ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. október 17.

# MATEMATIKA

# EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

**minden vizsgázó számára**

# JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**OKTATÁSI HIVATAL**

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a $\pi$ és az $e$ szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

# I.

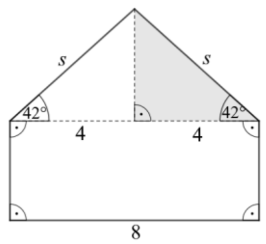
## 1. a)

| | | |
|---|---|---|
| $xy = 12$ | 1 pont | $y = \frac{12}{x}$ |
| (Mivel $x$ és $y$ pozitív egészek, ezért a következő $(x; y)$ megoldások vannak:)<br>(1; 12), (12; 1),<br>(2; 6), (6; 2),<br>(3; 4), (4; 3). | 3 pont | *4 vagy 5 jó megoldás esetén 2 pont, 3 jó megoldás esetén 1 pont jár.<br>Hibás számpár(ok) megadásáért 1 pontot veszítsen a vizsgázó.* |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

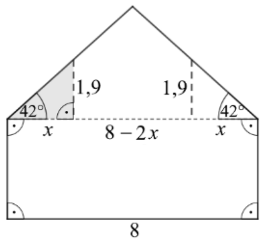
## 1. b)

| | | |
|---|---|---|
| $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$ | 2 pont | |
| Az $a = 3^x$ új ismeretlen bevezetésével:<br>$3a^2 - 28a + 9 = 0$ $(a > 0)$. | 1 pont | |
| $a = 9$ vagy $a = \frac{1}{3}$ | 1 pont | |
| Az első esetben $x = 2$, | 1 pont | |
| a második esetben $x = -1$. | 1 pont | |
| Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

