ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

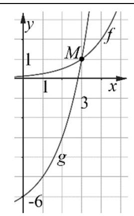
1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

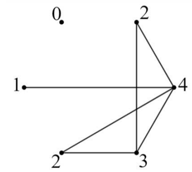
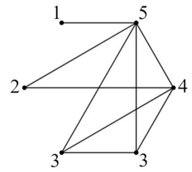
6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
(A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt $x > -4$ és) $x > 2$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
$3 = \log_2 8$	1 pont	
(A logaritmusok összegére vonatkozó azonosságot felhasználva) $\log_2(8x-16) = \log_2(2x+8)$.	1 pont	
(A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $8x - 16 = 2x + 8$.	1 pont	
$x = 4$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy (az értelmezési tartományon) ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b) első megoldás		
A megoldandó egyenlet: $2^{x-3} = 2^x - 7$.	1 pont	
$\dfrac{2^x}{8} = 2^x - 7$	1 pont	
$2^x = 8$	1 pont	
(Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) a metszéspont első koordinátája $x = 3$,	1 pont	
második koordinátája $y = (f(3) = g(3) =)\ 1$. (Tehát a metszéspont az $M(3;\ 1)$ pont.)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. b) második megoldás		
Az f függvény ábrázolása.	2 pont	
A g függvény ábrázolása ugyanabban a koordinátarendszerben.	1 pont	
A függvények grafikonjai az $M(3;\ 1)$ pontban metszik egymást. (Más közös pont nincs.)	1 pont	
A leolvasott értékek ellenőrzése behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. c)		
(Tekinthetjük a hat embert egy hatpontú gráf pontjainak, a kézfogásokat pedig a gráf éleinek.) (Egy 6 pontú egyszerű gráfban nem lehet egyszerre 0 és 5 fokszámú pont, ezért) a gráfban az öt különböző fokszám 0; 1; 2; 3; 4, vagy 1; 2; 3; 4; 5 lehet csak.	2 pont	
(Ha a gráf öt pontjának fokszáma 0; 1; 2; 3; 4, akkor a 4 fokszámú pontot a 0 fokszámún kívül mindegyik ponttal össze kell kötni. A 3 fokszámú pontot pedig a 0 és az 1 fokszámún kívül mindegyik ponttal össze kell kötni.) Ekkor a hatodik pont fokszáma csak 2 lehet,	1 pont	
tehát az élek (azaz a kézfogások) száma lehet $\left(\dfrac{0+1+2+2+3+4}{2} =\right) 6$.	1 pont	
(Ha a gráf öt pontjának fokszáma 1; 2; 3; 4; 5, akkor az 5 fokszámú pontot mindegyik ponttal össze kell kötni. A 4 fokszámú pontot az 1 fokszámún kívül mindegyik ponttal össze kell kötni. A 3 fokszámú pontot pedig az 1 és a 2 fokszámún kívül mindegyik ponttal össze kell kötni.) Ekkor a hatodik pont fokszáma csak 3 lehet,	1 pont	
tehát az élek (azaz a kézfogások) száma lehet $\left(\dfrac{1+2+3+3+4+5}{2} =\right) 9$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. b) **első megoldás**		
A bajnokságban összesen $\binom{6}{2}=15$ mérkőzést játszanak le.	1 pont	
Ezek közül 3-at $\binom{15}{3}=455$-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset).	1 pont	
A mindhárom mérkőzésen szereplő csapat 6-féle lehet. Ennek a csapatnak az 5 mérkőzéséből 3-at $\binom{5}{3}=10$-féleképpen lehet kiválasztani. A kedvező esetek száma így $6\cdot 10=60$.	2 pont	
Tehát a keresett valószínűség $\frac{60}{455}=\frac{12}{91}\approx 0{,}132$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) **második megoldás**		
Tekinthetjük a csapatokat egy hatpontú gráf pontjainak, a mérkőzéseket pedig a gráf éleinek. Annak a valószínűségét keressük, hogy a hatpontú teljes gráf élei közül hármat véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott három élnek van közös végpontja.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A hatpontú teljes gráfnak $\binom{6}{2}=15$ éle van (a bajnokság mérkőzéseinek száma).	1 pont	
Ezek közül két egymáshoz csatlakozó élt $1\cdot\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$ valószínűséggel választhatunk ki, mivel az első él tetszőleges lehet, a második él pedig az elsőhöz csatlakozó 8 él valamelyike.	1 pont	
Ezután annak a valószínűsége, hogy a harmadik kiválasztott él is az első két él közös végpontjára illeszkedik $\frac{3}{13}$, mert a közös csúcsból kiinduló 5 élből 2-t már korábban kiválasztottunk.	1 pont	
Tehát a keresett valószínűség $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{13}\approx 0{,}132$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. c)		
A h függvény értelmezési tartománya {2; 3; 5; 7}.	1 pont	
(A h függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért létezik inverzfüggvénye.) A h függvény értékkészlete megegyezik az inverzfüggvényének értelmezési tartományával.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A h függvény inverzének értelmezési tartománya: {0,5; 1; 4; 16}.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. a)		
Egy olyan megfelelő szám van, amely nem tartalmaz 0 számjegyet (1111111).	1 pont	
Ha a szám egy 0 számjegyet tartalmaz, akkor az a legnagyobb helyiértéken kívül bárhol lehet, tehát 6 ilyen szám van.	1 pont	
Ha a szám két 0 számjegyet tartalmaz, akkor ezek a legnagyobb helyiértéken kívül bárhol lehetnek, így helyüket $\binom{6}{2}=15$-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Összesen tehát (1 + 6 + 15 =) 22 megfelelő szám van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha rendezetten felsorolja a megfelelő számokat, és ez alapján helyesen válaszol.

2. b) **első megoldás**		
(A H-nak 9 eleme van.) $\binom{7}{3}=35$ olyan négyelemű részhalmaza van H-nak, amelynek az 1 eleme, de a 2 nem.	1 pont	$\binom{8}{3}=56$ *olyan négyelemű részhalmaza van H-nak, amelynek eleme az 1.*
Ugyanennyi olyan négyelemű részhalmaza van H-nak, amelynek a 2 eleme, de az 1 nem.	1 pont	*Ugyanennyi olyan négyelemű részhalmaz van, amelynek eleme a 2.*
$\binom{7}{2}=21$ olyan négyelemű részhalmaza van H-nak, amelynek az 1 és a 2 is eleme.	1 pont	
Összesen tehát (35 + 35 + 21 =) 91 megfelelő részhalmaz van.	1 pont	*(Logikai szitát alkalmazva kapjuk, hogy) a megfelelő részhalmazok száma* (56 + 56 – 21 =) 91.
Összesen:	**4 pont**	

2. b) **második megoldás**		
(A H-nak 9 eleme van.) $\binom{8}{3}=56$ olyan négyelemű részhalmaza van H-nak, amelynek eleme az 1.	1 pont	
Ezeken kívül megfelelőek azok a négyelemű részhalmazok is, amelyeknek az 1 nem eleme, de a 2 igen. Ezeknek a száma $\binom{7}{3}=35$.	2 pont	
Összesen tehát (56 + 35 =) 91 megfelelő részhalmaz van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. b) **harmadik megoldás**		
Komplementer módszerrel határozzuk meg a megfelelő részhalmazok számát.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A H-nak 9 eleme van.) Összesen $\binom{9}{4}=126$ négyelemű részhalmaza van H-nak.	1 pont	
$\binom{7}{4}=35$ olyan négyelemű részhalmaza van H-nak, amelynek sem az 1, sem a 2 nem eleme.	1 pont	
Összesen tehát (126 – 35 =) 91 megfelelő részhalmaz van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. c)		
Az állítás megfordítása: „Ha $A \cap B = \varnothing$, akkor $A = \overline{B}$."	1 pont	
A megfordítás hamis.	1 pont	
Például $A = \{1\}$ és $B = \{2\}$ esetén a két halmaz metszete üres, de $A \neq \overline{B}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. c)		
(Az 53-at két négyzetszám összegére kell bontani.) 0 + 53 = 1 + 52 = **4 + 49** = 9 + 44 = 16 + 37 = 25 + 28, tehát ez a két négyzetszám csak a 4 és a 49 lehet, melyek (valamilyen sorrendben) a keresett pontok két koordinátájának négyzetei.	2 pont	**49 + 4** = 36 + 17
Így a kör egyenletében szereplő x helyére 4 különböző értéket helyettesíthetünk (2, –2, 7, –7).	1 pont	(2; 7), (2; –7), (–2; 7), (–2; –7), (7; 2), (7; –2), (–7; 2), (–7; –2),
Ezek mindegyikéhez két-két y érték tartozik.	1 pont	
Tehát összesen 8 ilyen pont van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

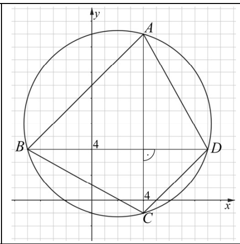
Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül felsorolja mind a 8 megfelelő pontot, és ez alapján helyesen válaszol, akkor ezért 3 pontot kapjon. További 2 pont jár annak indoklásáért, hogy több ilyen pont nincs.

9. a)		
A k pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{k(k-1)}{2}$. A $2k$ pontú gráf éleinek száma $\frac{2k(2k-1)}{2}$.	1 pont*	
$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{2k(2k-1)}{2}=697$	1 pont*	
$5k^2-3k-1394=0$	1 pont	
$k=-16{,}4$ nem megoldás.	1 pont	
$k = 17$ megoldás (és ez megfelel a feladat feltételeinek).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A $3k$ pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{3k(3k-1)}{2}$. Ezen pontok között $2k\cdot k$ pont nincs összekötve.	1 pont	
$\frac{3k(3k-1)}{2}-2k^2=697$	1 pont	

A derékszögű *BMC* háromszögben az ábra jelölése alapján $\operatorname{tg}\beta' = \left(\frac{CM}{BM} = \right)\frac{5}{9}$,	1 pont	
amiből β’ ≈ 29,05°.	1 pont	
β = β’ + 45° ≈ 74,05°.	1 pont	
Így a húrtrapéz hegyesszögei 74,05°-osak, tompaszögei pedig 180° – 74,05° = 105,95°-osak.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. b) harmadik megoldás		
(A húrtrapéz *AC* és *BD* átlói párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel, így merőlegesek egymásra.) Emiatt a húrtrapéz területe az átlók szorzatának fele: $t = \frac{14^2}{2} = 98$.	1 pont	
Az alapok hossza (például a két pont távolságára vonatkozó képlettel) $AB = 9\sqrt{2}$ és $CD = 5\sqrt{2}$.	1 pont	
Így $t = \frac{(9\sqrt{2}+5\sqrt{2})\cdot m}{2} = 98$,	1 pont	
amiből $m = 7\sqrt{2}$ (≈ 9,90).	1 pont	
A húrtrapéz szárának hossza $BC = \sqrt{106}$.	1 pont	
Az *ABC* háromszögben koszinusztétel a β szögre: $\cos\beta = \frac{(9\sqrt{2})^2 + (\sqrt{106})^2 - 14^2}{2\cdot 9\sqrt{2}\cdot\sqrt{106}} = \frac{2}{\sqrt{53}}$ (≈ 0,2747),	1 pont	
amiből β ≈ 74,05°.	1 pont	
Így a húrtrapéz szögei: $\alpha = \beta \approx 74{,}05°$, $\gamma = \delta = 180° - \beta \approx 105{,}95°$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések: 1. A magasság kiszámításáért járó pontokat az alábbi gondolatmenet alkalmazása esetén is megkaphatja a vizsgázó:
az AB egyenes egyenletének felírása: $y = x + 9$ *(1 pont),*
a C pontra illeszkedő, az alapokra merőleges egyenes egyenletének felírása: $y = -x + 3$ *(1 pont),*
a két egyenesek metszéspontjának (a magasság talppontjának) kiszámítása: $T(-3; 6)$ *(1 pont),*
a magasság (a TC szakasz hosszának) kiszámítása: $m = 7\sqrt{2}$ *(1 pont).*
2. A $\cos\beta$ *értéke a* $\overrightarrow{BA}(9; 9)$ és a $\overrightarrow{BC}(9; -5)$ *skaláris szorzata segítségével is kiszámítható:*
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 9\cdot 9 + 9\cdot(-5) = 9\sqrt{2}\cdot\sqrt{106}\cdot\cos\beta$, *ahonnan* $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{53}}$ *(2 pont).*

3. a) első megoldás		
Az összes lehetséges (egyenlő valószínűségű) kimenetel száma 6^5 (=7776).	1 pont	
A *Sor* számkombináció 2-féle lehet (1-2-3-4-5 vagy 2-3-4-5-6).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mindkettő 5! (= 120)-féleképpen lehetséges.	1 pont	
Így a kedvező kimenetelek száma 2·5! (= 240).	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát $\frac{240}{7776}\left(=\frac{5}{162}\right) \approx 0{,}031$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

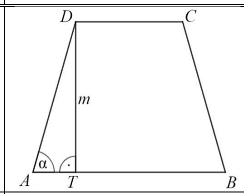
3. a) második megoldás		
A *Sor* számkombináció 2-féle lehet (1-2-3-4-5 vagy 2-3-4-5-6).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Feltehetjük, hogy az öt kockával egyesével dobunk. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a játékos 1-2-3-4-5 számkombinációt dob valamilyen sorrendben $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{120}{7776}$. (Elsőre 5-félét, másodikra 4-félét dobhatunk, stb.)	2 pont	
Ugyanennyi annak a valószínűsége, hogy a játékos 2-3-4-5-6 számkombinációt dob valamilyen sorrendben.	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát $\frac{240}{7776}\left(=\frac{5}{162}\right) \approx 0{,}031$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

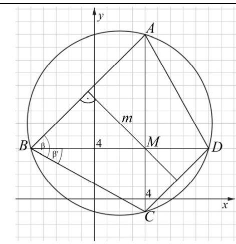
3. b) első megoldás		
A két kockával összesen 36-félét dobhatunk.	1 pont	
(Ha az újra felvett két kockával két egyforma számot dob a játékos, akkor két 3-as esetén *Royal*, különben *Full House* számkombinációt kap. Tehát) 6-féle kedvező dobás lehetséges.	1 pont	$P(Full\ House)=\frac{5}{36}$ $P(Royal)=\frac{1}{36}$
A kérdezett valószínűség tehát $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.	1 pont	$\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$
Összesen:	**3 pont**	

3. b) második megoldás		
Feltehetjük, hogy a két kockával egyesével dob a játékos. Bármit is dob az első kockával, a második kockával ugyanazt kell dobnia (3-as esetén *Royal*, más esetben *Full House* lesz az eredmény).	2 pont	
A kérdezett valószínűség tehát $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. c)		
A komplementer esemény (egyik dobás sem 6-os) valószínűsége $(1-p)^2$.	1 pont	*Pontosan az egyik 6-os vagy mindkettő 6-os:* $\binom{2}{1}p(1-p)+p^2=0,64$.
Így $(1-p)^2=(1-0,64=)\,0,36$.	1 pont	
$1-p=0,6$ (mert $p\le 1$)	1 pont	$p^2-2p+0,64=0$
$p=0,4$	1 pont	*Ennek az* 1*-nél nem nagyobb gyöke* $p=0,4$ (*a másik* 1,6).
Összesen:	**4 pont**	

8. a)		
A kör egyenletét átalakítva: $(x-2)^2+(y-6)^2=53$.	1 pont	
A kör sugara $\sqrt{53}$,	1 pont	
a kör középpontja (2; 6).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b) első megoldás		
Az alapok hossza (például a két pont távolságára vonatkozó képlettel) $AB=9\sqrt{2}$ és $CD=5\sqrt{2}$. A szárak hossza $AD=BC=\sqrt{106}$.	2 pont	
Merőlegest állítunk *D*-ből *AB*-re, a talppontot jelölje *T*. (Az így létrejött *ATD* derékszögű háromszög *TD* befogójának hossza a húrtrapéz *m* magassága, míg e befogóval szemközti α szöge a húrtrapéz alapon fekvő szöge.)	1 pont	
(A húrtrapéz tengelyes szimmetriája miatt:) $AT=\frac{1}{2}\cdot(AB-CD)=2\sqrt{2}$.	1 pont	
$m=\sqrt{AD^2-AT^2}=\sqrt{106-8}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$ ($\approx 9,90$)	1 pont	
$\cos\alpha=\left(\frac{AT}{AD}=\right)\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{106}}$ ($\approx 0,2747$),	1 pont	$\operatorname{tg}\alpha=\frac{DT}{AT}=\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=3,5$
amiből $\alpha\approx 74,05°$.	1 pont	
Így a húrtrapéz hegyesszögei 74,05°-osak, tompaszögei pedig 180° – 74,05° = 105,95°-osak.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. b) második megoldás		
(Az átlók *M*(4; 4) metszéspontja a rajta átmenő *m* magasságot két részre bontja.) Ezek az *AMB* és a *CMD* egyenlőszárú derékszögű háromszögek átfogóhoz tartozó magasságai.	1 pont	
Az *AMB* és a *CMD* egyenlőszárú derékszögű háromszögekben az átfogóhoz tartozó magasság a befogók $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szerese, így hosszuk $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ és $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.	2 pont	
Tehát $m=7\sqrt{2}$ ($\approx 9,90$).	1 pont	

7. c) első megoldás		
Jelölje a kúp alapkörének sugarát r, magasságát m, ekkor $r^2+m^2=1{,}8^2$, ahonnan $r^2=3{,}24-m^2$.	1 pont	
A forgáskúp térfogata: $\frac{r^2\pi m}{3}=\frac{(3{,}24-m^2)\cdot\pi m}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot(3{,}24m-m^3)$.	1 pont	
A V: $]0;\,1{,}8[\,\to\mathbf{R}$; $V(m)=\frac{\pi}{3}\cdot(3{,}24m-m^3)$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja nulla.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$V'(m)=\frac{\pi}{3}\cdot(3{,}24-3m^2)=0$	1 pont	
Innen ($m>0$ miatt) $m=\sqrt{1{,}08}\approx 1{,}04$ m.	1 pont	
Az $m=\sqrt{1{,}08}$ helyen a deriváltfüggvény pozitívból negatívba megy át, ezért itt V-nek (abszolút) maximuma van.	1 pont	$V''(m)=-2\pi m$ $V''(1{,}04)<0$
Ekkor r $(=\sqrt{3{,}24-1{,}08}=\sqrt{2{,}16})\approx 1{,}47$ m,	1 pont	
a maximális térfogat pedig kb. 2,35 m^3.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. c) második megoldás		
Jelölje az alkotók és az alaplap hajlásszögét (radiánban) α. Ekkor a forgáskúp alapkörének sugara $1{,}8\cos\alpha$, magassága $1{,}8\sin\alpha$,	1 pont	
térfogata pedig $\frac{1{,}8^3\cdot\pi\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{3}$.	1 pont	
A V: $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbf{R}$; $V(\alpha)=\frac{1{,}8^3\cdot\pi\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{3}$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja nulla.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$V'(\alpha)=\frac{1{,}8^3\cdot\pi\cdot(\cos^3\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha)}{3}=0$	1 pont	
Innen $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz $\alpha\approx 0{,}6155$ ($\approx 35{,}26°$), amelyből m $(=1{,}8\sin\alpha)\approx 1{,}04$ m.	1 pont	
$V''(\alpha)=\frac{1{,}8^3\cdot\pi\cdot\sin\alpha\cdot(-7\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha)}{3}$ $V''(0{,}6155)<0$, így ez valóban (abszolút) maximumhely.	1 pont	
Ekkor r $(=1{,}8\cos\alpha)\approx 1{,}47$ m,	1 pont	
a maximális térfogat pedig kb. 2,35 m^3.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor a c) feladatban ezért összesen 1 pontot veszítsen.

4. a) első megoldás		
Az ABC háromszög területe a négyzet területének fele.	1 pont	
Az AFC háromszög területe fele az ABC háromszög területének (C-hez tartozó magasságuk közös, alapjaik aránya $1:2$).	1 pont	
Az AFQ háromszög területe háromnegyede az AFC háromszög területének (F-ből induló magasságuk közös, alapjaik aránya $9:12=3:4$).	1 pont	
Az AFQ háromszög területe így $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$ része az $ABCD$ négyzet területének.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

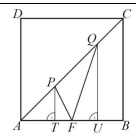
4. a) második megoldás		
Az ABC háromszög területe a négyzet területének fele.	1 pont	
$\frac{AF}{AB}=\frac{1}{2}$, $\frac{AQ}{AC}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$	1 pont	
$T_{AFQ\Delta}=\frac{AF\cdot AQ\cdot\sin 45°}{2}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot\frac{3}{4}AC\cdot\sin 45°}{2}=$ $=\frac{3}{8}\cdot\frac{AB\cdot AC\cdot\sin 45°}{2}=\frac{3}{8}\cdot T_{ABC\Delta}=\frac{3}{8}\cdot\frac{T_{ABCD}}{2}=\frac{3}{16}\cdot T_{ABCD}$	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. a) harmadik megoldás		
A négyzet oldalát jelölje x. Ekkor $AF=\frac{x}{2}$.	1 pont	*Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a négyzet oldala egységnyi, és így $AF=\frac{1}{2}$.*
Az AFQ háromszög AF oldalhoz tartozó magassága a Q-ból az AB-re bocsátott merőleges szakasz. Mivel Q az AC szakasz C-hez közelebbi negyedelőpontja, ezért ennek a magasságnak a hossza (a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt) $\frac{3}{4}x$.	1 pont	$m=\frac{3}{4}$
$T_{AFQ\Delta}=\frac{\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{4}x}{2}=\frac{3}{16}x^2$	1 pont	$T_{AFQ\Delta}=\frac{3}{16}$
Mivel az $ABCD$ négyzet területe x^2, ezért az AFQ háromszög területe annak $\frac{3}{16}$ része.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a négyzet oldalhosszának egy konkrét értékével dolgozik, de nem említi, hogy ez nem megy az általánosság rovására, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

4. b) első megoldás		
$AF = 12$, $AC = 24\sqrt{2}$, $AP = 8\sqrt{2}$, $AQ = 18\sqrt{2}$ A PAF szög nagysága 45°.	2 pont	
A PAF háromszögben koszinusztétellel: $FP^2 = (8\sqrt{2})^2 + 12^2 - 2 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \cos 45° = 80$.	1 pont	
Tehát $FP = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ valóban.	1 pont	
Az AFQ háromszögben koszinusztétellel: $QF^2 = (18\sqrt{2})^2 + 12^2 - 2 \cdot 18\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \cos 45° = 360$.	1 pont	
Tehát $QF = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megoldásában közelítő értékeket is felhasznál, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

4. b) második megoldás		
Merőlegest bocsátunk P-ből és Q-ból AB-re, a talppontokat jelölje rendre T és U. APT, AQU és ACB egyenlőszárú derékszögű háromszögek hasonlóságából adódik, hogy $AT = TP = 8$, valamint $AU = UQ = 18$.	2 pont	
PTF derékszögű háromszögben $TF = (12 - 8 =)\ 4$. Pitagorasz-tétellel: $FP = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ valóban.	2 pont	
QFU derékszögű háromszögben $FU = (18 - 12 =)\ 6$. Pitagorasz-tétellel: $QF = \sqrt{18^2 + 6^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$ valóban.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. c) első megoldás		
A két háromszög Q-nál levő szöge közös.	1 pont	
A szöget közrefogó oldalaik aránya: $\frac{AQ}{QF} = \frac{18\sqrt{2}}{6\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$, illetve $\frac{QF}{PQ} = \frac{6\sqrt{10}}{10\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.	2 pont	
Mivel a két háromszögben egy szög és a szöget közrefogó két oldal aránya megegyezik, ezért a két háromszög valóban hasonló.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. c)		
Két különböző pozitív valós szám **mértani** közepe mindig nagyobb, mint a **harmonikus** közepe, de kisebb, mint a **számtani** közepe.	2 pont	*1 pont jár, ha csak az egyik reláció helyes.*
Összesen:	**2 pont**	

7. a)		
Egy homokszem térfogata $\frac{4 \cdot 0{,}1^3 \cdot \pi}{3} \approx 0{,}00419\ \text{mm}^3$.	1 pont	
A homok a pohár űrtartalmának 60%-át tölti ki. $0{,}6 \cdot 2\ \text{dl} = 1{,}2\ \text{dl} = 0{,}12\ \text{dm}^3 = 120\,000\ \text{mm}^3$	2 pont	
A „tele” 2 dl-es pohárban kb. $\frac{120\,000}{0{,}00419} \approx 28\,639\,618$,	1 pont	
azaz kerekítve 29 millió homokszem található.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

7. b)		
A homokkupac alapkörének sugara 1,55 m,	1 pont	
magassága $\sqrt{1{,}8^2 - 1{,}55^2} \approx 0{,}915$ m,	1 pont	
térfogata $\frac{1{,}55^2 \cdot \pi \cdot 0{,}915}{3} \approx 2{,}3\ \text{m}^3$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Dalma a két kört $\frac{5,25}{v}+\frac{5,25}{v-3,5}$ óra alatt tette meg, átlagsebessége pedig 12 km/h volt,	1 pont	*Ez a 3 pont akkor is jár, ha a vizsgázó tanult ismeretként hivatkozik arra, hogy ebben az esetben az átlagsebesség a két kör átlagsebességének a harmonikus közepe, és így a* $\frac{2}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v-3,5}}=12$ *egyenletből indulva helyesen számol.*
így megoldandó a $\frac{10,5}{\frac{5,25}{v}+\frac{5,25}{v-3,5}}=12$ egyenlet.	1 pont	
Az egyenlet bal oldalát átalakítva: $\frac{10,5}{\frac{5,25(v-3,5)+5,25v}{v(v-3,5)}}=\frac{10,5v(v-3,5)}{10,5v-18,375}$.	1 pont	
Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva az átalakított bal oldal nevezőjével: $10,5v^2-36,75v=126v-220,5$, amelyből rendezés és egyszerűsítés után $v^2-15,5v+21=0$ adódik.	1 pont	

6. b) **második megoldás**		
Ha 12 km/h Dalma kétkörös átlagsebessége, akkor a két kört $\frac{10,5}{12}=0,875$ óra (= 52,5 perc) alatt tette meg.	1 pont	
Az első kör megtételéhez szükséges időt (órában) jelölje *t*, ekkor a második kört 0,875 – *t* óra alatt tette meg.	1 pont	
Így Dalma átlagsebessége a két körben rendre $\frac{5,25}{t}$, illetve $\frac{5,25}{0,875-t}$ volt.	1 pont	
A két kör átlagsebessége közti összefüggés szerint $\frac{5,25}{t}-3,5=\frac{5,25}{0,875-t}$ teljesül.	1 pont	
Beszorozva a törtek nevezőivel: $5,25(0,875-t)-3,5t(0,875-t)=5,25t$.	1 pont	
A kijelölt műveleteket elvégezve és rendezve $3,5t^2-13,5625t+4,59375=0$ adódik.	1 pont	$112t^2-434t+147=0$
Ennek az egyenletnek a gyökei 3,5 és $\left(\frac{3}{8}=\right)0,375$.	1 pont	
A $t=3,5$ nem megoldás, mert ekkor a második kör átlagsebességére negatív érték adódna.	1 pont	
Dalma átlagsebessége az első körben $\frac{5,25}{0,375}=14$ km/h, a másodikban $\frac{5,25}{0,5}=10,5$ km/h volt (amely megfelel a feladat feltételeinek).	1 pont	*Dalma az első kört* 0,375 óra = 22,5 perc, *a második kört pedig* 0,5 óra = 30 perc *alatt tette meg.*
Összesen:	**9 pont**	

4. c) **második megoldás**		
Az *AFQ* háromszög oldalainak aránya: $AF:FQ:QA=12:6\sqrt{10}:18\sqrt{2}=2:\sqrt{10}:3\sqrt{2}$.	1 pont	
Az *FPQ* háromszög oldalainak aránya: $FP:PQ:QF=4\sqrt{5}:10\sqrt{2}:6\sqrt{10}=2:\sqrt{10}:3\sqrt{2}$.	2 pont	
Mivel a két háromszögben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért a két háromszög valóban hasonló.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. c) **harmadik megoldás**		
Koszinusztétellel meghatározzuk a *PFQ* szöget. $\cos PFQ\sphericalangle=\frac{QF^2+FP^2-PQ^2}{2\cdot QF\cdot FP}=\frac{360+80-200}{2\cdot 6\sqrt{10}\cdot 4\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	2 pont	
A *PFQ* szög ezért 45°-os.	1 pont	
Mivel a két háromszögben két szög megegyezik (*Q*-nál levő szögük közös, és van egy 45°-os szögük), ezért a két háromszög valóban hasonló.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II.

5. a) **első megoldás**		
$a_n=\frac{n+4}{n}=1+\frac{4}{n}$	1 pont	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{4}{n}}{\frac{n}{n}}\right)=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=\right)1+0=1$	2 pont	$=\frac{1+0}{1}=1$
Összesen:	**3 pont**	

5. a) **második megoldás**		
Megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{n}=1$.	1 pont	
Minden pozitív ε-ra $\left\lvert\frac{n+4}{n}-1\right\rvert<\varepsilon$ teljesül, ha $n>\frac{4}{\varepsilon}$, ami a határérték definíciója szerint azt jelenti, hogy az $\{a_n\}$ határértéke 1.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b) első megoldás		
$\left(a_n = \frac{n+4}{n} = 1 + \frac{4}{n}\right)$ (Az $\{n\}$ szigorúan monoton nő, ezért) az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ szigorúan monoton csökken,	1 pont	
tehát a $\left\{\frac{4}{n}\right\}$ is szigorúan monoton csökken.	1 pont	
Vagyis az $\{a_n\}$ valóban szigorúan monoton csökken.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b) második megoldás		
$a_{n+1} - a_n = \left(1+\frac{4}{n+1}\right) - \left(1+\frac{4}{n}\right) = \frac{4}{n+1} - \frac{4}{n} =$	1 pont	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+5}{n+1}}{\frac{n+4}{n}} =$
$= \frac{4n-4(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-4}{n(n+1)}$	1 pont	$= \frac{n^2+5n}{n^2+5n+4}$
($n > 0$ miatt $n(n+1) > 0$, tehát) $\frac{-4}{n(n+1)} < 0$, vagyis a sorozat valóban szigorúan monoton csökken.	1 pont	*(Mivel $n > 0$, ezért) a tört értéke kisebb 1-nél, tehát a sorozat valóban szigorúan monoton csökken.*
Összesen:	**3 pont**	

5. c)		
A törtet egyszerűsítve: $(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) = 24(n+1)(n+3)$.	1 pont	
(Mivel $n > 0$, ezért) oszthatjuk az egyenletet $(n+1)(n+3)$-mal: $(n+4)(n+2) = 24$.	1 pont	
$n^2 + 6n - 16 = 0$	1 pont	
Ennek a pozitív megoldása $n = 2$. (Az egyenlet másik gyöke $n = -8$.)	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. d)		
$24(x+1)(x+3) = 24x^2 + 96x + 72$	1 pont	
Az f függvény (amelynek grafikonja egy felfelé nyíló parabola) zérushelyei –1 és –3. $\int_{-3}^{-1}(24x^2+96x+72)\,dx =$	1 pont	

$= \left[8x^3 + 48x^2 + 72x\right]_{-3}^{-1} =$	1 pont	
$= (-8 + 48 - 72) - (-216 + 432 - 216) = -32 - 0 =$	1 pont	
$= -32$, és mivel a síkidom az x-tengely „alatt” van, ezért a területe 32 területegység.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. a)		
Az egyes napokon végzett felülések száma egy olyan $\{a_n\}$ számtani sorozat egymást követő tagjai, melynek differenciája 5, és az első 14 tagjának összege 1001.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\frac{(2a_1+(n-1)d)\cdot n}{2} = \frac{(2a_1+13\cdot 5)\cdot 14}{2} = 1001$	1 pont	
$2a_1 + 13\cdot 5 = 143$	1 pont	
$a_1 = 39$	1 pont	
$a_{14} = 39 + 13\cdot 5 = 104$ (Tehát az első napon 39, az utolsón pedig 104 felülést végzett Domi, ami megfelel a feladat feltételeinek.)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. b) első megoldás		
Jelölje Dalma átlagsebességét (km/h-ban) az első körben v. Ekkor a második körben az átlagsebessége $v - 3,5$.	1 pont	
Dalma az első kört $\frac{5,25}{v}$ óra, a második kört $\frac{5,25}{v-3,5}$ óra alatt tette meg.	1 pont	
Ha 12 km/h Dalma kétkörös átlagsebessége, akkor a két kört $\frac{10,5}{12} = 0,875$ óra (= 52,5 perc) alatt tette meg.	1 pont*	
így megoldandó az $\frac{5,25}{v} + \frac{5,25}{v-3,5} = 0,875$ egyenlet.	1 pont*	$\frac{1}{v} + \frac{1}{v-3,5} = \frac{1}{6}$
Megszorozva a törtek nevezőivel: $5,25(v-3,5) + 5,25v = 0,875v(v-3,5)$.	1 pont*	$6(v-3,5) + 6v = v(v-3,5)$
A kijelölt műveleteket elvégezve és rendezve $0,875v^2 - 13,5625v + 18,375 = 0$ adódik.	1 pont*	$v^2 - 15,5v + 21 = 0$
Ennek az egyenletnek a gyökei 14 és 1,5.	1 pont	
A $v = 1,5$ nem megoldás, mert ekkor a második kör átlagsebességére negatív érték adódna.	1 pont	
Dalma átlagsebessége az első körben tehát 14 km/h, a másodikban 10,5 km/h volt (amely megfelel a feladat feltételeinek).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	