ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. október 17.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

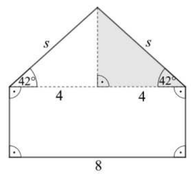
1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
$xy = 12$	1 pont	$y = \frac{12}{x}$
(Mivel x és y pozitív egészek, ezért a következő $(x; y)$ megoldások vannak:) (1; 12), (12; 1), (2; 6), (6; 2), (3; 4), (4; 3).	3 pont	*4 vagy 5 jó megoldás esetén 2 pont, 3 jó megoldás esetén 1 pont jár. Hibás számpár(ok) megadásáért 1 pontot veszítsen a vizsgázó.*
Összesen:	**4 pont**	

1. b)		
$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$	2 pont	
Az $a = 3^x$ új ismeretlen bevezetésével: $3a^2 - 28a + 9 = 0$ $(a > 0)$.	1 pont	
$a = 9$ vagy $a = \frac{1}{3}$	1 pont	
Az első esetben $x = 2$,	1 pont	
a második esetben $x = -1$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. a)		
A tető egyik téglalap alakú felének szélessége s. $\cos 42° = \frac{4}{s}$	1 pont	
$s \left(= \frac{4}{\cos 42°}\right) \approx 5{,}4$ m	1 pont	
A két téglalap alakú tetőfelület területe együtt: $A = 2 \cdot 5{,}4 \cdot 8{,}5 \approx$	1 pont	
≈ 92 m^2.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**4 pont**	

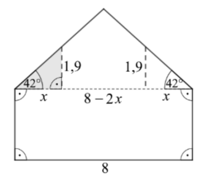
9. c) második megoldás		
(n adott pozitív egész és $n \geq 2$.) $(1+2+3+...+n)^2 =$ $= (1^2+2^2+...+n^2) + 2\cdot(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + ... + (n-1)\cdot n)$.	1 pont	
Ebből $2\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3+...+(n-1)\cdot n) =$ $= (1+2+...+n)^2 - (1^2+2^2+...+n^2)$.	1 pont	
Mivel $(1+2+...+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	1 pont	
és $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,	1 pont	
ezért $2\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3+...+(n-1)\cdot n) =$ $= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$	1 pont	
$= n(n+1)\left(\frac{n(n+1)}{4} - \frac{2n+1}{6}\right) = n(n+1)\cdot\frac{3n^2-n-2}{12}$.	1 pont	
$3n^2-n-2 = (3n+2)(n-1)$, ezért $2\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3+...+(n-1)\cdot n) = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{12}$.	1 pont	
2-vel való osztás után a bizonyítandó állítást kapjuk.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

9. a)		
(Összesen $\binom{5}{2} = 10$ db kéttényezős szorzat van.) $2\cdot4$, $2\cdot6$, $2\cdot8$, $2\cdot10$, $4\cdot6$, $4\cdot8$, $4\cdot10$, $6\cdot8$, $6\cdot10$, $8\cdot10$.	3 pont	
Ezek összege (8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 32 + 40 + + 48 + 60 + 80 =) 340.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b)		
$S_{k+1} = S_k + 1\cdot(k+1) + 2\cdot(k+1) + ... + k\cdot(k+1)$	2 pont	
$S_{k+1} = S_k + (1+2+...+k)\cdot(k+1) =$	1 pont	
$= S_k + \frac{k(k+1)}{2}\cdot(k+1) = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c) első megoldás		
Bizonyítás teljes indukcióval: $n = 2$ esetén $S_2 = 1\cdot2 = 2 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot8}{24} = \frac{48}{24}$ igaz.	1 pont	
Elegendő belátni, hogy ha valamely k esetén igaz az állítás ($k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$), akkor igaz $k+1$-re is, vagyis $S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{24}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A b) feladat szerint $S_{k+1} = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2} =$ $= \frac{(k-1)k(k+1)(3k+2)}{24} + \frac{k(k+1)^2}{2}$.	1 pont	
$k(k+1)$-et kiemelve: $S_{k+1} = k(k+1)\cdot\frac{(k-1)(3k+2)+12(k+1)}{24} =$	1 pont	
$= k(k+1)\cdot\frac{3k^2+11k+10}{24}$.	1 pont	
Mivel $3k^2+11k+10 = (k+2)(3k+5)$,	2 pont	
ezért $S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{24}$, ami azt jelenti, hogy igaz az eredeti állítás.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

2. b)		
A téglatest alakú földszint térfogata: $V_f = 8\cdot8{,}5\cdot3{,}2 \approx 218$ m^3.	1 pont	
A tetőtér magassága: $m = 4\cdot\mathrm{tg}\,42° \approx 3{,}6$ m.	1 pont	$m = \sqrt{5{,}4^2 - 4^2} =$ $= \sqrt{13{,}16} \approx 3{,}6$ m
A háromszög alapú egyenes hasáb alakú tetőtér térfogata: $V_t = \frac{8\cdot3{,}6}{2}\cdot8{,}5 \approx 122$ m^3.	1 pont	
A ház teljes térfogata: $V = V_f + V_t = 218 + 122 = 340$ m^3.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. c)		
Az ábrán a lakóterületen kívül eső rész szélessége x. $\mathrm{tg}42° = \frac{1{,}9}{x}$, amelyből $x \approx 2{,}1$ m.	1 pont	
A tetőtérben a lakóterület $8 - 2\cdot2{,}1 = 3{,}8$ m széles, így itt a lakóterület $3{,}8\cdot8{,}5 \approx 32$ m^2.	1 pont	*A tetőtérben az* 1,9 m-*nél alacsonyabb belmagasság alatti alapterület* $2\cdot2{,}1\cdot8{,}5 \approx 36$ m^2.
A földszint alapterülete $8\cdot8{,}5 = 68$ m^2.	1 pont	*A földszint és a tetőtér teljes alapterülete* $2\cdot8\cdot8{,}5 = 136$ m^2.
A ház teljes lakóterülete 68 + 32 = 100 m^2.	1 pont	$136 - 36 = 100$ m^2
Összesen:	**4 pont**	

3. a)		
Az átlag $\left(\frac{2+3\cdot6+3\cdot8}{7} = \frac{44}{7}\right) \approx 6{,}29$.	1 pont	
A szórás: $\sqrt{\frac{(-4{,}29)^2 + 3\cdot(-0{,}29)^2 + 3\cdot1{,}71^2}{7}} \approx$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a szórást számológéppel helyesen számolja ki.*
$\approx 1{,}98$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. b) első megoldás		
Az átlag miatt a tíz értékelés összege 63, tehát az első hét értékelés után kapott további három értékelés összege (63 – 44 =) 19.	1 pont	
A terjedelem (és az 1-10-es skála) miatt Tominak vagy van 1-es és 9-es értékelése is (de nincs 10-ese), vagy van 10-ese (de nincs 1-ese).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
I. eset: Ha a tíz szám között 1-es és 9-es értékelés is van, akkor a hiányzó tizedik értékelés (19 – 1 – 9 =) 9. Ez azonban nem lehet, mert ekkor két módusz lenne (a 6 és a 8).	1 pont	
II. eset: Ha van 10-es értékelés (de nincs 1-es), akkor a még hiányzó két szám összege (19 – 10 =) 9.	1 pont	
Ez a két szám nem lehet 2 és 7 vagy 4 és 5, mert akkor két módusz lenne (a 6 és a 8).	1 pont	
Ha a még hiányzó két szám 3 és 6, akkor minden feltétel teljesül (a 6 az egyetlen módusz).	1 pont	
Tehát az utolsó három értékelés (valamilyen sorrendben) 3, 6 és 10 volt.	1 pont	*A tíz értékelés növekvő sorrendben:* 2, 3, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10.
Összesen:	**7 pont**	

3. b) második megoldás		
Az átlag miatt a tíz értékelés összege 63, tehát az első hét értékelés után kapott további három értékelés összege (63 – 44 =) 19.	1 pont	
A tíz értékelés egyetlen módusza csak a 2, a 6, vagy a 8 lehet, de a 19-es összeg miatt a hiányzó három értékelés mindegyike nem lehet 2.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
I. eset (ha 8 a módusz): A lehetőségek: $19 = 8 + 1 + 10 = 8 + 2 + 9 = 8 + 3 + 8 = 8 + 4 + 7$.	1 pont	
Ezek egyike sem felel meg a terjedelemre vonatkozó feltételnek (rendre 9, 7, 6, 6 lenne a terjedelem).	1 pont	
II. eset (ha 6 a módusz): A lehetőségek: $19 = 6 + 3 + 10 = 6 + 4 + 9 = 6 + 6 + 7$.	1 pont	
A terjedelem miatt (ami rendre 8, 7, 6 lenne) a három lehetőség közül az első az egyetlen megfelelő.	1 pont	
Tehát az utolsó három értékelés (valamilyen sorrendben) 3, 6 és 10 volt.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. c)		
Az E_1 esemény pontosan akkor következik be, ha az *A* tartomány két átjárója közül az egyik nyitva van, a másik pedig nincs nyitva, és a *B* és *C* közötti átjáró sincs nyitva.	1 pont	
Ennek valószínűsége $\binom{2}{1} p(1-p)\cdot(1-p) =$	1 pont	
$= 2p - 4p^2 + 2p^3$ valóban.	1 pont	
Az E_2 esemény pontosan akkor következik be, ha legalább két (tehát 3 vagy 2) átjáró nyitva van. Ennek valószínűsége $p^3 + \binom{3}{2} p^2(1-p) =$	1 pont*	
$= p^3 + 3p^2 - 3p^3 = 3p^2 - 2p^3$ valóban.	1 pont*	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok az alábbi gondolatmenetért is járnak.*

(E_0, E_1 és E_2 teljes eseményrendszert alkot, ezért) $P(E_2) = 1 - P(E_0) - P(E_1) =$	1 pont	
$= 1 - (1 - 2p + p^2) - (2p - 4p^2 + 2p^3) = 3p^2 - 2p^3$ valóban.	1 pont	

8. d)		
(Az $f :]0;\ 1[\to \mathbf{R};\ f(p) = 2p - 4p^2 + 2p^3$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja nulla.) $f'(p) = 2 - 8p + 6p^2 = 0$	1 pont	
$p = 1$ vagy $p = \frac{1}{3}$	1 pont	
$p = 1$ nem megoldás ($p < 1$ miatt).	1 pont	
$p = \frac{1}{3}$ esetén $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -8 + 4 = -4 < 0$, tehát ez maximumhelye a függvénynek. (A $]0;\ 1[$ intervallumon ez abszolút maximuma a függvénynek.)	1 pont	*$p = \frac{1}{3}$ helyen a függvény növekvőből csökkenőbe vált, tehát ez maximumhelye a függvénynek.*
Ekkor a kérdezett valószínűség $\left(2\cdot\frac{1}{3} - 4\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{27} =\right) \frac{8}{27}$ (≈ 0,296).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

A 400 ezer Ft-ból elkeríthető legnagyobb területű ültetvény 5 ezer Ft/m költségű oldala 40 m, a 10 ezer Ft/m költségű oldala 20 m hosszú. (Az ültetvény területe ekkor 800 m^2.)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetekért is megkaphatja a vizsgázó.*

$f:]0;80[\to \mathbf{R};\ f(x) = 40x - 0{,}5x^2$ A szélsőérték szükséges feltétele $f'(x) = 40 - x = 0$.	1 pont	
Ebből $x = 40$, és itt pozitívból negatívba vált a deriváltfüggvény, tehát ez f-nek (abszolút) maximumhelye.	1 pont	

vagy

$xy = x(40 - 0{,}5x) = 0{,}5 \cdot x(80 - x)$. Az $x(80 - x)$ szorzat tényezőire a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva: $x(80-x) \le \left(\frac{x+80-x}{2}\right)^2 = 1600$.	1 pont	
Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = 80 - x$, azaz $x = 40$. Ez tehát az f maximumhelye.	1 pont	

8. a)		
Az E_0 esemény pontosan akkor következik be, ha az A tartomány egyik átjárója sincs nyitva.	1 pont	
Ennek a valószínűsége $(1-p)^2$.	1 pont	
$(1-p)^2 = 1 - 2p + p^2$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b)		
$1 - 2p + p^2 = (1-p)^2$, tehát $(1-p)^2 \le 0{,}01$.	1 pont	$1 - 2p + p^2 \le 0{,}01$ $p^2 - 2p + 0{,}99 \le 0$
$p < 1$ miatt $0 < 1 - p \le \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$.	1 pont	$p^2 - 2p + 0{,}99 = 0$ *valós gyökei* 0,9 *és* 1,1.
Tehát $0{,}9 \le p\ (<1)$ esetén lesz legfeljebb 0,01 az E_0 esemény valószínűsége.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. c)		
A 11. mérkőzés értékelését jelölje x. Ekkor $\frac{63+x}{11} = 6{,}3 - \frac{x}{10}$.	1 pont	
$630 + 10x = 693 - 11x$	1 pont	
$x = 3$ (A 11. mérkőzés értékelése 3.)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a lehetséges tíz eset mindegyikét megvizsgálja, és ennek alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

4. a)

függvény-grafikon	az a helyen a függvényérték pozitív	az a helyen az első derivált értéke pozitív	az a helyen a második derivált értéke pozitív
I.	*hamis*	*hamis*	*hamis*
II.	*igaz*	*igaz*	*hamis*
III.	*igaz*	*igaz*	*igaz*
IV.	*igaz*	*hamis*	*igaz*

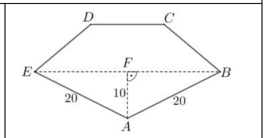
(táblázat fent)	5 pont*	
Az f függvény grafikonja a III. grafikon lehet.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

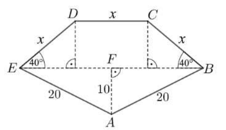
Megjegyzések:
*1. A *-gal jelölt 5 pontból az első oszlop hibátlan kitöltéséért 1 pontot, a második és a harmadik oszlop hibátlan kitöltéséért 2-2 pontot kapjon a vizsgázó.*
2. Minden hibásan kitöltött mező 1 ponttal csökkenti a mező oszlopának kitöltésére adható pontszámot, de az egy oszlop kitöltéséért járó pontszám nem lehet 0-nál kevesebb.

4. b)		
$g'(x) = 2px + q$	1 pont	
$g''(x) = 2p$	1 pont	
A megadott feltételek miatt: $p + q + r = 1$, $2p + q = 2$ és $2p = 4$.	2 pont	
Innen $p = 2$, $q = -2$ és $r = 1$ (így $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$, ami valamennyi feltételnek megfelel).	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. c)		
$\int_{-3}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + x\right]_{-3}^{2} =$	1 pont	
$= \left(\frac{4}{3} - 4 + 2\right) - \left(-\frac{9}{2} - 9 - 3\right) = -\frac{2}{3} - (-16{,}5) = \frac{95}{6}$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II.

5. a)		
Merőlegest állítunk az A csúcsból az EB átlóra, ez az átlót az F (felező)pontban metszi. Ekkor $AF = 10$ cm.	1 pont	
(Az $AFB\Delta$ egy szabályos háromszög fele, ezért) az ötszög A csúcsnál fekvő szögének fele 60°-os.	1 pont	$\cos BAF\sphericalangle = 0{,}5$, *ezért* $BAF\sphericalangle = 60°$.
Így $BAE\sphericalangle = 120°$ és $ABE\sphericalangle = AEB\sphericalangle = 30°$.	1 pont	
(Mivel a húrtrapéz szögei 40°, 40°, 140°, 140°, ezért) az ötszög szögei: 120°, 70°, 140°, 140°, 70°.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b)		
$EB = 2BF = 2\sqrt{20^2-10^2} = 20\sqrt{3} \approx 34{,}64$ cm	1 pont*	*Az ABE háromszög területe egyenlő egy* 20 cm *oldalú szabályos háromszög területével:*
Az ABE háromszög területe: $\frac{EB\cdot FA}{2} = \frac{20\sqrt{3}\cdot 10}{2} = 100\sqrt{3} \approx 173{,}2$ cm².	1 pont*	$\frac{20^2\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}$
 Ha a trapéz CD oldalának hossza (cm-ben) x, akkor $EB = x + 2x\cos 40°$.	1 pont	
Tehát $34{,}64 = x + 2x\cos 40° = x(1 + 2\cos 40°)$,	1 pont	
ebből $x \approx 13{,}68$ cm.	1 pont	
A trapéz magassága $x\sin 40° \approx 8{,}79$ cm,	1 pont	
területe $\left(\frac{34{,}64+13{,}68}{2}\cdot 8{,}79\right) \approx 212{,}4$ cm².	1 pont	
Az ötszög területe (173,2 + 212,4 =) 385,6 cm².	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

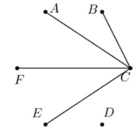
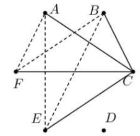
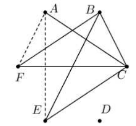
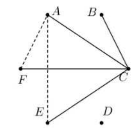
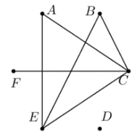
*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha az a) rész eredményét felhasználva számolja ki a vizsgázó a szakaszok hosszát, illetve a háromszög területét.*

7. a)		
$h(0) = \frac{30}{1+59\cdot 0{,}905^0} =$	1 pont	
= 0,5 m magas volt a fenyőfa.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

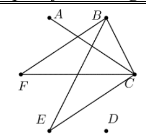
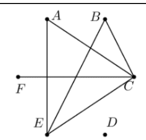
7. b)		
$10 = \frac{30}{1+59\cdot 0{,}905^t}$	1 pont	
$590\cdot 0{,}905^t = 20$ $0{,}905^t = \frac{2}{59}$	1 pont	$0{,}905^t \approx 0{,}034$
$t = \log_{0{,}905}\frac{2}{59}$	1 pont	$t \approx \frac{\lg 0{,}034}{\lg 0{,}905}$
$t \approx 33{,}9$	1 pont	
A megfigyelés kezdetétől számítva körülbelül 34 év múlva lesz a fa magassága 10 m.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. c)		
A $\{0{,}905^n\}$ sorozat konvergens, és határértéke 0.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezért az $\{a_n\}$ sorozat is konvergens, és $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \frac{30}{1+59\cdot 0} = \frac{30}{1} = 30$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

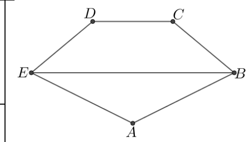
7. d)		
Az 5 ezer Ft/m költségű kerítésszakasz legyen x m hosszú, a 10 ezer Ft/m költségű szakasz pedig y m hosszú ($x > 0$, $y > 0$). A teljes építési költség ekkor $5x + 10y = 400$ (ezer Ft). Innen $y = 40 - 0{,}5x$.	1 pont	$x = 80 - 2y$
A téglalap alakú ültetvény területe (m²-ben): $xy = x(40-0{,}5x) = 40x - 0{,}5x^2$.	1 pont	$xy = (80-2y)\,y =$ $= 80y - 2y^2$
$40x - 0{,}5x^2 = -0{,}5(x-40)^2 + 800$	1 pont*	$80y - 2y^2 =$ $= -2(y-20)^2 + 800$
Ennek $x = 40$ esetén van maximuma,	1 pont*	*Ennek* $y = 20$ *esetén van maximuma,*
ekkor $y = 20$.	1 pont	*ekkor* $x = 40$.

Feltehetjük, hogy C játszott 4 mérkőzést. Ekkor csak C csapattársa (D) mérkőzéseinek száma lehet 0.	1 pont	
A B-E, B-F, A-E, A-F mérkőzések közül azokat kell kiválasztani, amelyekkel teljesül az a feltétel, hogy B, E, F mérkőzéseinek száma valamilyen sorrendben 1, 2, 3.	1 pont*	
Ha B-nek 3 mérkőzése lenne, akkor nem lenne olyan játékos, akinek 1 mérkőzése van,	1 pont*	
s ha B-nek 1 mérkőzése lenne, akkor nem lenne olyan játékos, akinek 3 mérkőzése van.	1 pont*	
Ezek alapján Boróka csak 2 mérkőzést játszhatott (és ez lehetséges is).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

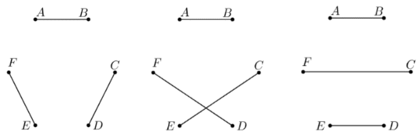
*Megjegyzés: A *-gal jelzett pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

B, E, F közül B nem játszhatott 3 mérkőzést, hiszen ekkor E és F is legalább 2 mérkőzésen túl lenne (B-vel és C-vel), így nem lenne olyan, aki 1 mérkőzést játszott.	1 pont	
Tehát E és F közül valamelyikük 3 mérkőzést játszott. Feltehetjük, hogy ez E volt (a mérkőzéseket A-val, B-vel és C-vel kellett játszania).	1 pont	
Ekkor csak F lehet az, aki 1 mérkőzést játszott (C-vel), mert B, C, E-nek legalább 2 mérkőzése van.	1 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyetlen, a szövegnek megfelelő ábra alapján helyes választ ad, de nem indokolja, hogy más megoldása nincs a feladatnak, akkor ezért 2 pontot kapjon.

5. c)		
A másodfokú A, C vagy D csúcsból indulva a bejárás feltételei nem teljesíthetők (ha a másodfokú csúcs a kiindulási pont, akkor ez az érkezési pont is egyben, ami csak 3, 4 vagy 5 él bejárását teszi lehetővé).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha (például) a B pontból indulunk, akkor 3 lehetőségünk van az E pontba érkezni, onnan pedig mindegyik esetben 2 lehetőségünk van visszaérkezni B-n keresztül az E-be.	1 pont	
A B-ből indulva tehát $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség van a gráf éleinek bejárására.	1 pont	*BCDEBAE, BCDEABE, BAEBCDE, BAEDCBE, BEDCBAE, BEABCDE*
Az E-ből indulva ugyanennyi, összesen tehát 12 bejárási lehetőség van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. a) első megoldás		
Az első csapat tagjait $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
A második csapat tagjait a maradék négy főből $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen lehet kiválasztani, és a megmaradt 2 fő alkotja a harmadik csapatot.	1 pont	
Ez összesen $15 \cdot 6 = 90$ lehetőség.	1 pont	
A 90 lehetőségben minden csapathármas annyiszor szerepel, ahányféleképpen a három csapat sorba rendezhető (mert ezek sorrendje nem számít),	1 pont	
ezért $\frac{90}{3!} = 15$ lehetőség van valóban a három csapat kialakítására.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. a) második megoldás		
(A neveket a kezdőbetűikkel helyettesítjük.) Ha *A* csapattársa pl. *B*, akkor *C*, *D*, *E*, *F* közül háromféleképpen lehet 2 darab kétfős csapatot szervezni (*CD* és *EF*, *CE* és *DF*, vagy *CF* és *DE*). 	2 pont	
Mivel *A* bármely csapattársa esetén 3-féleképpen szervezhető további 2 darab kétfős csapat, és *A* csapattársa 5-féle lehet,	2 pont	
ezért $5 \cdot 3 = 15$ lehetőség van valóban a három csapat kialakítására.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. a) harmadik megoldás		
A társaság hat tagját sorba rendezzük. Alkosson egy-egy csapatot az 1. és a 2., majd a 3. és a 4., végül az 5. és a 6. tag.	1 pont	
6! (= 720) sorba rendezés lehetséges.	1 pont	
A három csapaton belül a sorrend nem számít, azaz így minden esetet $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$-szor számoltunk.	1 pont	
Továbbá a három csapat különböző sorrendjei sem adnak új elosztást. Ez 3! (= 6) lehetőség.	1 pont	
Ezért $\frac{6!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!} = 15$ lehetőség van valóban a három csapat kialakítására.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges esetet rendezetten felsorolja, akkor teljes pontszámot kapjon.

6. b) első megoldás		
Válasszuk meg először például Attila párját. Annak a valószínűsége, hogy a párja lány lesz $\frac{3}{5}$.	1 pont	
Ezután például Csaba párja $\frac{2}{3}$ valószínűséggel lesz lány; Emil párja ekkor már biztosan lány lesz.	1 pont	
Tehát $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5}$ a valószínűsége, hogy minden csapatba egy fiú és egy lány kerül.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. b) második megoldás		
Ha mindhárom csapat egyik tagja fiú, akkor mindegyik fiúhoz egy lányt kell választani.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen lehet megtenni, tehát 6 kedvező csapatalkotási lehetőség van.	2 pont	*A hat lehetőség (a neveket a kezdőbetűikkel jelölve):* AB, CD, EF; AB, CF, ED; AD, CB, EF; AD, CF, EB; AF, CB, ED; AF, CD, EB.
(Mivel az összes csapatalkotási lehetőség száma 15, ezért) a kérdezett valószínűség $\frac{6}{15} = 0{,}4$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. b) harmadik megoldás		
Ha véletlenszerűen alkotnak kétfős csapatokat, akkor azok (és csak azok) az esetek lesznek kedvezőtlenek, amelyekben egy kétfős lánycsapat, egy kétfős fiúcsapat és egy kétfős vegyes csapat van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 3 lány közül 3-féleképpen lehet kétfős lánycsapatot alkotni, minden választáshoz a 3 fiú közül 3-féleképpen lehet kétfős fiúcsapatot alkotni. (A harmadik csapatot a választásoknál kimaradt lány és fiú alkotja.)	1 pont	*A vegyes csapatba 3 lány és 3 fiú közül választhatunk egy-egy tagot. (Ekkor a másik két csapatot egyféleképpen választhatjuk kedvezőtlennek.)*
A kedvezőtlen esetek száma tehát $3 \cdot 3 = 9$.	1 pont	*Ez* $3 \cdot 3 = 9$*-féleképpen lehetséges.*
(Mivel az összes csapatalkotási lehetőség száma 15, ezért) a kérdezett valószínűség $1 - \frac{9}{15} = \frac{2}{5}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. c)		
(A neveket a kezdőbetűikkel helyettesítjük.) Mivel a csapattársa ellen senki sem játszhatott, ezért *B*, *C*, *D*, *E* és *F* csak 0, 1, 2, 3 vagy 4 mérkőzést játszhatott, emiatt mindegyik eset pontosan egyszer elő is fordult.	1 pont	
B nem játszhatott 4 mérkőzést, mert akkor nem lenne 0 a *C*, *D*, *E* és *F* mérkőzéseinek száma között.	1 pont