## 2. a)

| | | |
|---|---|---|
| A tető egyik téglalap alakú felének szélessége $s$.<br>$\cos 42° = \frac{4}{s}$ | 1 pont |  |
| $s \left(= \frac{4}{\cos 42°}\right) \approx 5{,}4$ m | 1 pont | |
| A két téglalap alakú tetőfelület területe együtt:<br>$A = 2 \cdot 5{,}4 \cdot 8{,}5 \approx$ | 1 pont | |
| $\approx 92$ m$^2$. | 1 pont | *Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.* |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **2. b)** | | |
|---|---|---|
| A téglatest alakú földszint térfogata: $V_f = 8 \cdot 8{,}5 \cdot 3{,}2 \approx 218\ \text{m}^3$. | 1 pont | |
| A tetőtér magassága: $m = 4 \cdot \text{tg}\, 42° \approx 3{,}6$ m. | 1 pont | $m = \sqrt{5{,}4^2 - 4^2} = \\ = \sqrt{13{,}16} \approx 3{,}6$ m |
| A háromszög alapú egyenes hasáb alakú tetőtér térfogata: $V_t = \frac{8 \cdot 3{,}6}{2} \cdot 8{,}5 \approx 122\ \text{m}^3$. | 1 pont | |
| A ház teljes térfogata: $V = V_f + V_t = 218 + 122 = 340\ \text{m}^3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **2. c)** | | |
|---|---|---|
| Az ábrán a lakóterületen kívül eső rész szélessége $x$. $\text{tg} 42° = \frac{1{,}9}{x}$, amelyből $x \approx 2{,}1$ m. | 1 pont |  |
| A tetőtérben a lakóterület $8 - 2 \cdot 2{,}1 = 3{,}8$ m széles, így itt a lakóterület $3{,}8 \cdot 8{,}5 \approx 32\ \text{m}^2$. | 1 pont | *A tetőtérben az* 1,9 m-*nél alacsonyabb belmagasság alatti alapterület* $2 \cdot 2{,}1 \cdot 8{,}5 \approx 36\ \text{m}^2$. |
| A földszint alapterülete $8 \cdot 8{,}5 = 68\ \text{m}^2$. | 1 pont | *A földszint és a tetőtér teljes alapterülete* $2 \cdot 8 \cdot 8{,}5 = 136\ \text{m}^2$. |
| A ház teljes lakóterülete $68 + 32 = 100\ \text{m}^2$. | 1 pont | $136 - 36 = 100\ \text{m}^2$ |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **3. a)** | | |
|---|---|---|
| Az átlag $\left(\frac{2 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 8}{7} = \frac{44}{7}\right) \approx 6{,}29$. | 1 pont | |
| A szórás: $\sqrt{\frac{(-4{,}29)^2 + 3 \cdot (-0{,}29)^2 + 3 \cdot 1{,}71^2}{7}} \approx$ | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a szórást számológéppel helyesen számolja ki.* |
| $\approx 1{,}98$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **3. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az átlag miatt a tíz értékelés összege 63,<br>tehát az első hét értékelés után kapott további három értékelés összege (63 – 44 =) 19. | 1 pont | |
| A terjedelem (és az 1-10-es skála) miatt Tominak vagy van 1-es és 9-es értékelése is (de nincs 10-ese), vagy van 10-ese (de nincs 1-ese). | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| I. eset:<br>Ha a tíz szám között 1-es és 9-es értékelés is van, akkor a hiányzó tizedik értékelés (19 – 1 – 9 =) 9.<br>Ez azonban nem lehet, mert ekkor két módusz lenne (a 6 és a 8). | 1 pont | |
| II. eset:<br>Ha van 10-es értékelés (de nincs 1-es), akkor a még hiányzó két szám összege (19 – 10 =) 9. | 1 pont | |
| Ez a két szám nem lehet 2 és 7 vagy 4 és 5,<br>mert akkor két módusz lenne (a 6 és a 8). | 1 pont | |
| Ha a még hiányzó két szám 3 és 6, akkor minden feltétel teljesül (a 6 az egyetlen módusz). | 1 pont | |
| Tehát az utolsó három értékelés (valamilyen sorrendben) 3, 6 és 10 volt. | 1 pont | *A tíz értékelés növekvő sorrendben:*<br>2, 3, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10. |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **3. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az átlag miatt a tíz értékelés összege 63,<br>tehát az első hét értékelés után kapott további három értékelés összege (63 – 44 =) 19. | 1 pont | |
| A tíz értékelés egyetlen módusza csak a 2, a 6, vagy a 8 lehet, de a 19-es összeg miatt a hiányzó három értékelés mindegyike nem lehet 2. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| I. eset (ha 8 a módusz):<br>A lehetőségek:<br>$19 = 8 + 1 + 10 = 8 + 2 + 9 = 8 + 3 + 8 = 8 + 4 + 7$. | 1 pont | |
| Ezek egyike sem felel meg a terjedelemre vonatkozó feltételnek (rendre 9, 7, 6, 6 lenne a terjedelem). | 1 pont | |
| II. eset (ha 6 a módusz):<br>A lehetőségek: $19 = 6 + 3 + 10 = 6 + 4 + 9 = 6 + 6 + 7$. | 1 pont | |
| A terjedelem miatt (ami rendre 8, 7, 6 lenne) a három lehetőség közül az első az egyetlen megfelelő. | 1 pont | |
| Tehát az utolsó három értékelés (valamilyen sorrendben) 3, 6 és 10 volt. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| 3. c) | | |
|---|---|---|
| A 11. mérkőzés értékelését jelölje $x$. Ekkor $\frac{63+x}{11}=6{,}3-\frac{x}{10}$. | 1 pont | |
| $630 + 10x = 693 - 11x$ | 1 pont | |
| $x = 3$ (A 11. mérkőzés értékelése 3.) | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a lehetséges tíz eset mindegyikét megvizsgálja, és ennek alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.*

| 4. a) | | |
|---|---|---|
| (táblázat lent) | 5 pont* | |
| Az $f$ függvény grafikonja a III. grafikon lehet. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

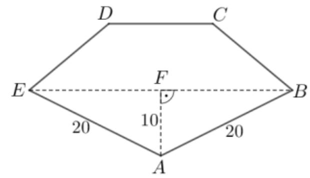
| függvény-grafikon | az $a$ helyen a függvényérték pozitív | az $a$ helyen az első derivált értéke pozitív | az $a$ helyen a második derivált értéke pozitív |
|---|---|---|---|
| I. | *hamis* | *hamis* | *hamis* |
| II. | *igaz* | *igaz* | *hamis* |
| III. | *igaz* | *igaz* | *igaz* |
| IV. | *igaz* | *hamis* | *igaz* |

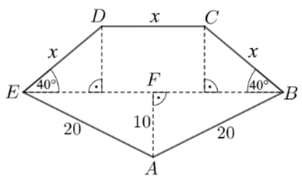
*Megjegyzések:*
*1. A *-gal jelölt 5 pontból az első oszlop hibátlan kitöltéséért 1 pontot, a második és a harmadik oszlop hibátlan kitöltéséért 2-2 pontot kapjon a vizsgázó.*
*2. Minden hibásan kitöltött mező 1 ponttal csökkenti a mező oszlopának kitöltésére adható pontszámot, de az egy oszlop kitöltéséért járó pontszám nem lehet 0-nál kevesebb.*

| 4. b) | | |
|---|---|---|
| $g'(x) = 2px + q$ | 1 pont | |
| $g''(x) = 2p$ | 1 pont | |
| A megadott feltételek miatt:<br>$p + q + r = 1$,<br>$2p + q = 2$ és<br>$2p = 4$. | 2 pont | |
| Innen $p = 2$, $q = -2$ és $r = 1$ (így $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$, ami valamennyi feltételnek megfelel). | 2 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

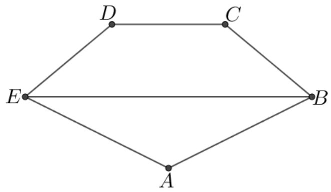
| 4. c) | | |
|---|---|---|
| $\int_{-3}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-2x+1\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-x^2+x\right]_{-3}^{2}=$ | 1 pont | |
| $=\left(\frac{4}{3}-4+2\right)-\left(-\frac{9}{2}-9-3\right)=-\frac{2}{3}-(-16{,}5)=\frac{95}{6}$ | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

# II.

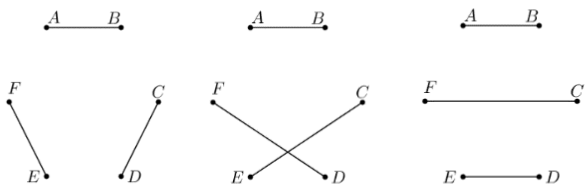
| **5. a)** | | |
|---|---|---|
| Merőlegest állítunk az $A$ csúcsból az $EB$ átlóra, ez az átlót az $F$ (felező)pontban metszi. Ekkor $AF = 10$ cm. | 1 pont |  |
| (Az $AFB\Delta$ egy szabályos háromszög fele, ezért) az ötszög $A$ csúcsnál fekvő szögének fele 60°-os. | 1 pont | $\cos BAF\sphericalangle = 0{,}5$, *ezért* $BAF\sphericalangle = 60°$. |
| Így $BAE\sphericalangle = 120°$ és $ABE\sphericalangle = AEB\sphericalangle = 30°$. | 1 pont | |
| (Mivel a húrtrapéz szögei 40°, 40°, 140°, 140°, ezért) az ötszög szögei: 120°, 70°, 140°, 140°, 70°. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **5. b)** | | |
|---|---|---|
| $EB = 2\,BF = 2\sqrt{20^2 - 10^2} = 20\sqrt{3} \approx 34{,}64$ cm | 1 pont* | *Az ABE háromszög területe egyenlő egy* 20 cm *oldalú szabályos háromszög területével:* |
| Az $ABE$ háromszög területe: $\dfrac{EB \cdot FA}{2} = \dfrac{20\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 100\sqrt{3} \approx 173{,}2$ cm$^2$. | 1 pont* | $\dfrac{20^2\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}$ |
|  Ha a trapéz $CD$ oldalának hossza (cm-ben) $x$, akkor $EB = x + 2x\cos 40°$. | 1 pont | |
| Tehát $34{,}64 = x + 2x\cos 40° = x(1 + 2\cos 40°)$, | 1 pont | |
| ebből $x \approx 13{,}68$ cm. | 1 pont | |
| A trapéz magassága $x\sin 40° \approx 8{,}79$ cm, | 1 pont | |
| területe $\left(\dfrac{34{,}64 + 13{,}68}{2} \cdot 8{,}79\right) \approx 212{,}4$ cm$^2$. | 1 pont | |
| Az ötszög területe (173,2 + 212,4 =) 385,6 cm$^2$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha az a) rész eredményét felhasználva számolja ki a vizsgázó a szakaszok hosszát, illetve a háromszög területét.*

| **5. c)** | | |
|---|---|---|
| A másodfokú $A$, $C$ vagy $D$ csúcsból indulva a bejárás feltételei nem teljesíthetők (ha a másodfokú csúcs a kiindulási pont, akkor ez az érkezési pont is egyben, ami csak 3, 4 vagy 5 él bejárását teszi lehetővé). | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Ha (például) a $B$ pontból indulunk, akkor 3 lehetőségünk van az $E$ pontba érkezni, onnan pedig mindegyik esetben 2 lehetőségünk van visszaérkezni $B$-n keresztül az $E$-be. | 1 pont |  |
| A $B$-ből indulva tehát $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség van a gráf éleinek bejárására. | 1 pont | *BCDEBAE, BCDEABE, BAEBCDE, BAEDCBE, BEDCBAE, BEABCDE* |
| Az $E$-ből indulva ugyanennyi, összesen tehát 12 bejárási lehetőség van. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **6. a) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az első csapat tagjait $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen lehet kiválasztani. | 1 pont | |
| A második csapat tagjait a maradék négy főből $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen lehet kiválasztani, és a megmaradt 2 fő alkotja a harmadik csapatot. | 1 pont | |
| Ez összesen $15 \cdot 6 = 90$ lehetőség. | 1 pont | |
| A 90 lehetőségben minden csapathármas annyiszor szerepel, ahányféleképpen a három csapat sorba rendezhető (mert ezek sorrendje nem számít), | 1 pont | |
| ezért $\frac{90}{3!} = 15$ lehetőség van valóban a három csapat kialakítására. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **6. a)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| (A neveket a kezdőbetűikkel helyettesítjük.)<br>Ha *A* csapattársa pl. *B*, akkor *C*, *D*, *E*, *F* közül háromféleképpen lehet 2 darab kétfős csapatot szervezni (*CD* és *EF*, *CE* és *DF*, vagy *CF* és *DE*).<br> | 2 pont | |
| Mivel *A* bármely csapattársa esetén 3-féleképpen szervezhető további 2 darab kétfős csapat, és *A* csapattársa 5-féle lehet, | 2 pont | |
| ezért $5 \cdot 3 = 15$ lehetőség van valóban a három csapat kialakítására. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

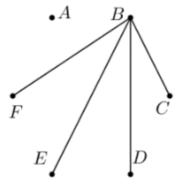
| **6. a)** **harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| A társaság hat tagját sorba rendezzük. Alkosson egy-egy csapatot az 1. és a 2., majd a 3. és a 4., végül az 5. és a 6. tag. | 1 pont | |
| 6! (= 720) sorba rendezés lehetséges. | 1 pont | |
| A három csapaton belül a sorrend nem számít, azaz így minden esetet $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$-szor számoltunk. | 1 pont | |
| Továbbá a három csapat különböző sorrendjei sem adnak új elosztást. Ez 3! (= 6) lehetőség. | 1 pont | |
| Ezért $\frac{6!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!} = 15$ lehetőség van valóban a három csapat kialakítására. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

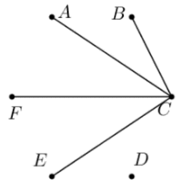
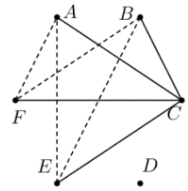
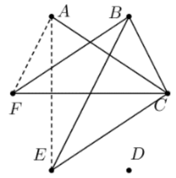
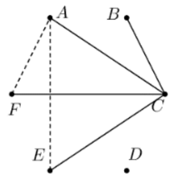
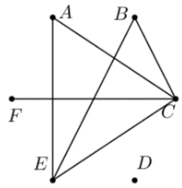
*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges esetet rendezetten felsorolja, akkor teljes pontszámot kapjon.*

| **6. b)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Válasszuk meg először például Attila párját.<br>Annak a valószínűsége, hogy a párja lány lesz $\frac{3}{5}$. | 1 pont | |
| Ezután például Csaba párja $\frac{2}{3}$ valószínűséggel lesz lány; Emil párja ekkor már biztosan lány lesz. | 1 pont | |
| Tehát $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5}$ a valószínűsége, hogy minden csapatba egy fiú és egy lány kerül. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

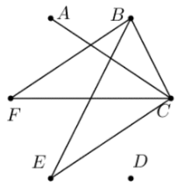
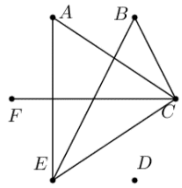
| **6. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha mindhárom csapat egyik tagja fiú, akkor mindegyik fiúhoz egy lányt kell választani. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Ezt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen lehet megtenni, tehát 6 kedvező csapatalkotási lehetőség van. | 2 pont | *A hat lehetőség (a neveket a kezdőbetűikkel jelölve):* $AB, CD, EF$; $AB, CF, ED$; $AD, CB, EF$; $AD, CF, EB$; $AF, CB, ED$; $AF, CD, EB$. |
| (Mivel az összes csapatalkotási lehetőség száma 15, ezért) a kérdezett valószínűség $\frac{6}{15} = 0{,}4$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **6. b)** **harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha véletlenszerűen alkotnak kétfős csapatokat, akkor azok (és csak azok) az esetek lesznek kedvezőtlenek, amelyekben egy kétfős lánycsapat, egy kétfős fiúcsapat és egy kétfős vegyes csapat van. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A 3 lány közül 3-féleképpen lehet kétfős lánycsapatot alkotni, minden választáshoz a 3 fiú közül 3-féleképpen lehet kétfős fiúcsapatot alkotni. (A harmadik csapatot a választásoknál kimaradt lány és fiú alkotja.) | 1 pont | *A vegyes csapatba 3 lány és 3 fiú közül választhatunk egy-egy tagot. (Ekkor a másik két csapatot egyféleképpen választhatjuk kedvezőtlennek.)* |
| A kedvezőtlen esetek száma tehát $3 \cdot 3 = 9$. | 1 pont | *Ez* $3 \cdot 3 = 9$*-féleképpen lehetséges.* |
| (Mivel az összes csapatalkotási lehetőség száma 15, ezért) a kérdezett valószínűség $1 - \frac{9}{15} = \frac{2}{5}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **6. c)** | | |
|---|---|---|
| (A neveket a kezdőbetűikkel helyettesítjük.) Mivel a csapattársa ellen senki sem játszhatott, ezért $B$, $C$, $D$, $E$ és $F$ csak 0, 1, 2, 3 vagy 4 mérkőzést játszhatott, emiatt mindegyik eset pontosan egyszer elő is fordult. | 1 pont | |
| $B$ nem játszhatott 4 mérkőzést, mert akkor nem lenne 0 a $C$, $D$, $E$ és $F$ mérkőzéseinek száma között. | 1 pont |   |

| | | |
|---|---|---|
| Feltehetjük, hogy *C* játszott 4 mérkőzést. Ekkor csak *C* csapattársa (*D*) mérkőzéseinek száma lehet 0. | 1 pont |   |
| A *B*-*E*, *B*-*F*, *A*-*E*, *A*-*F* mérkőzések közül azokat kell kiválasztani, amelyekkel teljesül az a feltétel, hogy *B*, *E*, *F* mérkőzéseinek száma valamilyen sorrendben 1, 2, 3. | 1 pont* |   |
| Ha *B*-nek 3 mérkőzése lenne, akkor nem lenne olyan játékos, akinek 1 mérkőzése van, | 1 pont* |   |
| s ha *B*-nek 1 mérkőzése lenne, akkor nem lenne olyan játékos, akinek 3 mérkőzése van. | 1 pont* |   |
| Ezek alapján Boróka csak 2 mérkőzést játszhatott (és ez lehetséges is). | 1 pont |   |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelzett pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| *B*, *E*, *F* közül *B* nem játszhatott 3 mérkőzést, hiszen ekkor *E* és *F* is legalább 2 mérkőzésen túl lenne (*B*-vel és *C*-vel), így nem lenne olyan, aki 1 mérkőzést játszott. | 1 pont |   |
| Tehát *E* és *F* közül valamelyikük 3 mérkőzést játszott. Feltehetjük, hogy ez *E* volt (a mérkőzéseket *A*-val, *B*-vel és *C*-vel kellett játszania). | 1 pont | |
| Ekkor csak *F* lehet az, aki 1 mérkőzést játszott (*C*-vel), mert *B*, *C*, *E*-nek legalább 2 mérkőzése van. | 1 pont |   |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyetlen, a szövegnek megfelelő ábra alapján helyes választ ad, de nem indokolja, hogy más megoldása nincs a feladatnak, akkor ezért 2 pontot kapjon.*

| **7. a)** | | |
|---|---|---|
| $h(0)=\dfrac{30}{1+59\cdot 0,905^{0}}=$ | 1 pont | |
| = 0,5 m magas volt a fenyőfa. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **7. b)** | | |
|---|---|---|
| $10=\dfrac{30}{1+59\cdot 0,905^{t}}$ | 1 pont | |
| $590\cdot 0,905^{t}=20$<br>$0,905^{t}=\dfrac{2}{59}$ | 1 pont | $0,905^{t}\approx 0,034$ |
| $t=\log_{0,905}\dfrac{2}{59}$ | 1 pont | $t\approx\dfrac{\lg 0,034}{\lg 0,905}$ |
| $t\approx 33,9$ | 1 pont | |
| A megfigyelés kezdetétől számítva körülbelül 34 év múlva lesz a fa magassága 10 m. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **7. c)** | | |
|---|---|---|
| A $\{0,905^{n}\}$ sorozat konvergens, és határértéke 0. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Ezért az $\{a_n\}$ sorozat is konvergens,<br>és $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}=\dfrac{30}{1+59\cdot 0}=\dfrac{30}{1}=30.$ | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **7. d)** | | |
|---|---|---|
| Az 5 ezer Ft/m költségű kerítésszakasz legyen $x$ m hosszú, a 10 ezer Ft/m költségű szakasz pedig $y$ m hosszú ($x>0$, $y>0$). A teljes építési költség ekkor $5x+10y=400$ (ezer Ft).<br>Innen $y=40-0,5x$. | 1 pont | $x=80-2y$ |
| A téglalap alakú ültetvény területe (m$^2$-ben):<br>$xy=x(40-0,5x)=40x-0,5x^{2}$. | 1 pont | $xy=(80-2y)\,y=$<br>$=80y-2y^{2}$ |
| $40x-0,5x^{2}=-0,5(x-40)^{2}+800$ | 1 pont* | $80y-2y^{2}=$<br>$=-2(y-20)^{2}+800$ |
| Ennek $x=40$ esetén van maximuma, | 1 pont* | *Ennek* $y=20$ *esetén van maximuma,* |
| ekkor $y=20$. | 1 pont | *ekkor* $x=40$. |

| | | |
|---|---|---|
| A 400 ezer Ft-ból elkeríthető legnagyobb területű ültetvény 5 ezer Ft/m költségű oldala 40 m, a 10 ezer Ft/m költségű oldala 20 m hosszú. (Az ültetvény területe ekkor 800 $m^2$.) | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetekért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| $f : ]0; 80[ \to \mathbf{R}$; $f(x) = 40x - 0{,}5x^2$ <br> A szélsőérték szükséges feltétele $f'(x) = 40 - x = 0$. | 1 pont | |
| Ebből $x = 40$, és itt pozitívból negatívba vált a deriváltfüggvény, tehát ez $f$-nek (abszolút) maximumhelye. | 1 pont | |

*vagy*

| | | |
|---|---|---|
| $xy = x(40 - 0{,}5x) = 0{,}5 \cdot x(80 - x)$. <br> Az $x(80 - x)$ szorzat tényezőire a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva: <br> $x(80 - x) \le \left(\frac{x + 80 - x}{2}\right)^2 = 1600$. | 1 pont | |
| Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = 80 - x$, azaz $x = 40$. Ez tehát az $f$ maximumhelye. | 1 pont | |

| **8. a)** | | |
|---|---|---|
| Az $E_0$ esemény pontosan akkor következik be, ha az $A$ tartomány egyik átjárója sincs nyitva. | 1 pont | |
| Ennek a valószínűsége $(1 - p)^2$. | 1 pont | |
| $(1 - p)^2 = 1 - 2p + p^2$ valóban. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **8. b)** | | |
|---|---|---|
| $1 - 2p + p^2 = (1 - p)^2$, <br> tehát $(1 - p)^2 \le 0{,}01$. | 1 pont | $1 - 2p + p^2 \le 0{,}01$ <br> $p^2 - 2p + 0{,}99 \le 0$ |
| $p < 1$ miatt $0 < 1 - p \le \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$. | 1 pont | $p^2 - 2p + 0{,}99 = 0$ <br> *valós gyökei* 0,9 *és* 1,1. |
| Tehát $0{,}9 \le p\ (< 1)$ esetén lesz legfeljebb 0,01 az $E_0$ esemény valószínűsége. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **8. c)** | | |
|---|---|---|
| Az $E_1$ esemény pontosan akkor következik be, ha az $A$ tartomány két átjárója közül az egyik nyitva van, a másik pedig nincs nyitva, és a $B$ és $C$ közötti átjáró sincs nyitva. | 1 pont | |
| Ennek valószínűsége $\binom{2}{1}p(1-p)\cdot(1-p)=$ | 1 pont | |
| $=2p-4p^2+2p^3$ valóban. | 1 pont | |
| Az $E_2$ esemény pontosan akkor következik be, ha legalább két (tehát 3 vagy 2) átjáró nyitva van. Ennek valószínűsége $p^3+\binom{3}{2}p^2(1-p)=$ | 1 pont* | |
| $=p^3+3p^2-3p^3=3p^2-2p^3$ valóban. | 1 pont* | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok az alábbi gondolatmenetért is járnak.*

| | | |
|---|---|---|
| ($E_0$, $E_1$ és $E_2$ teljes eseményrendszert alkot, ezért) $P(E_2)=1-P(E_0)-P(E_1)=$ | 1 pont | |
| $=1-(1-2p+p^2)-(2p-4p^2+2p^3)=3p^2-2p^3$ valóban. | 1 pont | |

| **8. d)** | | |
|---|---|---|
| (Az $f:\,]0;1[\,\to\mathbf{R}$; $f(p)=2p-4p^2+2p^3$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja nulla.) $f'(p)=2-8p+6p^2=0$ | 1 pont | |
| $p=1$ vagy $p=\frac{1}{3}$ | 1 pont | |
| $p=1$ nem megoldás ($p<1$ miatt). | 1 pont | |
| $p=\frac{1}{3}$ esetén $f''\left(\frac{1}{3}\right)=-8+4=-4<0$, tehát ez maximumhelye a függvénynek. (A ]0; 1[ intervallumon ez abszolút maximuma a függvénynek.) | 1 pont | *$p=\frac{1}{3}$ helyen a függvény növekvőből csökkenőbe vált, tehát ez maximumhelye a függvénynek.* |
| Ekkor a kérdezett valószínűség $\left(2\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{27}=\right)\frac{8}{27}$ ($\approx 0{,}296$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| 9. a) | | |
|---|---|---|
| (Összesen $\binom{5}{2}=10$ db kéttényezős szorzat van.)<br>$2\cdot4,\ 2\cdot6,\ 2\cdot8,\ 2\cdot10,$<br>$4\cdot6,\ 4\cdot8,\ 4\cdot10,$<br>$6\cdot8,\ 6\cdot10,$<br>$8\cdot10.$ | 3 pont | |
| Ezek összege (8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 32 + 40 + + 48 + 60 + 80 =) 340. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 9. b) | | |
|---|---|---|
| $S_{k+1}=S_k+1\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)+...+k\cdot(k+1)$ | 2 pont | |
| $S_{k+1}=S_k+(1+2+...+k)\cdot(k+1)=$ | 1 pont | |
| $=S_k+\frac{k(k+1)}{2}\cdot(k+1)=S_k+\frac{k(k+1)^2}{2}$ valóban. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 9. c) első megoldás | | |
|---|---|---|
| Bizonyítás teljes indukcióval:<br>$n=2$ esetén $S_2=1\cdot2=2=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot8}{24}=\frac{48}{24}$ igaz. | 1 pont | |
| Elegendő belátni, hogy ha valamely $k$ esetén igaz az állítás ($k\in\mathbf{N}$, $k\geq2$), akkor igaz $k+1$-re is, vagyis $S_{k+1}=\frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{24}$. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A b) feladat szerint<br>$S_{k+1}=S_k+\frac{k(k+1)^2}{2}=$<br>$=\frac{(k-1)k(k+1)(3k+2)}{24}+\frac{k(k+1)^2}{2}$. | 1 pont | |
| $k(k+1)$-et kiemelve:<br>$S_{k+1}=k(k+1)\cdot\frac{(k-1)(3k+2)+12(k+1)}{24}=$ | 1 pont | |
| $=k(k+1)\cdot\frac{3k^2+11k+10}{24}$. | 1 pont | |
| Mivel $3k^2+11k+10=(k+2)(3k+5)$, | 2 pont | |
| ezért $S_{k+1}=\frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{24}$,<br>ami azt jelenti, hogy igaz az eredeti állítás. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

| **9. c) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| ($n$ adott pozitív egész és $n \geq 2$.)<br>$(1+2+3+...+n)^2 =$<br>$= (1^2+2^2+...+n^2)+2\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3+...+(n-1)\cdot n)$. | 1 pont | |
| Ebből $2\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3+...+(n-1)\cdot n) =$<br>$= (1+2+...+n)^2-(1^2+2^2+...+n^2)$. | 1 pont | |
| Mivel $(1+2+...+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ | 1 pont | |
| és $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, | 1 pont | |
| ezért $2\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3+...+(n-1)\cdot n) =$<br>$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$ | 1 pont | |
| $= n(n+1)\left(\frac{n(n+1)}{4} - \frac{2n+1}{6}\right) = n(n+1)\cdot\frac{3n^2-n-2}{12}$. | 1 pont | |
| $3n^2-n-2 = (3n+2)(n-1)$, ezért<br>$2\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3+...+(n-1)\cdot n) = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{12}$. | 1 pont | |
| 2-vel való osztás után a bizonyítandó állítást kapjuk. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |