ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. október 15.

# MATEMATIKA

## EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

## JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**OKTATÁSI HIVATAL**

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

| **9. c)** **harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Kifejezzük $b_n$-nel $b_{n+1}$-et és $b_{n+2}$-t.<br>$b_{n+1}=(b_n-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2=-\frac{1}{2}b_n+3$ | 2 pont | |
| $b_{n+2}=(b_n-2)\cdot\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{2}$ | 2 pont | |
| Így $2b_{n+2}-b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}b_n+3+\frac{1}{2}b_n-3-b_n=$ | 1 pont | |
| $=b_n\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)=0$ valóban teljesül minden $n$-re. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **9. c)** **negyedik megoldás** | | |
|---|---|---|
| A bizonyítandó egyenlőséget átrendezzük:<br>$b_{n+2}=\frac{b_{n+1}+b_n}{2}$. (Vagyis igazolandó, hogy a 3. tagtól kezdve bármely tag az előző két tag számtani közepével egyenlő.) | 1 pont | |
| $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}+2=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+2}{2}$ | 1 pont | |
| A jobb oldalon elvégezve az osztást:<br>$2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}+2=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+1$. | 1 pont | |
| $2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ | 1 pont | |
| $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$-nel osztva: $\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)+1$, ami azonosság. | 1 pont | |
| Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, az eredeti állítást ezzel beláttuk. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |





6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a $\pi$ és az $e$ szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

# I.

| 1. a) | | |
|---|---|---|
| Az állítás igaz. | 1 pont | |
| Helyes indoklás, például: $\frac{a+b}{2} > \frac{6+8}{2} = 7$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 1. b) | | |
|---|---|---|
| A megfordítás: Ha $a$ és $b$ számtani közepe nagyobb 7-nél, akkor $a > 6$ és $b > 8$. | 1 pont | |
| A megfordítás hamis. | 1 pont | |
| Jó ellenpélda (pl. $a = 5$, $b = 11$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 1. c) | | |
|---|---|---|
| (7-nek és $x$-nek a harmonikus közepe $\frac{2}{\frac{1}{7}+\frac{1}{x}}$, így) megoldandó a $\frac{2}{\frac{1}{7}+\frac{1}{x}} = 10$ egyenlet ($x > 0$). | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a harmonikus közép $\frac{2ab}{a+b}$ alakját használja.* |
| $\frac{14x}{x+7} = 10$ | 1 pont | |
| $14x = 10x + 70$ | 1 pont | |
| Innen $x = 17{,}5$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

**1. d)**

| | biztosan igaz | biztosan hamis | nem lehet eldönteni |
|---|---|---|---|
| *A* | X | | |
| *B* | | X | |
| *C* | | | X |

1-1 pont

**Összesen:** **3 pont**

| 2. a) | | |
|---|---|---|
| $T(0) = 75$ °C, $H = 25$ °C, $t = 15$ perc, $c = -0{,}209$ | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.* |
| $T(15) = 25 + (75-25)\cdot 2^{-0{,}209\cdot 15} =$ | 1 pont | |
| $= 25 + 50\cdot 2^{-3{,}135} \approx$ | 1 pont | |
| $\approx 30{,}7$ °C hőmérsékletű lesz a kávé negyedóra múlva. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |





| 9. c) első megoldás | | |
|---|---|---|
| Az explicit alakot felhasználva $2b_{n+2} - b_{n+1} - b_n =$ $= 2\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} + 2\right) - \left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2\right) -$ $-\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} + 2\right) =$ | 2 pont | |
| $= 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{4} + 4 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 -$ $-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} - 2 =$ | 2 pont | |
| $= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\left(4\cdot\frac{1}{4} - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\right) + 4 - 2 - 2 =$ | 1 pont | |
| $= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot(1+1-2) + 0 = 0$ valóban teljesül minden $n$-re. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| 9. c) második megoldás | | |
|---|---|---|
| A $2b_{n+2}$ „konstans része” 4, a $b_{n+1}$ és a $b_n$ konstans része 2, így a konstansok összege a $2b_{n+2} - b_{n+1} - b_n$ kifejezésben $4 - 2 - 2 = 0$. | 2 pont | $b_n = a_n + 2$, *így* $2b_{n+2} - b_{n+1} - b_n =$ $= 2(a_{n+2}+2) - (a_{n+1}+2) -$ $-(a_n + 2) =$ |
| A „nem konstans rész” megegyezik az a) feladatbeli $\{a_n\}$ mértani sorozattal. | 1 pont | $= 2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n$ |
| $2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 2a_n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - a_n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - a_n =$ | 1 pont | |
| $= a_n\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right) = 0$ | 1 pont | |
| Tehát a nem konstans részek összege is 0, így $2b_{n+2} - b_{n+1} - b_n = 0$ valóban teljesül minden $n$-re. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| | | |
|---|---|---|
| (Mivel $n \in \mathbf{Z}^+$, a minimális időt $n = 16$-nál vagy $n = 17$-nél kapjuk.) $f(16) = 3002{,}5$ és $f(17) \approx 3000{,}6$, | 1 pont | |
| így az 1000 kg zab kihegyezésének ideje akkor minimális, ha 17 egyenlő részre osztjuk. | 1 pont | |
| Ekkor a zabhegyezési idő kb. $\left(\frac{3000}{60} = \right)$ 50 óra. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **10 pont** | |

| **9. a)** | | |
|---|---|---|
| Megoldandó a $\left\lvert 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\rvert < 10^{-7}$ egyenlőtlenség, | 1 pont | |
| azaz $\frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-7} \Leftrightarrow 10^7 < 2^{n-1}$. | 1 pont | |
| A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, így | 1 pont | |
| $\log_2 10^7 < n-1$, | 1 pont | |
| azaz $n > \log_2 10^7 + 1 \approx 24{,}3$. | 1 pont | |
| A keresett $n$ érték a 25. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat első 25 tagját észszerű és helyes kerekítésekkel kiszámolja, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.*

| **9. b)** | | |
|---|---|---|
| A sorozat első tagja $a_1 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, | 1 pont | |
| hányadosa $q = -\frac{1}{2}$. | 1 pont | |
| Az első 10 tag összege: $S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} =$ $= (-1)\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{-\frac{1023}{1024}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2046}{3072}$, | 1 pont | |
| ami a kért alakban $-\frac{341}{512}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |





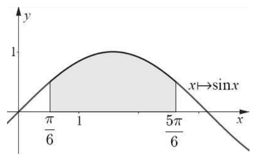
| **2. b)** | | |
|---|---|---|
| $25{,}5 = 25 + 50\cdot 2^{-0{,}209\cdot t}$ | 1 pont | |
| $0{,}01 = 2^{-0{,}209\cdot t}$ | 1 pont | |
| $-0{,}209t = \log_2 0{,}01 \approx -6{,}644$ | 1 pont | $-0{,}209t = \frac{\lg 0{,}01}{\lg 2}$ |
| $t \approx 31{,}8$, tehát kb. 32 perc múlva hűl le a kávé 25,5 °C hőmérsékletűre. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **2. c)** | | |
|---|---|---|
| $40 = H + (85-H)\cdot 2^{-0{,}209\cdot 10}$ | 1 pont | |
| $40 = H + (85-H)\cdot 0{,}235$ | 1 pont | |
| $40 = 0{,}765H + 19{,}975$ | 1 pont | |
| Ebből a szoba hőmérséklete $H \approx 26{,}2$ °C. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

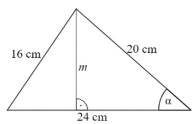
*Megjegyzés: Ha a vizsgázó több válaszát is mértékegység nélkül adja meg, akkor a 2. feladatban ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

| **3. a)** | | |
|---|---|---|
| I. eset: $2\sin^2 x + 7\sin x + 1 = 5$, azaz $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$. | 1 pont | |
| Az egyenlet ($\sin x$)-ben másodfokú, gyökei 0,5 és –4. | 1 pont | |
| II. eset: $2\sin^2 x + 7\sin x + 1 = -5$, azaz $2\sin^2 x + 7\sin x + 6 = 0$. | 1 pont | |
| Az egyenlet ($\sin x$)-ben másodfokú, gyökei –1,5 és –2. | 1 pont | |
| A négy gyök közül ($-1 \le \sin x \le 1$ miatt) csak a $\sin x = 0{,}5$ lehetséges, | 1 pont | |
| ekkor $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. | 2 pont | |
| Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

*Megjegyzések:*
*1. Ha a vizsgázó a válaszát fokban (helyesen) adja meg, akkor ezért 1 pontot veszítsen.*
*2. Ha a vizsgázó a válaszát periódus nélkül adja meg, akkor ezért 1 pontot veszítsen.*

| 3. b) | | |
|---|---|---|
| (A $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ intervallumon az $f$ függvény pozitív, így) a terület: $T=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin x\,dx=$ | 1 pont |  |
| $=\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=$ | 1 pont | |
| $=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$ | 1 pont | |
| $=\sqrt{3}$ ($\approx 1{,}73$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 4. a) | | |
|---|---|---|
| A háromszög 120°-os szöge a legnagyobb szög, így ez a leghosszabb ($c$) oldallal szemközti szög. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Felírva a koszinusztételt a $c$ oldalra: $(a+8)^2=a^2+(a+4)^2-2a(a+4)\cdot\cos120°$. | 1 pont | |
| Rendezve: $0=2a^2-4a-48$. | 2 pont | |
| Az egyenlet pozitív gyöke $a=6$ (a negatív gyök $-4$, ami nem lehetséges). | 1 pont | |
| A háromszög oldalai: 6 (cm), 10 (cm) és 14 (cm) (és ekkor teljesül a háromszög-egyenlőtlenség). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| 4. b) **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A másik két oldal 16 cm és 20 cm hosszú. | 1 pont | |
| A 16 cm-es oldallal szemközti szöget α-val jelölve, a koszinusztétellel: $\cos\alpha=\frac{24^2+20^2-16^2}{2\cdot24\cdot20}=0{,}75$. | 1 pont |  |
| Innen $\alpha\approx41{,}4°$. | 1 pont | |
| A háromszög területe: $T=\frac{24\cdot20\cdot\sin41{,}4°}{2}\approx$ | 1 pont | *A 24 cm-es oldalhoz tartozó magasság:* $m=20\cdot\sin41{,}4°\approx13{,}2$ cm. |
| $\approx158{,}7\text{ cm}^2$. | 1 pont | $T=\frac{24\cdot13{,}2}{2}\approx158{,}4\text{ cm}^2$ |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzés: A háromszög másik két szöge* 55,8°*, illetve* 82,8°*, a másik két oldalhoz tartozó magasság* 15,87 cm*, illetve* 19,84 cm.





| 8. a) | | |
|---|---|---|
| 1 tonna (= 1000 kg) = 1 000 000 gramm | 1 pont | |
| (35 gramm zabmag 1000 darab magot tartalmaz.) 1 millió gramm zabmag $\frac{1\,000\,000}{35}\cdot1000\approx$ $\approx28{,}57$ millió, | 1 pont | |
| azaz kb. $2{,}857\cdot10^7$ darab magot tartalmaz. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 8. b) | | |
|---|---|---|
| Ha 8 egyenlő részre osztjuk az 1000 kg zabot, akkor egy rész tömege 125 kg. | 1 pont | |
| A gép ekkor $8\cdot\left(\frac{125^2}{40}+90\right)=3845$ perc, | 1 pont | |
| azaz $\left(\frac{3845}{60}\approx\right)$ 64 óra alatt végez a zabhegyezéssel. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 8. c) | | |
|---|---|---|
| Ha $n$ egyenlő részre osztjuk az 1000 kg zabot, akkor egy rész tömege $\frac{1000}{n}$ kg. | 1 pont | |
| A gép ekkor $n\cdot\left(\frac{1}{40}\cdot\frac{1000^2}{n^2}+90\right)=\frac{25\,000}{n}+90n$ perc alatt végez a munkával. | 2 pont | |
| Vizsgáljuk az $f\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{25\,000}{x}+90x$ függvényt. Ennek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja nulla. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $f'(x)=-\frac{25\,000}{x^2}+90=0$ | 1 pont | |
| Innen $x=\sqrt{\frac{25\,000}{90}}=\frac{50}{3}\approx16{,}67$ (mert $x>0$). | 1 pont | |
| Ha $x>16{,}67$, akkor $f'(x)>0$, ha pedig $0<x<16{,}67$, akkor $f'(x)<0$, ezért ez valóban (abszolút) minimumhelye $f$-nek. | 1 pont | $f''(x)=\frac{50\,000}{x^3}>0$ |

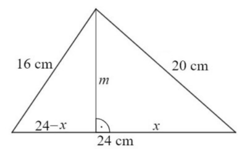
| **7. c) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A kulcsokat 4! (= 24)-féle sorrendben oszthatják ki (összes eset száma). | 1 pont | |
| Kedvező esetek:<br>I. Lehetséges, hogy mind a négyen a saját kulcsukat kapják vissza, ez 1 eset. | 1 pont | *ABCD* |
| Az nem lehetséges, hogy pontosan hárman kapják vissza a saját kulcsukat (hiszen ekkor a negyedik lány is a sajátját kapná vissza). | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| II. Ha pontosan ketten kapják vissza a saját kulcsukat, akkor a másik két lány felcserélve kapja vissza a kulcsait. | 1 pont | *ABDC, ADCB, ACBD, DBCA, CBAD, BACD (ahol a lányok kulcsait a kezdőbetűjükkel jelöltük, és Alíz, Boglárka, Csenge, Dorka sorrendben osztják ki a kulcsokat).* |
| $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen tudjuk kiválasztani azt a két lányt, aki a saját kulcsát kapja vissza (a másik két kulcs kiosztása ezek után egyértelmű). | 1 pont | |
| A kedvező esetek száma tehát (1 + 6 =) 7. | 1 pont | |
| A keresett valószínűség így $\frac{7}{24} \approx 0{,}292$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **7. c) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Annak a valószínűsége, hogy sorban mind a négyen a saját kulcsukat kapják vissza: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$. | 2 pont | |
| Az nem lehetséges, hogy pontosan hárman kapják vissza a saját kulcsukat (hiszen ekkor a negyedik lány is a sajátját kapná vissza). | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Annak a valószínűsége, hogy például Alíz és Boglárka a saját kulcsát kapja vissza, de Csenge és Dorka nem: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$. | 2 pont | |
| $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen választható ki az a két lány, aki a saját kulcsát kapja vissza, így annak a valószínűsége, hogy pontosan ketten kapják vissza a saját kulcsukat: $6 \cdot \frac{1}{24} = \frac{6}{24}$. | 1 pont | |
| A keresett valószínűség így $\left(\frac{1}{24} + \frac{6}{24} =\right) \frac{7}{24} \approx 0{,}292$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |





| **4. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A másik két oldal 16 cm és 20 cm hosszú. | 1 pont | |
| A háromszög félkerülete: $s = \left(\frac{24+20+16}{2} =\right) 30$ cm. | 1 pont | |
| A Hérón-képlettel a terület:<br>$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{30 \cdot 14 \cdot 10 \cdot 6} =$ | 2 pont | |
| $= 60\sqrt{7} \approx 158{,}7$ cm$^2$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **4. b) harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| A másik két oldal 16 cm és 20 cm hosszú. | 1 pont | |
| A 24 cm-es oldalhoz tartozó magasságot jelölje $m$. (Ez a háromszögön belül halad.)<br>Ez a magasság az alapot (az ábra szerint) egy $x$ és egy $24 - x$ cm-es részre osztja. Mindkét részháromszögben a Pitagorasz-tételből $m^2$-et kifejezve, ezeket egyenlővé téve: $(m^2 =)\ 20^2 - x^2 = 16^2 - (24-x)^2$. | 1 pont |  |
| $400 - x^2 = 256 - 576 + 48x - x^2$,<br>ahonnan $x = 15$ cm. | 1 pont | |
| Innen $m = \sqrt{20^2 - x^2} = \sqrt{175} \approx 13{,}2$ cm. | 1 pont | |
| $T = \frac{24 \cdot 13{,}2}{2} \approx 158{,}4$ cm$^2$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **4. c)** | | |
|---|---|---|
| Mivel $c$ a leghosszabb oldal, ezért (a háromszög-egyenlőtlenség miatt) pontosan akkor létezik a háromszög, ha $a + b > c$. | 1 pont | |
| $a + (a + 4) > a + 8$, | 1 pont | |
| ahonnan $a > 4$. | 1 pont | |
| Így a háromszög kerülete valóban nagyobb, mint $(4 + 8 + 12 =)$ 24 cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

# II.

| 5. a) | | |
|---|---|---|
| Az átlag $\frac{1+2+2+3+3+3}{6}=\frac{7}{3}$ ($\approx 2{,}33$). | 1 pont | *Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó az átlagot, illetve a szórást számológéppel helyesen határozza meg.* |
| A szórás $\sqrt{\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0{,}745$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 5. b) | | |
|---|---|---|
| A dobások sorrendjét tekintve hat helyen szerepelhet az 1-es dobás. | 1 pont | *Ismétléses permutációval számolva $\frac{6!}{2!\cdot 3!}=$* |
| A maradék öt dobásból $\binom{5}{2}=10$-féleképpen választhatjuk ki a két 2-es dobás helyét. (A maradék három helyen 3-as áll.) | 1 pont | |
| Így összesen $6\cdot 10=60$ megfelelő dobássorozat van. | 1 pont | $=60$. |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 5. c) első megoldás | | |
|---|---|---|
| A két dobás 36-féle lehet (összes eset). | 1 pont | |
| Kedvező esetek azok, amikor az egyik szám páros, de 4-gyel nem osztható (2 vagy 6), a másik pedig páratlan (1, 3, vagy 5). | 1 pont | |
| Mivel minden megfelelő számpárt kétféle sorrendben dobhatunk, a kedvező esetek száma $2\cdot 2\cdot 3=12$. | 2 pont | |
| A keresett valószínűség így $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ ($\approx 0{,}333$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |





| 7. a) második megoldás | | |
|---|---|---|
| (A kiválasztás sorrendjét is figyelembe vesszük. Tekinthetjük úgy, hogy az üres szekrényeket sorsoljuk ki először.) Az első kisorsolt szekrény (mindkét esetben) bármelyik lehet. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Az első esetben a másodikra 35 szekrény közül még 11, harmadikra 34 szekrény közül még 10 „jó” szekrény van (és a három húzás egymástól független), így az $A$ esemény valószínűsége $\frac{11}{35}\cdot\frac{10}{34}\approx 0{,}092$. | 2 pont | |
| A második esetben a másodikra 35 szekrény közül még 24, harmadikra 34 szekrény közül még 12 „jó” szekrény van, így a $B$ esemény valószínűsége $\frac{24}{35}\cdot\frac{12}{34}\approx 0{,}242$. | 2 pont | |
| Tehát a $B$ esemény valószínűsége nagyobb. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| 7. a) harmadik megoldás | | |
|---|---|---|
| (A kiválasztás sorrendjét is figyelembe vesszük. Tekinthetjük úgy, hogy az üres szekrényeket sorsoljuk ki először.) 36 szekrény közül hármat $36\cdot 35\cdot 34$ (= 42 840)-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma). | 1 pont | |
| Az $A$ esemény esetében elsőre bármelyik szekrényt kiválaszthatjuk, második és harmadikra (az első szekrény sorában levő) 11, illetve 10 szekrény marad, így a kedvező esetek száma $36\cdot 11\cdot 10$ (= 3960). | 2 pont | |
| A $B$ esemény esetében elsőre bármelyik szekrényt kiválaszthatjuk, második és harmadikra 24, illetve 12 szekrény marad, így a kedvező esetek száma $36\cdot 24\cdot 12$ (= 10 368). | 2 pont | |
| Mivel (azonos számú összes eset mellett) a második esetben nagyobb a kedvező esetek száma, így a $B$ esemény valószínűsége a nagyobb. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| 7. b) | | |
|---|---|---|
| A leghosszabb pálcát a téglatest alakú szekrény testátlója mentén helyezhetjük el. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A testátlóra vonatkozó összefüggés szerint: $\sqrt{20^2+35^2+30^2}\approx$ | 1 pont | |
| $\approx 50$ cm a leghosszabb elhelyezhető pálca hossza. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **6. c)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha két színnel színezünk, akkor 3-féleképpen választhatjuk ki a két színt, és ezekkel 2-féleképpen színezhetjük ki az ábrát. Ez $(3 \cdot 2 =)$ 6 lehetőség. | 1 pont | |
| Ha három színnel színezünk, akkor 3-féleképpen választhatjuk ki a kétszer felhasznált színt, 2-féleképpen választhatjuk ki az ezzel színezett két (szemközti) tartományt, és 2-féleképpen színezhetjük ki a másik két tartományt. Ez $(3 \cdot 2 \cdot 2 =)$ 12 lehetőség. | 2 pont | |
| Tehát $(6 + 12 =)$ 18 megfelelő színezés van. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja a lehetséges eseteket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.*

| **7. a)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| (A kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe. A sorsolás után üresen maradt szekrényeket vizsgáljuk. Bármely három szekrény azonos valószínűséggel marad üresen.) 36 szekrény közül hármat $\binom{36}{3}$ (= 7140)-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma). | 1 pont | *(A kisorsolt szekrényeket vizsgáljuk.)* $\binom{36}{33}$ (= 7140) |
| Három szekrényt egy adott sorból $\binom{12}{3}$ (= 220)-féleképpen lehet kiválasztani. Mivel három sor van, ebben az esetben a kedvező esetek száma $3 \cdot \binom{12}{3}$ (= 660). | 1 pont | $3 \cdot \binom{12}{9}\binom{12}{12}\binom{12}{12}$ (= 660) |
| Az $A$ esemény valószínűsége így $\dfrac{3 \cdot \binom{12}{3}}{\binom{36}{3}} \approx 0{,}092$. | 1 pont | |
| Három különböző sorból egy-egy szekrényt $12 \cdot 12 \cdot 12$ (= 1728)-féleképpen lehet kiválasztani. | 1 pont | $\binom{12}{11}^3$ (= 1728) |
| A $B$ esemény valószínűsége így $\dfrac{12 \cdot 12 \cdot 12}{\binom{36}{3}} \approx 0{,}242$. | 1 pont | |
| Tehát a $B$ esemény valószínűsége nagyobb. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |





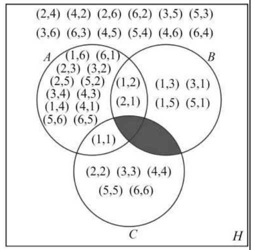
| **5. c)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Komplementer módszerrel számolunk. Kedvezőtlen esetek azok, amikor a szorzat vagy nem osztható 2-vel, vagy osztható 4-gyel. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| I. eset: A szorzat nem osztható 2-vel, ha két páratlan számot dobunk. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. | 1 pont | |
| II/1. eset: 4-gyel osztható a szorzat egyrészt akkor, ha az egyik kockával 4-et, a másikkal pedig egy páratlan számot dobunk. Ennek a valószínűsége $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. | 1 pont* | |
| II/2. eset: 4-gyel osztható továbbá a szorzat, ha két páros számot dobunk. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. | 1 pont* | |
| A keresett valószínűség $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ (≈ 0,333). | 1 pont* | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzések: 1. A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| II/1. eset: 4-gyel osztható a szorzat egyrészt akkor, ha az egyik kockával 4-et (a másikkal pedig bármit) dobunk. Ennek a valószínűsége $\frac{6+6-1}{36} = \frac{11}{36}$. | 1 pont | |
| II/2. eset: 4-gyel osztható továbbá a szorzat, ha két páros számot dobunk, de egyik sem a 4. Ennek a valószínűsége $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$. | 1 pont | |
| A keresett valószínűség $1 - \frac{9}{36} - \frac{11}{36} - \frac{4}{36} = \frac{12}{36}$. | 1 pont | |

*2. Ha a vizsgázó (például az alábbi táblázattal) rendezetten felsorolja a lehetséges eseteket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.*

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **2** | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| **3** | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| **4** | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| **5** | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| **6** | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

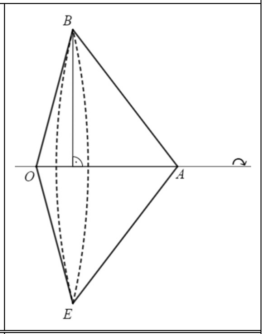
| **5. d)** | | |
|---|---|---|
| Helyesen kitöltött halmazábra. | 5 pont |  |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzés: 8 helyesen kitöltött tartományért 5 pont, 7 helyesen kitöltött tartományért 4 pont, 5 vagy 6 helyesen kitöltött tartományért 3 pont, 3 vagy 4 helyesen kitöltött tartományért 2 pont, 1 vagy 2 helyesen kitöltött tartományért 1 pont jár.*
*Egy nemüres tartomány kitöltése akkor helyes, ha legalább egy jó számpár szerepel benne, rossz számpár pedig nem szerepel benne. Egy üres tartomány kitöltése akkor helyes, ha be van satírozva.*

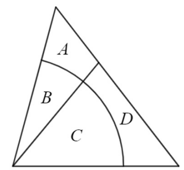
| **6. a)** | | |
|---|---|---|
| Az $OAB$ háromszög területe $\frac{12^2 \cdot \sin 75°}{2} \approx 69{,}5\ \text{cm}^2$. | 1 pont | |
| Az $OCD$ körcikk területe $\frac{75°}{360°} \cdot 8^2 \cdot \pi \approx 41{,}9\ \text{cm}^2$. | 1 pont | |
| A szürkére színezett tartomány területe $(69{,}5 - 41{,}9 =)\ 27{,}6\ \text{cm}^2$. | 1 pont | |
| Az $OAB$ háromszögben koszinusztétellel: $AB = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 75°} \approx$ | 1 pont | |
| $\approx 14{,}6$ cm. | 1 pont | |
| A $CD$ körív hossza $\frac{75°}{360°} \cdot 2 \cdot 8 \cdot \pi \approx 10{,}5$ cm. | 1 pont | $\frac{2T_{OCD}}{r} = \frac{2 \cdot 41{,}9}{8} \approx 10{,}5$ cm |
| $CA = DB = 12 - 8 = 4$ cm | 1 pont | |
| A szürkére színezett tartomány kerülete $(14{,}6 + 4 + 10{,}5 + 4 =)\ 33{,}1$ cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |





| **6. b)** | | |
|---|---|---|
| Az $OAB$ háromszög $B$-hez tartozó magassága $12 \cdot \sin 75° \approx 11{,}6$ cm. | 1 pont |  |
| A keletkező forgástest két forgáskúp egyesítése. Mindkét forgáskúp alapkörének sugara 11,6 cm, magasságaik összege pedig $OA = 12$ cm. | 2 pont | *Az egyik magasság* $12 \cdot \cos 75° \approx 3{,}1$ cm, *a másik* 8,9 cm. |
| A forgástest térfogata $\frac{11{,}6^2 \cdot \pi \cdot 12}{3} \approx 1691\ \text{cm}^3$. | 1 pont | $437\ \text{cm}^3 + 1254\ \text{cm}^3$ |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó több válaszát is mértékegység nélkül adja meg, akkor a 6. feladatban ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

| **6. c) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az ábra jelöléseit használjuk. Két szomszédos tartományt, például $A$-t és $B$-t $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen színezhetünk ki. | 1 pont |  |
| Ha ezután a $C$ tartomány színe az $A$ színével egyezik meg, akkor a $D$ tartomány színezése 2-féle lehet. | 1 pont | |
| Ha pedig a $C$ tartomány színe a harmadik szín, akkor a $D$ tartomány színezése egyértelmű ($D$ és $B$ színe egyforma). | 1 pont | |
| Tehát $6 \cdot (2 + 1) = 18$ megfelelő színezés van. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |