, és a megnézendő film 3-féle lehet, ez $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ lehetőség. (A kedvező esetek száma tehát 12 + 12 = 24.)	2 pont	
A kérdezett valószínűség így $\frac{12+12}{36} = \frac{2}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. c) harmadik megoldás		
(A pontszámokat Pali is és Lilla is 3! = 6-féleképpen oszthatja ki.) Az összes eset $6 \cdot 6 = 36$ lehetőség.	1 pont	
Komplementer módszerrel dolgozva: abban az esetben nem néznek filmet, ha a pontszámokban az első helyen holtverseny van. Ekkor a kapott pontösszegek a következők lehetnek: 4, 4, 4 vagy 3, 3, 6 (valamilyen sorrendben).	1 pont	
I. eset (4, 4, 4): Ekkor az egyik film mindkettőjüktől 2 pontot kap. A másik két film az egyiktől 1 pontot, a másiktól pedig 3 pontot kap. Az a film, amelyik mindkettőjüktől 2 pontot kap, 3-féle lehet, a másik két film pedig 2-féleképpen kaphatja meg a maradék pontokat. Ez $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség.	1 pont	
II. eset (3, 3, 6): Ekkor az egyik film mindkettőjüktől 3 pontot kap. A másik két film az egyiktől 1 pontot, a másiktól pedig 2 pontot kap. Az a film, amelyik mindkettőjüktől 3 pontot kap, 3-féle lehet, a másik két film pedig 2-féleképpen kaphatja meg a maradék pontokat. Ez $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség.	1 pont	
Annak a valószínűsége tehát, hogy nem néznek filmet, $\frac{6+6}{36} = \frac{1}{3}$.	1 pont	
A kérdezett valószínűség így $\left(1 - \frac{1}{3} =\right) \frac{2}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten (például az alábbihoz hasonló táblázat alapján) felsorolja a megfelelő lehetőségeket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.
A táblázatban a filmek sorrendje Kocka, A kör, Képlet. Az első sorban vannak a Pali által, az első oszlopban pedig a Lilla által adott pontszámok a filmek sorrendjében. A többi cellában a pontszámok összegei vannak a filmek sorrendjében. A szürke hátterű cellákban a félkövér betűtípussal kiemelt pontösszegű filmet nézi meg Pali és Lilla. A fehér hátterű cellákban a két legkisebb pontösszeg egyenlő, ekkor nem néznek filmet.

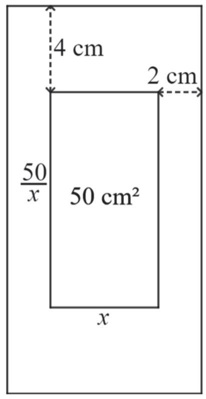
Pali/ Lilla	123	132	213	231	312	321
123	**2**46	**2**55	336	**3**54	4**3**5	444
132	**2**55	**2**64	**3**45	363	444	45**3**
213	336	**3**45	4**2**6	444	5**2**5	5**3**4
231	**3**54	363	444	46**2**	54**3**	55**2**
312	4**3**5	444	5**2**5	54**3**	6**2**4	633
321	444	45**3**	5**3**4	55**2**	633	64**2**

5. d)		
A 83 értékelés összege $83 \cdot 5 = 415$.	1 pont	
46 darab 1-es értékelés esetén a maradék 37 értékelés összege $415 - 46 = 369$.	1 pont	
Ez az összeg csak úgy adódhat, ha 36 darab 10-es értékelés mellett 1 darab 9-es értékelést kapott a film.	1 pont	
A szórás: $\sqrt{\frac{46\cdot(1-5)^2+(9-5)^2+36\cdot(10-5)^2}{83}}=\sqrt{\frac{1652}{83}}\approx$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
$\approx 4{,}46$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. a)		
(A test a 6 cm-es él felezőpontján átmenő függőleges síkra szimmetrikus, ezért) csak kétféle hosszúságú testátló van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A rövidebb testátló hossza (egy $6 \times 8 \times 2$ cm élű téglatest testátlója:) $\sqrt{6^2+8^2+2^2}\,(=\sqrt{104}) \approx 10{,}2$ cm.	1 pont	
A hosszabb testátló hossza (egy $6 \times 8 \times 5$ cm élű téglatest testátlója:) $\sqrt{6^2+8^2+5^2}\,(=\sqrt{125}) \approx 11{,}2$ cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

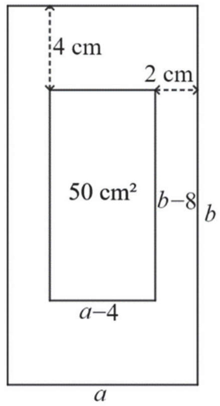
6. b) első megoldás		
A téglalap területe, amelyből a test hálója kivágható: $(15 \cdot 16 =)$ 240 cm^2.	1 pont	
A test hálójában a 3 téglalap együttes területe $(6 \cdot 15 =)$ 90 cm^2, a két trapéz területe együtt $(8 \cdot 7 =)$ 56 cm^2.	1 pont	
A test hálójának területe $(90 + 56 =)$ 146 cm^2,	1 pont	
ez a téglalap területének $(146 : 240 \approx)$ 60,8%-a,	1 pont	
tehát 39,2% hulladék keletkezik.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. b) második megoldás		
A téglalap területe, amelyből a test hálója kivágható: $(15 \cdot 16 =)$ 240 cm^2.	1 pont	
A hulladék összetevői: két 5 cm oldalú négyzet, melyek összterülete 50 cm^2; két 2×5 cm-es téglalap, melyek összterülete 20 cm^2; két derékszögű háromszög, melyek befogói 3 cm és 8 cm hosszúak, ezek összterülete 24 cm^2.	2 pont	
A hulladék területe összesen $(50 + 20 + 24 =)$ 94 cm^2,	1 pont	
tehát $(94 : 240 \approx)$ 39,2% hulladék keletkezik.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. c) első megoldás		
Az 50 cm^2-es téglalap oldalai x cm és $\frac{50}{x}$ cm hosszúak, és az x cm-es oldal legyen párhuzamos a kartonlap felső és alsó élével ($x > 0$).	1 pont	
A kartonlap területe $(x+4)\cdot\left(\frac{50}{x}+8\right)=82+8x+\frac{200}{x}$ cm^2.	2 pont	
A $T:\ \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R};\ T(x)=82+8x+\frac{200}{x}$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T'(x)=8-\frac{200}{x^2}=0$	1 pont*	
Innen $x = 5$ (mert $x > 0$).	1 pont*	
$T''(x)=\frac{400}{x^3}$, tehát $T''(5)>0$. A függvénynek ezért az 5 (lokális és egyben abszolút) minimumhelye.	1 pont*	*Ha $x < 5$, akkor $T' < 0$, ha $x > 5$, akkor $T' > 0$, ezért az 5 abszolút minimumhelye a T-nek.*
Mivel $\frac{50}{x}=\frac{50}{5}=10$, ezért a legkisebb területű kartonlap méretei $(5 + 2\cdot 2 =)$ 9 cm, illetve $(10 + 2\cdot 4 =)$ 18 cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A $82+8x+\frac{200}{x}$ összeg második és harmadik tagjára alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget: $82+8x+\frac{200}{x}\ge 82+2\cdot\sqrt{8x\cdot\frac{200}{x}}=82+80=162.$	2 pont	
Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $8x=\frac{200}{x}$,	1 pont	
amiből $x^2 = 25$, azaz $x = 5$ (mert $x > 0$).	1 pont	

6. c) **második megoldás**		
Ha a kartonlap oldalhosszai a cm, illetve b cm, akkor az 50 cm^2 területű téglalap oldalai $a - 4$ cm, illetve $b - 8$ cm ($a > 4$ és $b > 8$).	1 pont	
Ekkor $(a - 4)(b - 8) = 50$.	1 pont	
Ebből $b = \frac{50}{a-4} + 8$, a kartonlap területe pedig $ab = a\left(\frac{50}{a-4} + 8\right) = \frac{50a}{a-4} + 8a$.	1 pont	
A T: $]4; \infty[\to \mathbf{R}$; $T(a) = \frac{50a}{a-4} + 8a$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T'(a) = 8 - \frac{200}{(a-4)^2} = 0$	1 pont	
Innen $a = 9$ (mert $a > 4$).	1 pont	
$T''(a) = \frac{400}{(a-4)^3}$, tehát $T''(9) > 0$. A függvénynek ezért a 9 (lokális és egyben abszolút) minimumhelye.	1 pont	*Ha $a < 9$, akkor $T' < 0$, ha $a > 9$, akkor $T' > 0$, ezért a 9 abszolút minimumhelye a T-nek.*
Ha $a = 9$, akkor $b = 18$, tehát a legkisebb területű kartonlap oldalhosszai 9 cm, illetve 18 cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. a) **első megoldás**		
A 600 termékből 15 elemű (visszatevés nélküli) minta összesen $\binom{600}{15}$ $(\approx 3{,}014\cdot10^{29})$ -féleképpen választható ki (összes eset száma).	1 pont	
Az 594 nem hibás termékből $\binom{594}{15}$ $(\approx 2{,}588\cdot10^{29})$ -féleképpen választható ki 15 elemű minta (kedvező esetek száma).	1 pont	
Tehát a kérdezett valószínűség $\frac{\binom{594}{15}}{\binom{600}{15}}\approx 0{,}859$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. a) **második megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy a mintavétel első eleme nem hibás, $\frac{594}{600}$. Ezt követően annak a valószínűsége, hogy a mintavétel második eleme nem hibás, $\frac{593}{599}$. És így tovább mind a 15 elemre.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Tehát a keresett valószínűség: $\frac{594}{600}\cdot\frac{593}{599}\cdot...\cdot\frac{580}{586}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}859$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. b) **első megoldás**		
Hibás termék választásának valószínűsége 0,005, nem hibás termék választásának valószínűsége 0,995.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A komplementer esemény: 0 db vagy 1 db hibás termék van a 15 elemű mintában.) Annak a valószínűsége, hogy nincs hibás termék a mintában: $P(0)=0{,}995^{15}$ $(\approx 0{,}9276)$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy pontosan 1 hibás termék van a mintában: $P(1)=\binom{15}{1}\cdot0{,}005\cdot0{,}995^{14}$ $(\approx 0{,}0699)$,	2 pont	
tehát a kérdezett valószínűség $1-P(0)-P(1)=0{,}0025$.	1 pont	
Ez valóban kisebb 1%-nál.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

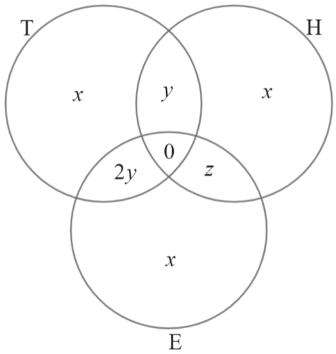
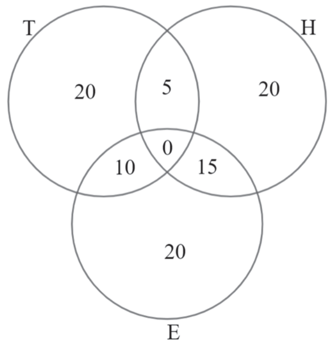
<table>
<tr><td colspan="3">7. b) második megoldás</td></tr>
<tr><td>Hibás termék választásának valószínűsége 0,005, nem hibás termék választásának valószínűsége 0,995.</td><td>1 pont</td><td>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</td></tr>
<tr><td>A kérdezett valószínűség: $\sum_{k=2}^{15}\binom{15}{k}\cdot 0,005^k\cdot 0,995^{15-k}$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Az összeg első tagja:
$P(2)=\binom{15}{2}\cdot 0,005^2\cdot 0,995^{13}$ (≈ 0,0025),</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>($P(3)\approx 5,36\cdot 10^{-5}$ kiszámítása és valószínűségi megfontolások alapján arra jutunk, hogy) a fenti 14 tagú összeg minden további tagja kisebb $5,4\cdot 10^{-5}$-nél, ezért az összeg kisebb
($0,0025 + 13\cdot 5,4\cdot 10^{-5}$ =) 0,003202-nál.</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A keresett valószínűség így valóban biztosan kisebb 1%-nál.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>6 pont</td><td></td></tr>
</table>

Megjegyzések:

1. A $\sum_{k=2}^{15}\binom{15}{k}\cdot 0,005^k\cdot 0,995^{15-k}$ *összeg első 5 tagja és a megfelelő tagok összege az alábbi táblázatban látható.*

i	$\binom{15}{i}\cdot 0,005^i\cdot 0,995^{15-i}$	$\sum_{k=2}^{i}\binom{15}{k}\cdot 0,005^k\cdot 0,995^{15-k}$
2	≈ 0,002459	≈ 0,002459
3	$\approx 5,36\cdot 10^{-5}$	≈ 0,002513
4	$\approx 8,07\cdot 10^{-7}$	≈ 0,002514
5	$\approx 8,93\cdot 10^{-9}$	≈ 0,002514
6	$\approx 7,48\cdot 10^{-11}$	≈ 0,002514

2. Ha a vizsgázó az a) feladatban rossz modellt használ (visszatevés nélküli helyett visszatevésest), akkor erre a részfeladatra nem jár pont.
Ha a vizsgázó a b) feladatban rossz modellt használ (visszatevéses helyett visszatevés nélkülit), akkor erre a részfeladatra legfeljebb 2 pontot kaphat.

<table>
<tr><td colspan="3">7. c)</td></tr>
<tr><td>Az adatokat halmazábrán szemléltetve:

</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A feladat szövege alapján:
(1) $x + 3y = 35$;
(2) $x + y + z = 40$;
(3) $x + 2y + z = 45$.</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A (3) egyenletből kivonva a (2) egyenletet kapjuk, hogy $y = 5$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe: $x = 20$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Végül a (2) egyenletből:
$20 + 5 + z = 40$, tehát $z = 15$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Tehát a selejtraktárban $3 \cdot 20 + 3 \cdot 5 + 15 = 90$ selejtes termék van.</td><td>1 pont</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>7 pont</td><td></td></tr>
</table>

8. a)		
$f(g(x)) = 2\sqrt{x} - 1$	1 pont	
$g(f(x)) = \sqrt{2x-1}$	1 pont	
Így megoldandó a $2\sqrt{x} - 1 = \sqrt{2x-1}$ egyenlet ($x \geq 1$). (Mindkét oldal pozitív az értelmezési tartomány miatt.) Négyzetre emelve: $4x - 4\sqrt{x} + 1 = 2x - 1$.	1 pont	
Rendezve és kettővel osztva: $x + 1 = 2\sqrt{x}$.	1 pont	$x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$
(Mindkét oldal pozitív.) Négyzetre emelve: $x^2 + 2x + 1 = 4x$, majd nullára rendezve: $x^2 - 2x + 1 = 0$.	1 pont	$(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$
Amiből $x = 1$ (amely eleme mindkét függvény értelmezési tartományának).	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy (az értelmezési tartományon) ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. b)		
$\int_a^b (2x-1)dx = \left[x^2 - x\right]_a^b =$	1 pont	
$= b^2 - b - a^2 + a =$	1 pont	
$= b^2 - a^2 - (b-a) = (b-a)(b+a) - (b-a) =$ $= (b - a)(b + a - 1)$ valóban.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. c)		
Felhasználjuk, hogy $\int_a^b (2x-1)dx = (b-a)(b+a-1) = 8$. Mivel $b > a$, ezért $b - a > 0$, tehát $(b + a - 1)$-nek is pozitívnak kell lennie.	1 pont	
Továbbá a és b egészek, tehát mindkét szorzótényező egész, így (a sorrendet is figyelembe véve) a 8 négyféleképpen bontható két tényező szorzatára: $8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 1 \cdot 8$.	1 pont	
Amiből: (lásd az alábbi táblázatot)	2 pont	
Mivel a és b egészek, így két megoldása van a feladatnak: $a = -3$, $b = 5$ vagy $a = 4$, $b = 5$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

$b - a$	$b + a - 1$	b	a
8	1	5	–3
4	2	3,5	–0,5
2	4	3,5	1,5
1	8	5	4

9. a)		
A medence tervrajzának x tengely feletti része egy olyan háromszög, amelynek a harmadik csúcsa az $y = x$ és az $y = -2x + 2$ egyenesek metszéspontja.	1 pont	
$x = -2x + 2$, amiből $x = \frac{2}{3}$ és $y = x = \frac{2}{3}$.	1 pont	
A háromszög alakú rész területe tehát $\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3} =\right)\frac{1}{3}$.	1 pont	
Az x tengely alatti rész területe: $-\int_0^1 (x^3 - x)dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$	1 pont	
$= \frac{1}{4}$.	1 pont	
A tervrajzon a medence területe $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\right)\frac{7}{12}$ (területegység).	1 pont	
Mivel a tervrajzon 1 egység a valóságban 12 m, ezért 1 területegység a valóságban $(12^2 =)$ 144 m^2.	1 pont	
A medence területe $\frac{7}{12}\cdot 144 = 84$ m^2 lesz.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

9. b)		
$f'(x) = -3x^2 + k$	1 pont	
Az érintőegyenesek meredeksége: $f'(1) = k - 3$, illetve $f'(2) = k - 12$.	1 pont	
Az érintési pontok $(1; k - 1)$, illetve $(2; 2k - 8)$,	1 pont	
az érintők egyenlete: $y = (k - 3)(x - 1) + k - 1$,	1 pont	$y = kx - 3x + 2$
illetve $y = (k - 12)(x - 2) + 2k - 8$.	1 pont	$y = kx - 12x + 16$
A metszéspont első koordinátájára fennáll: $kx - 3x + 2 = kx - 12x + 16$.	1 pont	
$x = \frac{14}{9}$	1 pont	
A metszéspont első koordinátája tehát (k értékétől függetlenül) $x = \frac{14}{9}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	