Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. október 17.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2023. október 17. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. **a)** Oldja meg az egyenletet, ha *x* és *y* **pozitív egész** számok!

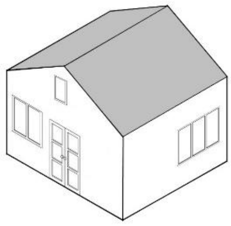
$$\frac{x}{8}=\frac{1,5}{y}$$

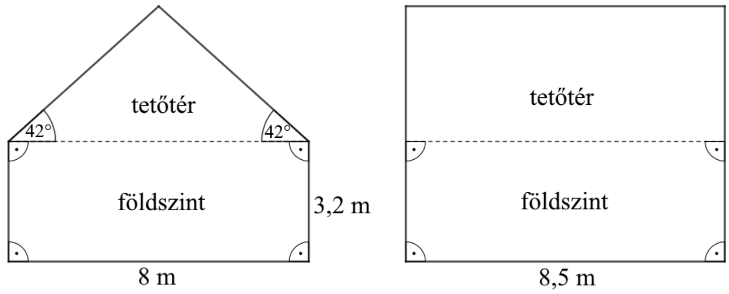
b) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$3\cdot 9^{x}-3^{x+3}=3^{x}-9$$

a)	4 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	11 pont	

2. Egy családi ház egy téglatest alakú földszinti részből és a rá illeszkedő, háromoldalú egyenes hasáb alakú tetőtérből áll. A ház néhány méretét elölnézetben és oldalnézetben mutatja az alábbi ábra. (A falvastagságtól mindenütt eltekintünk.)


illusztráció



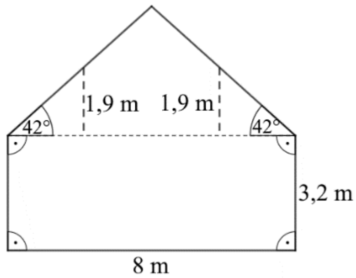
Az ábrán megadott méretek alapján számolva válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a) A teljes tetőfelületet cseréppel fedik. Mekkora ez a felület?
Válaszát m^2-ben, egészre kerekítve adja meg!

b) Hány köbméter a ház teljes térfogata (földszint és tetőtér összesen)?

A beépített tetőtér alapterületének csak az a része számít lakóterületnek, ahol a belmagasság legalább 1,9 méter.

c) Hány négyzetméter a ház teljes lakóterülete (a földszinti és tetőtérbeli lakóterület összesen)?



a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

3. Tomi edzője mindegyik focimeccs után az 1-10-es skálán értékeli (egy-egy egész számmal) a játékosok teljesítményét. Az idei első hét mérkőzésen Tomi a következő értékeléseket kapta: 6, 8, 6, 2, 8, 8, 6.

a) Számítsa ki az első hét értékelés átlagát és szórását!

Tomi következő három mérkőzése után kiderült, hogy az addigi tíz értékelésnek az átlaga 6,3, a terjedelme 8, és egyetlen módusza van.

b) Határozza meg, hogy hányas értékeléseket kapott Tomi ezen a három mérkőzésen!

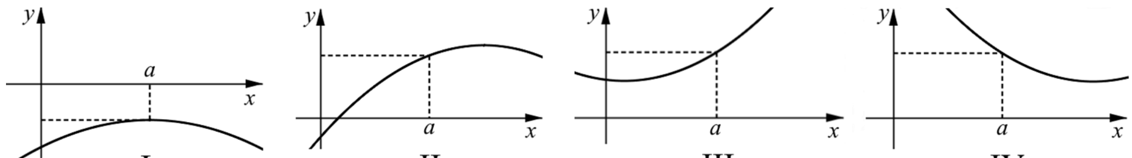
A 11. mérkőzésre kapott értékelés után Tomi átlaga a kapott értékelés tizedével csökkent az előző tíz mérkőzésének 6,3-es átlagához képest.

c) Hányas értékelést kapott Tomi a 11. mérkőzésen?

a)	3 pont	
b)	7 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Adott a valós számok halmazán értelmezett másodfokú f függvény. Ismert, hogy egy adott $a \in \mathbf{R}$ helyen $f(a) > 0$, $f'(a) > 0$ és $f''(a) > 0$ mindegyike teljesül.

a) Az alábbi ábrákon négy másodfokú függvény grafikonja látható. Ezek alapján töltse ki a táblázat üres mezőit aszerint, hogy a megfelelő kijelentés *igaz* vagy *hamis*, majd döntse el, hogy a négy grafikon közül melyik lehet az f függvényé!
(Válaszait itt nem kell indokolnia.)



I. II. III. IV.

függvény-grafikon	az a helyen a függvényérték pozitív	az a helyen az első derivált értéke pozitív	az a helyen a második derivált értéke pozitív
I.		*hamis*	
II.			
III.			
IV.			

Az f függvény grafikonja a(z) …… grafikon lehet.

b) A másodfokú g függvény értékét az $x \in \mathbf{R}$ helyen a $g(x) = px^2 + qx + r$ összefüggés adja meg (p, q, $r \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$). Határozza meg p, q és r értékét úgy, hogy $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ és $g''(1) = 4$ teljesüljön!

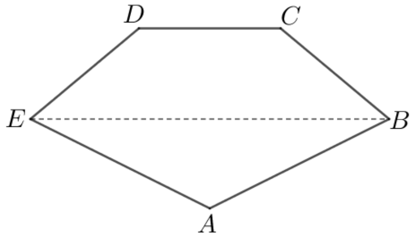
c) Számítsa ki $\int_{-3}^{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \right) dx$ értékét!

a)	6 pont	
b)	6 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	15 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

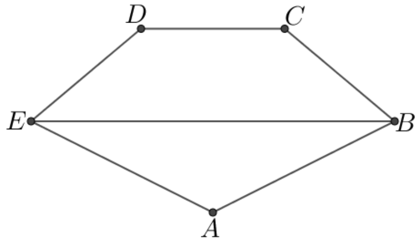
5. Az *ABCDE* konvex ötszögben $AB = AE = 20$ cm és $BC = CD = DE$. A *BCDE* négyszög egy húrtrapéz, amelynek a *B*-nél fekvő belső szöge 40°-os. Az *A* csúcs és az *EB* átló távolsága 10 cm.



a) Mekkorák az ötszög (belső) szögei?

b) Mekkora az ötszög területe?

c) Hányféleképpen járható be az ábrán látható *ABCDE* ötpontú gráf, ha mindegyik élén pontosan egyszer kell végighaladnunk?
(A bejárás kezdőpontja a gráf egyik csúcsa; egy csúcsba érkezve csak olyan élen haladhatunk tovább, amely szintén az adott csúcsból indul.)



a)	4 pont	
b)	8 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

6. Egy hatfős baráti társaság, Attila, Boróka, Csaba, Dóra, Emil és Fanni három csapatot alkot. Mindhárom csapat 2 tagú, és mind a hatan pontosan egy csapatnak lesznek a tagjai.

a) Igazolja, hogy 15 különböző lehetőség van a három csapat kialakítására! (Két lehetőség különböző, ha van olyan tag, akinek az egyik esetben más a csapattársa, mint a másikban.)

b) Ha véletlenszerűen (például sorsolással) hozzák létre a három csapatot, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom csapatba egy fiú és egy lány kerül?

Végül Attila Borókával, Csaba Dórával, Emil pedig Fannival került egy csapatba. A három csapat tagjai egyéni asztalitenisz-mérkőzéseket játszanak. Mindhárom csapat mindkét tagja egyszer játszik a másik két csapat mindkét tagjával. (Az egy csapatba tartozók nem játszanak egymás ellen.) Az egyes mérkőzéseket egymás után bonyolítják le. Az egyik mérkőzés után Attila megfigyelte, hogy a többi öt játékos mind különböző számú mérkőzést játszott eddig.

c) Hány mérkőzést játszott eddig Boróka?

a)	5 pont	
b)	4 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Egy bizonyos fenyőfa (méterben mért) várható magasságának becslésére az alábbi képletet használják:

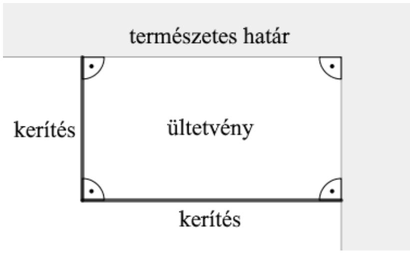
$h(t)=\dfrac{30}{1+59\cdot 0{,}905^{t}}$, ahol t a megfigyelés kezdetétől eltelt idő években számítva.

a) Hány méter magas volt a fa a megfigyelés kezdetekor?

b) A megfigyelés kezdetétől számítva hány év múlva lesz a fa 10 méter magas?

c) Számítsa ki az $\{a_n\}$ sorozat határértékét, ha $a_n=\dfrac{30}{1+59\cdot 0{,}905^{n}}$.

Különleges facsemeték neveléséhez egy téglalap alakú részt akarnak elkeríteni. A téglalap két szomszédos oldala természetes határokkal védhető, ezért csak a másik két oldalon kell kerítést építeni. A környezeti adottságok miatt a kerítés építési költsége a két oldalon különböző: az egyik oldalon 5 ezer Ft/m, a másik oldalon pedig 10 ezer Ft/m. A kerítés építésére összesen 400 ezer Ft áll rendelkezésre.

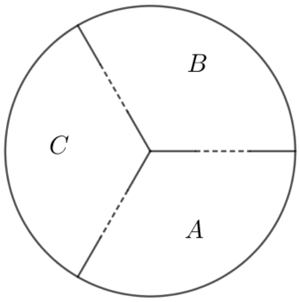


d) Hogyan kell megválasztani a két kerítésszakasz hosszát, hogy a rendelkezésre álló összegből a legnagyobb területű ültetvényt lehessen elkeríteni?

a)	2 pont	
b)	5 pont	
c)	3 pont	
d)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy számítógépes játékban egy kör alakú tartomány az ábra szerint három résztartományra van felosztva (A, B, C). Bármely két tartomány között egy átjáró van (az ábrán szaggatott vonallal jelölve).
A tartományok közötti átjárók mindegyike a többitől függetlenül p valószínűséggel van nyitva ($0 < p < 1$). Egyik tartományból a másikba csak nyitott átjárón (vagy átjárókon) keresztül lehet eljutni.



Legyen az E_0 esemény az, hogy az A tartományból nem lehet másik tartományba eljutni.

a) Mutassa meg, hogy az E_0 esemény valószínűsége $1-2p+p^2$.

b) Hogyan kell megválasztani a p értékét úgy, hogy az E_0 esemény valószínűsége legfeljebb 0,01 legyen?

Legyen az E_1 esemény az, hogy az A tartományból pontosan egy másik tartományba lehet eljutni, az E_2 esemény pedig az, hogy az A tartományból mindkét másik tartományba el lehet jutni (nem feltétlenül közvetlenül).

c) Igazolja, hogy az E_1 esemény valószínűsége $2p-4p^2+2p^3$, az E_2 esemény valószínűsége pedig $3p^2-2p^3$.

d) Határozza meg a p valószínűség értékét úgy, hogy az E_1 esemény valószínűsége a lehető legnagyobb legyen, majd számítsa ki ekkor az E_1 esemény valószínűségét!

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
d)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

9. A 2, 4, 6, 8, 10 számok felhasználásával az összes lehetséges módon képezzük azokat a kéttényezős szorzatokat, amelyekben az első tényező kisebb, mint a második. Az így kapott szorzatokat összeadjuk.

a) Számítsa ki ezt az összeget!

Legyen k tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész szám. Jelölje S_k azt az összeget, amelyet a következő eljárással kapunk: az 1, 2, 3, … , k számok (az első k db pozitív egész szám) felhasználásával az összes lehetséges módon képezzük azokat a kéttényezős szorzatokat, amelyekben az első tényező kisebb, mint a második, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

b) Igazolja, hogy $S_{k+1} = S_k + \dfrac{k(k+1)^2}{2}$.

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy tetszőleges 1-nél nagyobb n egész szám esetén $S_n = \dfrac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$.

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	11		**51**	
	2.	12			
	3.	13			
	4.	15			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző