
ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. október 15.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2024. október 15. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. **a)** Legyen a és b két pozitív valós szám. Határozza meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

„Ha $a > 6$ és $b > 8$, akkor a és b számtani közepe nagyobb 7-nél.”

b) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét is! Válaszát indokolja!

c) Határozza meg az x pozitív valós szám értékét úgy, hogy a 7-nek és az x-nek a harmonikus közepe 10 legyen!

d) Tudjuk, hogy az $(A \wedge \neg B) \wedge (A \vee \neg C)$ kijelentés logikai értéke igaz.
Mit lehet tudni az A, B és C kijelentések logikai értékéről? Tegyen X-et az alábbi táblázat megfelelő celláiba! (Válaszait itt nem kell indokolnia.)

	biztosan igaz	biztosan hamis	nem lehet eldönteni
A			
B			
C			

a)	2 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
d)	3 pont	
Ö.:	12 pont	

2. Amikor egy csésze forró folyadékot beviszünk egy szobába, akkor a folyadék hőmérsékletének változását jó közelítéssel – Newton lehűlési törvénye szerint – a következő képlet írja le: $T(t) = H + (T(0) - H) \cdot 2^{ct}$.

A képletben $T(t)$ a folyadék hőmérséklete a vizsgálat kezdetétől számított t perc elteltével, H a szoba (állandónak tekinthető) hőmérséklete, $T(0)$ a folyadék kezdeti hőmérséklete ($T(0) > H$), c pedig a lehűlő folyadékot jellemző konstans. (A hőmérsékletet °C-ban mérjük.)

Egy csésze 75 °C-os kávét beviszünk egy 25 °C hőmérsékletű szobába. A kávéra jellemző c érték –0,209.

a) Számítsa ki, hogy negyedóra múlva milyen hőmérsékletű lesz a kávé!

b) A vizsgálat kezdetétől számítva mennyi idő múlva hűl le a kávé 25,5 °C hőmérsékletűre?

Egy csésze 85 °C-os hőmérsékletű kávét beviszünk egy ismeretlen hőmérsékletű szobába. 10 perc alatt a kávé 40 °C-ra hűl le.

c) Határozza meg a szoba hőmérsékletét!

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

3. **a)** Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\left|2\sin^2 x + 7\sin x + 1\right| = 5$$

b) Határozza meg az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x$ függvény grafikonja, az $x = \frac{\pi}{6}$ és az $x = \frac{5\pi}{6}$ egyenletű egyenesek, valamint az x tengely által közrezárt korlátos síkidom területét!

a)	8 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

4. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek a, b és c oldalaira teljesül, hogy (centiméterben mérve) $b = a + 4$ és $c = a + 8$.

a) Adott egy ilyen tulajdonságú háromszög, melynek legnagyobb szöge 120°. Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!

b) Adott egy ilyen tulajdonságú háromszög, melynek leghosszabb oldala 24 cm hosszú. Határozza meg a háromszög területét!

c) Igazolja, hogy minden ilyen tulajdonságú háromszög kerülete nagyobb, mint 24 cm!

a)	6 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	15 pont	

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy szabályos dobókockával hatszor dobtunk. A dobott számok monoton növekvő sorrendben: 1, 2, 2, 3, 3, 3.

a) Határozza meg a dobott számok átlagát és szórását!

b) Hány olyan különböző dobássorozat van, amely egy darab 1-esből, két darab 2-esből és három darab 3-asból áll?

Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk.

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két dobott szám szorzata 2-vel osztható lesz, de 4-gyel nem!

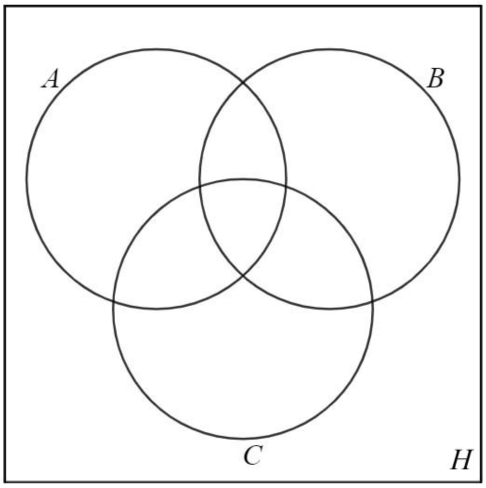
Egy kék és egy zöld dobókockával dobunk, a dobás kimenetele egy számpár. Jelölje (k, z) a dobásnak azt a kimenetelét, amikor a kék kockával dobott szám k, a zöld kockával dobott szám pedig z.

Legyen a H alaphalmaz a dobás kimeneteleként megkapható összes lehetséges (k, z) számpár halmaza. Az A, B és C részhalmazokat a következőképpen definiáljuk:

$A = \{(k, z) \mid \text{a } k + z \text{ összeg prím}\}$

$B = \{(k, z) \mid \text{a } k \cdot z \text{ szorzat prím}\}$

$C = \{(k, z) \mid k = z\}$

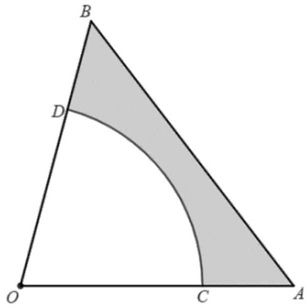


d) Satírozással jelölje a Venn-diagramon a H-nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz! A Venn-diagram minden egyes további tartományába írjon egy-egy megfelelő számpárt! Válaszát itt nem kell indokolnia.

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
d)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Az *OAB* egyenlőszárú háromszög *OA* és *OB* szárai 12 cm hosszúak, *AOB* szöge 75°. Az *OA* szakasz *C* pontját és az *OB* szakasz *D* pontját (az ábra szerint) egy *O* középpontú, 8 cm sugarú körív köti össze.

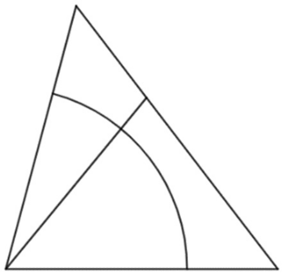


a) Határozza meg a szürkére színezett tartomány területét és kerületét!

Az *OAB* háromszöget megforgatjuk az *OA* oldal egyenese körül.

b) Határozza meg az így keletkező forgástest térfogatát!

Az ábrán látható négy tartományt piros, kék és zöld színnel színezzük ki úgy, hogy egy tartományhoz egy színt használunk.

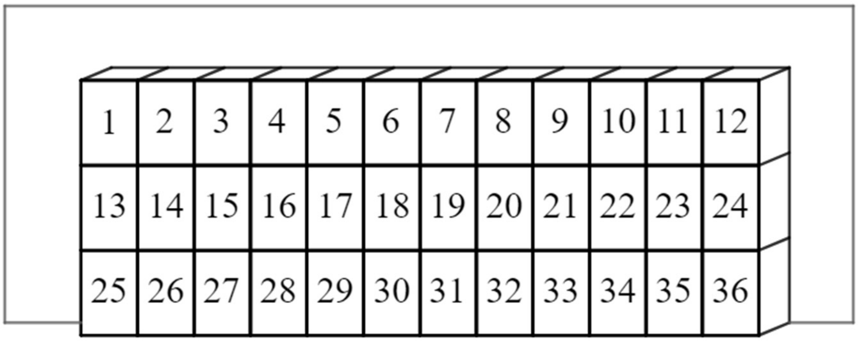


c) Hányféleképpen színezhetjük ki a négy tartományt, ha szomszédos tartományok nem lehetnek azonos színűek?
(Két tartomány szomszédos, ha van közös határvonaluk. A színezéshez nem szükséges mindhárom színt felhasználni.)

a)	8 pont	
b)	4 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Alízék osztálytermében az egyik fal mellett három sorban 12-12, összesen 36 szekrény található a diákok számára, 1-től 36-ig megszámozva. Az osztályba 33-an járnak. Tanév elején minden diák – sorsolás útján – egy-egy szekrényt kap. Három szekrény így a sorsolás után üresen marad.



a) Legyen az *A* esemény az, hogy a három üresen maradó szekrény egy sorban található, a *B* esemény pedig az, hogy a három üresen maradó szekrény három különböző sorban található. Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége?

A szekrények téglatest alakúak. Egy-egy szekrény belseje 20 cm széles, 35 cm magas és 30 cm mély.

b) Határozza meg a leghosszabb egyenes pálca hosszát, ami elhelyezhető a szekrényben! (A pálca vastagságától eltekinthetünk.)

Alíz, Boglárka, Csenge és Dorka szekrénykulcsai összekeveredtek, és a négy lány véletlenszerűen osztja el egymás közt a négy kulcsot.

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy legalább két lány a saját kulcsát kapja vissza!

a)	6 pont	
b)	3 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy növényfaj ezer darab magjának tömegét grammban megadva kapjuk az úgynevezett **ezermagtömeget**. Egy bizonyos fajta zab ezermagtömege 35 gramm.

a) Kb. hány darab magot tartalmaz egy tonna zabmag ebből a fajtából? Válaszát normálalakban adja meg!

Jancsi nyári diákmunkaként zabhegyezést vállalt Kukutyinban. Tudja, hogy ha a zabhegyező gépbe k kg zabot helyez, akkor a gép $\frac{k^2}{40}+90$ perc alatt végez a zabhegyezéssel. Jancsinak összesen 1000 kg zabot kell kihegyeznie a gép segítségével. Elhatározza, hogy a zabot egyenlő részekre osztva fogja kihegyezni.

b) Hány óra alatt végez Jancsi a zabhegyezéssel, ha 8 egyenlő részre osztja az 1000 kg zabot?

c) Az 1000 kg zabot n egyenlő részre osztjuk ($n \in \mathbf{Z}^+$). Határozza meg n értékét úgy, hogy az 1000 kg zab kihegyezésének ideje minimális legyen! Hány óra ez a minimális idő?

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	10 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy mértani sorozat *n*-edik tagja $a_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$.

a) Határozza meg azt a legkisebb *n* értéket, amelyre $|a_n| < 10^{-7}$ teljesül!

b) Határozza meg a mértani sorozat első 10 tagjának összegét! Válaszát $-\frac{k}{m}$ alakban adja meg, ahol *k* és *m* relatív prímek!

A $\{b_n\}$ sorozat *n*-edik tagja $b_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$.

c) Igazolja, hogy (minden pozitív egész *n*-re) $2b_{n+2} - b_{n+1} - b_n = 0$.

a)	6 pont	
b)	4 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

<table>
<tr><td></td><td rowspan="2">a feladat sorszáma</td><td colspan="4">pontszám</td></tr>
<tr><td></td><td>maximális</td><td>elért</td><td>maximális</td><td>elért</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I. rész</td><td>1.</td><td>12</td><td></td><td rowspan="4">51</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II. rész</td><td></td><td>16</td><td></td><td rowspan="4">64</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">← nem választott feladat</td></tr>
<tr><td colspan="4">Az írásbeli vizsgarész pontszáma</td><td>115</td><td></td></tr>
</table>

dátum

javító tanár

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">pontszáma egész számra kerekítve</td></tr>
<tr><td></td><td>elért</td><td>programba beírt</td></tr>
<tr><td>I. rész</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II. rész</td><td></td><td></td></tr>
</table>

dátum

dátum

javító tanár

jegyző