ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a) első megoldás		
(Mivel 2^x mindig pozitív, ezért az egyenlet minden valós számra értelmezve van.) Négyzetre emelve: $2^x = 2^{2x+2} - 2 \cdot 2^{x+1} + 1$.	1 pont	
Nullára rendezve: $0 = 4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 1$.	1 pont	
Az egyenlet 2^x-ben másodfokú, megoldva: $2^x = 1$ vagy $2^x = \frac{1}{4}$.	1 pont	
Az első esetben $x = 0$, a második esetben $x = -2$.	2 pont	
Behelyettesítéssel adódik, hogy $x = 0$ valóban megoldás, $x = -2$ viszont nem.	1 pont*	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó megállapítja, hogy* $2^{x+1} - 1 \geq 0$ *miatt* $x \geq -1$*, majd ezután ekvivalens átalakításokra hivatkozva csak az* $x = 0$ *gyököt fogadja el.*

1. a) második megoldás		
(Mivel 2^x mindig pozitív, ezért az egyenlet minden valós számra értelmezve van.) Az egyenlet $A = \sqrt{2^x}$ -ben másodfokú,	1 pont	
ezzel az új ismeretlennel: $A = 2A^2 - 1$ $0 = 2A^2 - A - 1$.	1 pont	
Megoldva: $A = 1$ vagy $A = -\frac{1}{2}$.	1 pont	
Az első esetben $x = 0$, a második esetben ($A > 0$ miatt) nincs megoldás.	2 pont	
Behelyettesítéssel adódik, hogy $x = 0$ valóban megoldás.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b)		
Felhasználva, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: $2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$.	1 pont	
Nullára rendezve: $0 = 2\cos^2 x - 3\cos x - 2$.	1 pont	
Az egyenlet $\cos x$-ben másodfokú; megoldva: $\cos x = 2$ vagy $\cos x = -\frac{1}{2}$.	1 pont	

Az első esetben nincs megoldás,	1 pont	
a második esetben $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.	2 pont*	
Ekvivalens átalakításokat végeztünk.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó csak az egyik gyöksorozatot adja meg, vagy (csak) fokban adja meg (helyesen) az összes gyököt, vagy nem jelzi, hogy k egész szám, akkor a *-gal jelölt 2 pontból minden esetben 1-1 pontot veszítsen (összesen legfeljebb 2 pontot).*

2. a)		
$\frac{28}{40} = 0{,}7$, tehát Aliz a Hanna által megtalált hibák 70%-át vette észre,	1 pont	
ő tehát az összes hibának is a 70%-át találta meg. Az összes hiba 70%-a 35, ezért összesen 50 hiba van a teljes szövegben.	2 pont	
Aliz és Hanna összesen 35 + 40 – 28 = 47 különböző hibát vettek észre,	1 pont	
tehát (50 – 47 =) 3 hibát nem vett észre egyikük sem.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. b)		
Annak a valószínűsége, hogy a gépírónő egy karaktert helyesen gépel le: (1 – 0,002 =) 0,998.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy egy teljes oldal (2000 karakter) hibátlan: $0{,}998^{2000} \approx$	1 pont	
≈ 0,0182 valóban.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

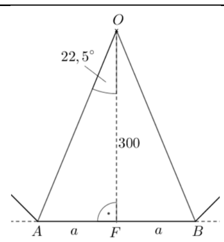
2. c)		
Annak a valószínűsége, hogy egy adott oldalon van hiba: $(1-0{,}0182 =)\ 0{,}9818$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy 150 oldalból egy sem hibátlan: $P(0) = 0{,}9818^{150} \approx 0{,}0636$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy 150 oldalból pontosan egy hibátlan: $P(1) = \binom{150}{1} \cdot 0{,}0182 \cdot 0{,}9818^{149} \approx 0{,}1768$.	2 pont	
Annak a valószínűsége, hogy 150 oldalból legalább két oldal hibátlan: $1 - P(0) - P(1) \approx 0{,}760$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

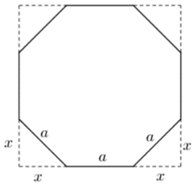
Megjegyzés: Ha a vizsgázó annak valószínűségét számítja ki, hogy a 150 oldalból pontosan két oldal hibátlan, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

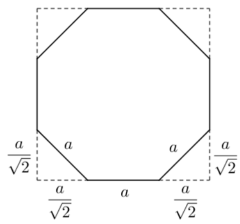
3. a)		
Az f grafikonja lefelé nyíló parabola.	1 pont	*Vázlatos ábra is elfogadható.*
$f(x) = -0,5x(x-6)$, ezért a parabola tengelypontjának első koordinátája $\left(\frac{0+6}{2} =\right) 3$.	1 pont	*Teljes négyzetté alakítva:* $f(x) = -0,5(x-3)^2 + 4,5$ (*ennek maximuma* 4,5).
$f(3) = 4,5$	1 pont	
Az értékkészlet]–∞; 4,5].	1 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**4 pont**	

3. b)		
Az érintő meredeksége $f'(6)$-tal egyenlő.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(x) = -x + 3$,	1 pont	
így $f'(6) = -3$.	1 pont	
Az érintő egyenlete $y = -3(x - 6)$.	2 pont	$y = -3x + 18$
Összesen:	**5 pont**	

3. c)		
(A g az f-nek primitív függvénye: $g \in \int f$, tehát) $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c$.	2 pont	
A $g(3) = 7$ feltétel miatt $-\frac{1}{6}\cdot 3^3 + \frac{3}{2}\cdot 3^2 + c = 7$,	1 pont	
amiből $c = -2$. (Tehát $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2$.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. a) első megoldás		
A szabályos nyolcszög O középpontját a sokszög AB oldalának végpontjaival összekötve olyan egyenlő szárú háromszöget kapunk, amelynek szárszöge 45°-os, az AB alapjához tartozó magassága pedig 300 mm hosszú.	2 pont	
(Az ábra jelöléseit használva) az AFO derékszögű háromszögben (felhasználva, hogy OF szögfelező) $\text{tg}\,22,5° = \frac{a}{300}$.	2 pont	
Ebből $a \approx 124,26$ (mm).	1 pont	
A szabályos nyolcszög oldala $2a \approx 248,5$ mm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

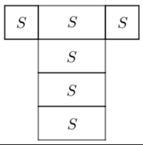
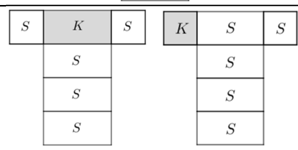
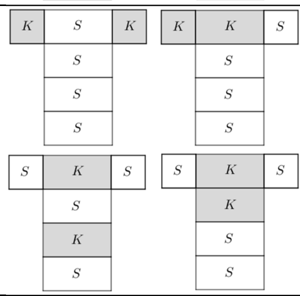
4. a) második megoldás		
 A szabályos nyolcszög oldala a mm hosszú, a 600 mm oldalú négyzetből levágott kis háromszögek befogója x mm hosszú ($x < 300$): $2x + a = 600$, $a = 600 - 2x$.	2 pont	
(A Pitagorasz-tétel miatt:) $2x^2 = a^2$, azaz $2x^2 = (600-2x)^2$.	1 pont	
$2x^2 = 360\,000 - 2400x + 4x^2$ $0 = x^2 - 1200x + 180\,000$	1 pont	
$x_1 \approx 175{,}74$, illetve $x_2 \approx 1024{,}26$.	1 pont	
Az utóbbi nem lehetséges, ezért a nyolcszög oldala ($600 - 2x_1 \approx$) 248,5 mm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. a) harmadik megoldás		
Legyen a szabályos nyolcszög oldalának hossza (mm-ben mérve) a. A nyolcszög egy $D = 600$ mm oldalú négyzetből származtatható.	1 pont	
A négyzet csúcsainál a átfogójú, azaz $\frac{a}{\sqrt{2}}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögeket vágunk le.	1 pont	
A négyzet oldalának hossza ezért (az ábra szerint) $a + 2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = a(1+\sqrt{2})$,	2 pont	
azaz $a(1+\sqrt{2}) = 600$.	1 pont	
Ebből $a \approx 248{,}5$, tehát a nyolcszög oldala 248,5 mm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. b) első megoldás		
(Teljes indukcióval bizonyítunk.) Az állítás $n = 1$ esetén igaz ($3\cdot1^2 - 3\cdot1 + 1 = 1$).	1 pont	
Tegyük fel, hogy az állítás $n = k$-ra igaz ($k \geq 1$): a k-adik lépésig megépített hatszögek száma $3k^2 - 3k + 1$.	1 pont	
Be kell látnunk, hogy a $k + 1$-edik lépés után $3(k+1)^2 - 3(k+1) + 1 = 3k^2 + 3k + 1$ hatszög lesz.	1 pont	
A $k + 1$-edik lépésben $6k$ darabbal növekszik a hatszögek száma,	1 pont	
így a $k+1$-edik lépés után a hatszögek száma $3k^2 - 3k + 1 + 6k =$	1 pont	
$= 3k^2 + 3k + 1$ valóban. Ezzel az állítást beláttuk.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. b) második megoldás		
Az egyes lépésekben épített új hatszögek száma a második lépéstől kezdve olyan számtani sorozatot alkot, amelynek az első tagja és a differenciája is 6.	2 pont	
A második lépéstől az n-edik lépésig (összesen $n-1$ lépésben) megépített új sejtek száma $\frac{2\cdot 6+(n-2)\cdot 6}{2}\cdot(n-1)=$	2 pont	
$=3n^2-3n$.	1 pont	
Az első lépésben megépített sejttel együtt valóban $3n^2-3n+1$ az összesen megépített hatszögek száma.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

II.

5. a)		
(A négyzetes oszlop 6 lapja közül 6, 5 vagy 4 lehet sárga színű.) 1 olyan négyzetes oszlop van, amelynek mind a hat lapja sárga.	1 pont	*A kiterített háló színezése az alábbiak valamelyike lehet csak:* 
2 olyan négyzetes oszlop van, amelynek öt lapja sárga és egy lapja kék (egy oldallapja vagy egy alaplapja).	1 pont	
Ha a négyzetes oszlopnak négy lapja sárga és kettő kék, akkor a két kék lap lehet – a két alaplap (1 eset), – egy alaplap és egy oldallap (1 eset), – két oldallap (amelyek vagy egymással szemben vannak, vagy élben csatlakoznak) (2 eset). Ez összesen 4 eset.	2 pont	
Összesen 1 + 2 + 4 = 7 darab négyzetes oszlopot tartalmaz az építőjáték.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

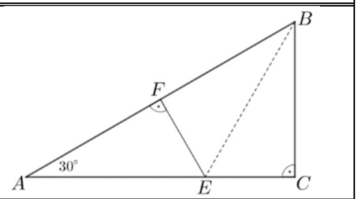
5. b)		
Legyen a négyzetes oszlop alapéle x cm hosszú. Felszíne $A = 2x^2 + 88x = 384$ (cm^2).	1 pont	
A $2x^2 + 88x - 384 = 0$ másodfokú egyenlet pozitív megoldása $x = 4$ (a másik megoldás $x = -48$).	1 pont	$x^2 + 44x - 192 = 0$
Az alapél tehát 4 cm hosszú, az oszlop térfogata így $(4^2 \cdot 22 =)$ 352 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

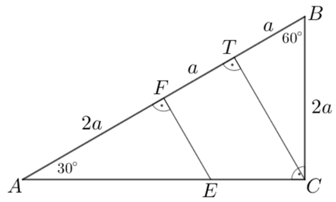
5. c)		
Legyen a négyzetes oszlop alapéle a cm, oldaléle b cm hosszú. Ezzel a felszíne $A = 2a^2 + 4ab = 384$ (cm^2),	1 pont	
ahonnan $b = \dfrac{384 - 2a^2}{4a}$ (ahol $a \in \left]0; \sqrt{192}\right[$).	1 pont	
Az élek hosszának összege: $8a + 4b = 8a + \dfrac{384 - 2a^2}{a} = 6a + \dfrac{384}{a}$.	1 pont	
A ($\left]0; \sqrt{192}\right[$ halmazon értelmezett) $f(a) = 6a + \dfrac{384}{a}$ függvény deriváltfüggvénye $f'(a) = 6 - \dfrac{384}{a^2}$.	1 pont*	
Az f-nek ott lehet minimumhelye, ahol $f'(a) = 0$, azaz ($a \in \left]0; \sqrt{192}\right[$ miatt) $a = 8$-nál.	2 pont*	
Mivel $f''(a) = \dfrac{768}{a^3} > 0$, ezért ez valóban (abszolút) minimumhely.	1 pont*	
Ekkor $b = \dfrac{384 - 2 \cdot 8^2}{4 \cdot 8} = 8$ (a négyzetes oszlop tehát kocka, a minimális összeg pedig 96 cm).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

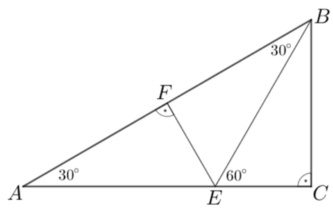
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

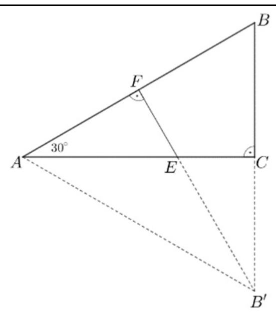
Számtani és mértani közép közti összefüggés szerint: $6a + \dfrac{384}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{6a \cdot \dfrac{384}{a}} = 2 \cdot \sqrt{2304} = 96$.	2 pont	
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $6a = \dfrac{384}{a}$, azaz $a = 8$.	2 pont	

6. a) **első megoldás**		
Az AF szakasz hosszát jelölje x, $AB = 2x$, így az ABC háromszögben $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{2x}$,	1 pont	*Az arányok nem változnak, ha feltesszük, hogy $BC = 1$. Ekkor $AB = 2$ és $AC = \sqrt{3}$.*
ahonnan $AC = \sqrt{3}x$.	1 pont	
Az AFE háromszögben $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AF}{AE} = \frac{x}{AE}$,	1 pont	*Mivel $AF = 1$, ezért $AE = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}AC$,*
ahonnan $AE = \frac{2}{\sqrt{3}}x$.	1 pont	*így $EC = AC - AE = \frac{1}{3}AC$.*
$AE : AC = \frac{2}{\sqrt{3}}x : \sqrt{3}x = 2 : 3$, ezért $AE : EC = 2 : 1$.	1 pont	*Ezért $AE : EC = 2 : 1$.*
Összesen:	**5 pont**	

6. a) **második megoldás**		
Az ABC háromszög egy szabályos háromszög fele, így $AB = 2BC$, azaz $BF = BC$.	1 pont	
A BFE és a BCE háromszögek egybevágók, mert $BF = BC$, továbbá közös a BE oldaluk, és e nagyobbik oldallal szemközti szögük egyenlő (derékszög).	1 pont	
Ezért harmadik oldaluk is egyenlő: $EF = EC$.	1 pont	
Így $\frac{AE}{EC} = \frac{AE}{EF} = \frac{1}{\sin 30°} = \frac{2}{1}$.	2 pont	*Az AEF háromszög egy szabályos háromszög fele: $AE = 2EF$, tehát $AE = 2EC$. Az E pont a C-hez közelebbi harmadolópont.*
Összesen:	**5 pont**	

6. a) harmadik megoldás		
Húzzuk be az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magasságát, ennek talppontja legyen T. Az ABC, AFE és BCT háromszög egy-egy szabályos háromszög fele. Egy ilyen háromszög átfogója kétszerese a rövidebb befogójának.	1 pont	
Így, ha $BT = a$, akkor $BC = 2a$, $AB = 4a$. Mivel F felezőpont, azért $AF = FB = 2a$, tehát $FT = (FB - BT =)\ a$.	2 pont	
F pont ezért az AT szakasz T-hez közelebbi harmadolópontja.	1 pont	
Mivel EF párhuzamos CT-vel, a párhuzamos szelők tétele miatt E is az AC szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. a) negyedik megoldás		
Az E az AB felezőmerőlegesének egy pontja, ezért $AE = BE$.	1 pont	
Az AEB háromszög ezért egyenlő szárú, így $ABE\sphericalangle = BAE\sphericalangle = 30°$.	1 pont	
$BEC\sphericalangle = 60°$ (mert külső szöge az AEB háromszögnek), ezért BEC derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele.	1 pont	
Így $BE = AE = 2 \cdot EC$,	1 pont	
tehát az E pont az AC szakasznak a C-hez közelebbi harmadolópontja ($AE : EC = 2 : 1$).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. a) ötödik megoldás		
Az ABC háromszöget az ABB' szabályos háromszöggé kiegészítve	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ebben a háromszögben AC egy súlyvonal.	1 pont	
Az FE szakasz az AB oldal felezőmerőlegesére illeszkedik,	1 pont	
ezért az FB' is súlyvonala, E pedig súlypontja az ABB' szabályos háromszögnek.	1 pont	
Az E pont tehát az AC szakasznak a C-hez közelebbi harmadolópontja.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. b)		
(A megoldás során felhasználjuk azt az ismert tényt, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 30°-os, akkor az ezzel szemközti befogó fele a háromszög átfogójának.) H_1 háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz (mert szögeik megegyeznek), a hasonlóságuk aránya $1:2$ (hiszen H_1 átfogója megegyezik ABC háromszög rövidebb befogójával, amely fele az átfogójának),	1 pont	
ezért a H_1 háromszög területe az eredeti háromszög területének negyedrésze.	1 pont	
A H_1 háromszög levágásával tehát olyan háromszög marad meg, amelynek a területe a kiindulási háromszög területének a 3/4 része (0,75-szorosa).	1 pont	
Ez mindegyik további lépésben ismétlődik, minden esetben az előző háromszög területének a 0,75-szorosa marad meg a levágás után.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 13 levágás után megmaradó háromszög területe ezért az ABC háromszög területének $0{,}75^{13} \approx 0{,}024$-szerese,	1 pont	
azaz kb. 2,4%-a.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. c)		
$\frac{P_1P_2}{CP_1} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	1 pont	
(Hasonlósági megfontolások miatt) ez lesz az aránya a töröttvonal bármely két szomszédos szakasza hosszának.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A töröttvonal egymást követő szakaszainak hossza tehát egy olyan mértani sorozatot alkot, melynek első tagja $CP_1 = 2-\sqrt{3}$, hányadosa pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	1 pont	
A végtelen töröttvonal hossza a (mértani sorozatból képzett) végtelen mértani sor összege (ez létezik, mert $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ teljesül), azaz $S = \frac{2-\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} =$	1 pont	
$= \frac{2-\sqrt{3}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = 2$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó közelítő értéket (is) használ a feladat megoldása során, akkor megoldására legfeljebb 4 pontot kaphat.

7. a) **első megoldás**		
Három egymás melletti helyet 4-féleképpen lehet kiválasztani: az 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6 hármasok bármelyikét választhatjuk.	1 pont	
Szintén 4-féleképpen lehet kiválasztani három, páronként nem szomszédos helyet: az 1-3-5, 1-3-6, 1-4-6, 2-4-6 hármasok bármelyikét választhatjuk.	1 pont	
A kedvező esetek (és az összes eset) száma mindkét választás esetében ugyanannyi,	1 pont	
a két esemény valószínűsége tehát egyenlő.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a) **második megoldás**		
(Ha a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor) a három lőállás $\binom{6}{3}$-féleképpen választható ki.	1 pont	*A három lőállás* $6 \cdot 5 \cdot 4$ $(= 120)$*-féleképpen választható ki (a sorrendet is figyelembe véve). Ezekben* $3!$*-féleképpen helyezkedhetnek el a sportlövők.*
Három egymás melletti helyet 4-féleképpen lehet kiválasztani: az 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6 hármasok bármelyikét választhatjuk. Ennek valószínűsége $\frac{4}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.	1 pont	$\frac{4 \cdot 3!}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{5}$
Szintén 4-féleképpen lehet kiválasztani három, páronként nem szomszédos helyet: az 1-3-5, 1-3-6, 1-4-6, 2-4-6 hármasok bármelyikét választhatjuk. Ennek valószínűsége $\frac{4}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.	1 pont	$\frac{4 \cdot 3!}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{5}$
A két esemény valószínűsége tehát egyenlő.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b)		
(Öt lövéssel legfeljebb 25 pontot lehet szerezni.) Lehetséges, hogy nem veszített pontot (1 eset); vagy csak 1 pontot veszített, azaz egy 4-est és négy 5-öst lőtt (1 eset).	1 pont	*A lövések pontértéke monoton növekvő sorrendben:* 55555; 45555;
Lehetséges, hogy 2 pontot veszített: egy 3-ast és négy 5-öst; vagy két 4-est és három 5-öst lőtt (2 eset).	1 pont	35555; 44555;
Lehetséges, hogy 3 pontot veszített: egy 2-est és négy 5-öst; vagy egy 3-ast, egy 4-est és három 5-öst; vagy három 4-est és két 5-öst lőtt (3 eset).	1 pont	25555; 34555; 44455.
Összesen tehát 1 + 1 + 2 + 3 = 7-féleképpen érhet el legalább 22 pontot Endre.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. c)		
Ha a terjedelem 3, akkor vagy 1-es van és 5-ös nincs, vagy fordítva (tehát legfeljebb négyféle pontszám fordul elő).	1 pont	
(Az előbbi gondolat miatt) ha egyetlen módusz van, akkor az legalább négyszer fordult elő, tehát legalább négy 2-es van (de hat vagy több már nem lehet a medián miatt).	1 pont	
Ha 1-es van és 5-ös nincs, akkor a pontszámok a medián figyelembevételével 122224xxx4.	1 pont	
Ebből az 1222244444 lehetőség következik, ami ellentmondás, mert nem a 2 lenne a módusz (vagy nem 3 az átlag).	1 pont	
Tehát nincs 1-es és van 5-ös: 2222xxxxx5 a pontok sorrendje. A medián miatt a két középső érték vagy 2-4 vagy 3-3.	1 pont	
Ha 2-4 lenne, akkor az átlag nagyobb lenne 3-nál (mert a 222224xxx5-ben hiányzó három pontszám mindegyike legalább 4), ez ellentmondás.	1 pont	
Tehát 222233xxx5. Az átlag miatt a három hiányzó érték összege 11, de közöttük legfeljebb egy 3-as pontszám lehet (mert a 2 az egyetlen módusz),	1 pont	
azaz 2222333445 az elért pontszámok növekvő sorrendje (és mivel minden mást kizártunk, valóban ez az egyetlen lehetőség).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:
1. Kevésbé részletes indoklás is elfogadható.
2. Indoklás nélkül a jó megoldás közlése (2222333445) *2 pontot, a közölt megoldás helyességének ellenőrzése 1 pontot ér. További 5 pontot ér annak igazolása, hogy a feladat megoldása egyértelmű.*

8. a)		
$p^2+q^2>p^2-q^2$ nyilvánvalóan teljesül.	1 pont	
Meg kell mutatni, hogy $p^2+q^2>2pq$.	1 pont	
Rendezve: $p^2-2pq+q^2>0$, vagyis $(p-q)^2>0$,	1 pont	*2-vel osztva és a két pozitív szám négyzetgyökét véve a négyzetes és mértani közép közti egyenlőtlenséget kapjuk:* $\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}}>\sqrt{pq}$,
ami valóban igaz, mert $p\neq q$. (Ekvivalens átalakításokat végeztünk.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. b)		
A két rövidebb oldal négyzetének összege $(p^2-q^2)^2+(2pq)^2=p^4+2p^2q^2+q^4$.	2 pont	
Ez $p^4+2p^2q^2+q^4=(p^2+q^2)^2$ miatt a harmadik oldal négyzetével egyenlő.	1 pont	
A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög valóban derékszögű.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. c)		
A (derékszögű) háromszög területe a két befogó (a két rövidebb oldal) szorzatának fele: $T=\frac{(p^2-q^2)\cdot 2pq}{2}=$	1 pont	
$=p^3q-q^3p$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8. d)		
A $T=rs$ területképletet alkalmazva (T a háromszög területe, s a háromszög félkerülete, r pedig a beírt kör sugara):	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$s=\frac{(p^2+q^2)+(p^2-q^2)+2pq}{2}=p^2+pq$.	1 pont	
$r=\frac{T}{s}=\frac{p^3q-q^3p}{p^2+pq}=\frac{pq(p^2-q^2)}{p(p+q)}=$	1 pont	
$=\frac{pq(p+q)(p-q)}{p(p+q)}=q(p-q)$,	2 pont	
ami valóban egész szám.	1 pont	
	6 pont	

Megjegyzés: *Ha a vizsgázó pontosan hivatkozik arra a tételre (vagy bizonyítja), hogy a derékszögű háromszög beírt körének r sugara az a, b befogók és a c átfogó segítségével kiszámítható az* $r=\frac{a+b-c}{2}$ *összefüggéssel is, akkor erre 2 pontot kapjon.*

A képletet használva $r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{p^2-q^2+2pq-(p^2+q^2)}{2}=$ *(1 pont)*

$=\frac{2pq-2q^2}{2}=pq-q^2$ *(2 pont), ami valóban egész szám (1 pont).*

9. a)		
$f'(x)=2x$	1 pont	
$f'(a)=2a=b$	1 pont	
$\int_a^{2a} f(x)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{2a}=\frac{8a^3}{3}-\frac{a^3}{3}=\frac{7a^3}{3}$	2 pont	
$\frac{7a^3}{3}=63$	1 pont	
Ebből $a = 3$, és így $b = 2a = 6$.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. b)		
$h(1) = 1 + p + r$ $h(2) = 4 + 2p + r$ $h(3) = 9 + 3p + r$ $h(4) = 16 + 4p + r$	1 pont	
A számtani sorozat feltétel miatt $2h(3) = h(1) + h(4)$, azaz $18 + 6p + 2r = 17 + 5p + 2r$,	2 pont	
ahonnan $p = –1$.	1 pont	
A mértani sorozat feltétel miatt $(h(2))^2 = h(1)\cdot h(4)$, vagyis (felhasználva $p = –1$-et) $(r + 2)^2 = r(r + 12)$.	2 pont	
$r^2 + 4r + 4 = r^2 + 12r$ $8r = 4$ $r = 0,5$	2 pont	
Ellenőrzés: $h(x) = x^2 – x + 0,5$ $h(1) = 0,5$; $h(2) = 2,5$; $h(3) = 6,5$; $h(4) = 12,5$ A 0,5; 6,5; 12,5 számok valóban egy (6 differenciájú) számtani sorozat szomszédos tagjai, a 0,5; 2,5; 12,5 számok pedig valóban egy (5 hányadosú) mértani sorozat szomszédos tagjai.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	