ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

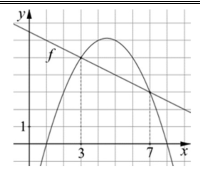
Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

9. b)		
(A parabola és az *f* egyenes metszéspontjainak első koordinátáira:) $-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x-4=-\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}$.	1 pont	
$x^2-10x+21=0$	1 pont	
$x_1=3$ vagy $x_2=7$.	1 pont	
A parabola a [3; 7]-on az *f* egyenes felett van.	1 pont	
Így a kérdezett terület: $T=\int_3^7\left(\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x-4\right)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}\right)\right)dx=$ $=\int_3^7\left(-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{21}{2}\right)dx=$	2 pont*	
$=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{21}{2}x\right]_3^7=-\frac{49}{6}-\left(-\frac{81}{6}\right)=\frac{16}{3}$.	2 pont*	
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

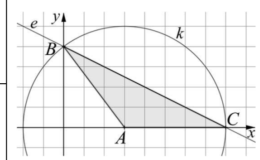
A parabolaív alatti terület: $\int_3^7\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x-4\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{9}{4}x^2-4x\right]_3^7=$ $=\frac{301}{12}-\frac{45}{12}=\frac{64}{3}$.	2 pont	
A derékszögű trapéz területe: $\frac{5+3}{2}\cdot 4=16$.	1 pont	
A parabola és az egyenes által határolt korlátos síkidom területe $\frac{64}{3}-16=\frac{16}{3}$.	1 pont	

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
$8\cdot 2^x - 2^x + \frac{2^x}{2} = 60$	1 pont	
Mindkét oldalt megszorozva 2-vel: $16\cdot 2^x - 2\cdot 2^x + 2^x = 120$.	1 pont	$7{,}5\cdot 2^x = 60$
Rendezve: $15\cdot 2^x = 120$.	1 pont	
$2^x = 8 (= 2^3)$	1 pont	
(Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, így) $x = 3$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

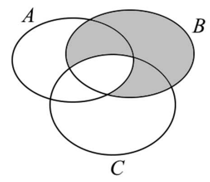
1. b)		
Az első egyenletből: $y = 2x - 3$.	1 pont	$x = \frac{y+3}{2}$
A második egyenletbe helyettesítve: $\lvert 5x-5\rvert = 5$.	1 pont	$\lvert y+1\rvert = 2$
$5x - 5 = 5$ esetén $x = 2$,	1 pont	$y + 1 = 2$ *esetén* $y = 1$,
ekkor $y = 1$. (Tehát az egyik megoldás a (2; 1) számpár.)	1 pont	*ekkor* $x = 2$.
$5x - 5 = -5$ esetén $x = 0$,	1 pont	$y + 1 = -2$ *esetén* $y = -3$,
ekkor $y = -3$. (Tehát a másik megoldás a (0; –3) számpár.)	1 pont	*ekkor* $x = 0$.
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. a)		
A C csúcs az A csúcs körüli AB sugarú k körívre illeszkedik.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az AB sugár hossza $\sqrt{9+16} = 5$,	1 pont	
a k kör egyenlete $(x-3)^2 + y^2 = 25$.	1 pont	
(A k kör és az e egyenes közös pontjai a lehetséges C pontok.) Az e egyenletéből: $x = 8 - 2y$. A k egyenletébe behelyettesítve: $(5-2y)^2 + y^2 = 25$. Ebből $y^2 - 4y = 0$.	2 pont	$y = 4 - \frac{1}{2}x$ $(x-3)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 = 25$ $x^2 - 8x = 0$
$y = 4$ vagy $y = 0$.	1 pont	$x = 0$ *vagy* $x = 8$.
$y = 4$ esetén $x = 0$, tehát $C(0; 4)$, ami egybeesik a B ponttal, így a három pont nem alkot háromszöget, tehát ez nem megoldás.	1 pont	
$y = 0$ esetén $x = 8$, tehát $C(8; 0)$, ami valóban megfelel. (A, B és C három különböző pont, amelyek nem esnek egy egyenesre.)	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

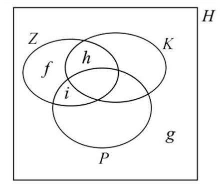
8. c) második megoldás		
(Jelölje r az alapkör sugarát, m a henger magasságát dm-ben.) A henger térfogata $V = r^2\pi m = 2\text{ dm}^3$,	1 pont	
amelyből az alapkör sugara $r = \sqrt{\frac{2}{\pi m}}$.	1 pont	
A felül nyitott henger felszíne $A = r^2\pi + 2r\pi m = \frac{2}{\pi m}\cdot\pi + 2\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\cdot\pi m = \frac{2}{m} + 2\sqrt{2\pi m}$.	1 pont	
Az $f(m) = \frac{2}{m} + 2\sqrt{2\pi m}$ $(m > 0)$ függvény deriváltfüggvénye $f'(m) = -\frac{2}{m^2} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m}}$.	1 pont*	
(Az f-nek ott lehet minimumhelye, ahol $f'(m) = 0$, azaz) $\frac{2}{m^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m}}$.	1 pont*	
Négyzetre emelve $\frac{4}{m^4} = \frac{2\pi}{m}$, majd innen $m = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.	1 pont*	
Mivel $f''(m) = \frac{4}{m^3} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{m^3}}$, $f''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{2} > 0$, ezért ez valóban minimumhely.	1 pont*	
Tehát a váza magassága $m = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}86\text{ dm} = 8{,}6\text{ cm}$ legyen.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

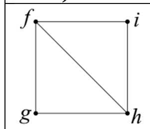
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva a $\frac{2}{m}$, $\sqrt{2\pi m}$, $\sqrt{2\pi m}$ tagokra:	1 pont	
$f(m) = \frac{2}{m} + \sqrt{2\pi m} + \sqrt{2\pi m} \geq 3\cdot\sqrt[3]{4\pi} \approx 6{,}97$.	1 pont	
Egyenlőség akkor és csak akkor lehetséges, ha $\frac{2}{m} = \sqrt{2\pi m}$,	1 pont	
azaz $m = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.	1 pont	

2. a)		
	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

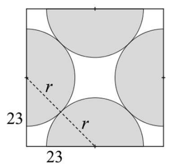
2. b)		
Például $(A \cup B) \cap C$.	2 pont	$(A \cap C) \cup (B \cap C)$
Összesen:	**2 pont**	

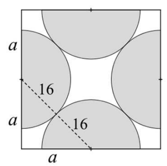
2. c)		
	1-1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. d)		
	3 pont	*Minden tévesen berajzolt vagy tévesen be nem rajzolt él miatt 1-1 pontot veszítsen a vizsgázó.*
Összesen:	**3 pont**	

3. a)		
A sonkás pizza árát Ft-ban p-vel, a baracklé árát b-vel jelölve: $\left.\begin{array}{l} 2p+3b=7600 \\ 3p+5b=11\,700 \end{array}\right\}$.	1 pont	
Az első egyenletből kifejezve p-t: $p = 3800 - 1{,}5b$.	1 pont	*A második egyenlet kétszereséből kivonva az első egyenlet háromszorosát: $b = 600$.*
Ezt a második egyenletbe beírva: $3(3800 - 1{,}5b) + 5b = 11\,700$, ahonnan $b = 600$ (tehát egy baracklé 600 Ft).	1 pont	
Ebből $p = 2900$ (tehát egy pizza 2900 Ft).	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b)		
Az alapanyag tavalyi árát Ft-ban jelölje $7x$, az egyéb költségeket $3x$ (azaz az összköltség $10x$).	1 pont	
Ekkor az áremelkedés után ez $1{,}15 \cdot 7x + 1{,}25 \cdot 3x =$	1 pont	
$= 11{,}8x$ Ft (ami az eredeti összköltségnek az 1,18-szorosa),	1 pont	
így 18%-kal kerül többe a pizza idén.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. c) első megoldás		
Kiszámoljuk a tepsibe a megadott módon elhelyezhető legnagyobb pizzák átmérőjét. Ebben az esetben a félkörök érintik egymást. Két érintkező félkör középpontjának távolsága a két félkör sugarának összege.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A félkörök sugarát r-rel jelölve:) A Pitagorasz-tétel alapján: $(2r)^2 = 23^2 + 23^2$,	1 pont	
ahonnan $2r\ (= 23\sqrt{2}) \approx 32{,}5$ cm.	1 pont	
Ez nagyobb, mint 32 cm, tehát Péter fél pizzái elférnek a tepsiben.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. c) második megoldás		
Meghatározzuk, hogy mekkora tepsire van szükség ahhoz, hogy elférjen benne két 32 cm átmérőjű pizza a megadott módon. Ekkor a pizzák érintik egymást. Két érintkező félkör középpontjának távolsága a két félkör sugarának összege.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki*
(A tepsi oldalát $2a$-val jelölve:) A Pitagorasz-tétel alapján: $32^2 = a^2 + a^2$,	1 pont	
ahonnan $a \approx 22{,}63$ cm.	1 pont	
$2a < 46$ cm, ezért a fél pizzák elférnek a tepsiben.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. c) első megoldás		
(Jelölje r az alapkör sugarát, m a henger magasságát cm-ben.) A henger térfogata $V = r^2\pi m = 2000\ \text{cm}^3$,	1 pont	
amelyből a váza magassága $m = \dfrac{2000}{r^2\pi}$.	1 pont	
A felül nyitott henger felszíne $A = r^2\pi + 2r\pi m = r^2\pi + 2r\pi \cdot \dfrac{2000}{r^2\pi} = r^2\pi + \dfrac{4000}{r}$.	1 pont	
Az $f(r) = r^2\pi + \dfrac{4000}{r}$ $(r > 0)$ függvény deriváltfüggvénye $f'(r) = 2r\pi - \dfrac{4000}{r^2}$.	1 pont*	
(Az f-nek ott lehet minimumhelye, ahol $f'(r) = 0$, azaz) $2r\pi - \dfrac{4000}{r^2} = 0$.	1 pont*	
Ebből $r \left(= \sqrt[3]{\dfrac{2000}{\pi}} \right) \approx 8{,}6$ cm.	1 pont*	
Mivel $f''(r) = 2\pi + \dfrac{8000}{r^3} > 0$, ezért ez valóban minimumhely.	1 pont*	*Ha $0 < r < 8{,}6$, akkor az első derivált negatív, ha $r > 8{,}6$, akkor pedig pozitív, tehát az $r = 8{,}6$ minimumhely.*
Tehát a váza magassága $m = \dfrac{2000}{8{,}6^2\pi} \approx 8{,}6$ cm legyen.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva az $r^2\pi$, $\dfrac{2000}{r}$, $\dfrac{2000}{r}$ tagokra:	1 pont	
$f(r) = r^2\pi + \dfrac{2000}{r} + \dfrac{2000}{r} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2000^2\pi} \approx 697{,}5$.	1 pont	
Egyenlőség akkor és csak akkor lehetséges, ha $r^2\pi = \dfrac{2000}{r}$,	1 pont	
azaz $r \left(= \sqrt[3]{\dfrac{2000}{\pi}} \right) \approx 8{,}6$ cm.	1 pont	

8. a)		
B, D	2 pont	*Egy helyes válasz, vagy két helyes és egy hibás válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

8. b) **első megoldás**		
(A virágok darabszám szerinti eloszlása 3-féle lehet.) 1. eset: Egy vázában 4, két vázában 1-1 virág van. $\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}=30$ olyan lehetőség van, amelyben pl. a piros vázában 4, a fehér és a zöld vázában pedig 1-1 virág van.	1 pont	
A 4 virág lehet a három váza bármelyikében, ezért $30\cdot 3 = 90$ ilyen lehetőség van.	1 pont	
2. eset: Egy vázában 3, egy vázában 2, egy vázában pedig 1 virág van. $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}=60$ olyan lehetőség van, amelyben pl. a piros vázában 3, a fehér vázában 2, a zöld vázában pedig 1 virág van.	1 pont	
A vázák színsorrendje 3! = 6-féle lehet, ezért $60\cdot 6 = 360$ ilyen lehetőség van.	1 pont	
3. eset: Mindhárom vázában 2-2 virág van. $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=90$ ilyen lehetőség van.	1 pont	
Tehát összesen 90 + 360 + 90 = 540 lehetőségünk van a virágok elhelyezésére.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. b) **második megoldás**		
Ha lehetnének üres vázák is, akkor $3^6 = 729$ lehetőség lenne a virágok elhelyezésére.	1 pont	
Ebből 2^6 olyan eset van, amikor a piros váza üres. Ezek közt azonban van 2 olyan eset, amikor valamelyik másik váza is üres, ezért $2^6-2=62$ olyan eset van, amikor pl. csak a piros váza üres.	2 pont	
A vázák bármelyike lehet az üres, tehát $3\cdot 62 = 186$ olyan eset van, amelyben pontosan 1 váza üres.	1 pont	
Van még 3 eset, amelyben pontosan 2 váza üres (ekkor mind a 6 virág ugyanabban a vázában van).	1 pont	
Tehát a megfelelő elhelyezések száma 729 – 186 – 3 = 540.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. a)		
A mértani sorozat hányadosát q-val jelölve: $732\cdot q^2=1647$,	1 pont	*A mértani közép tulajdonság miatt a kérdéses évszámra* $x^2=732\cdot 1647$.
amiből ($q > 0$ miatt) $q = 1{,}5$,	1 pont	
így a középső évszám ($732\cdot 1{,}5 =$) 1098.	1 pont	($x > 0$, *így*) $x = 1098$.
Összesen:	**3 pont**	

4. b)		
Ha a jegyeket nagyság szerint sorba rendezzük, akkor a medián kétféleképpen lehet 4. 1. eset: az ötödik jegy 3, a hatodik jegy pedig 5; 2. eset: az ötödik és hatodik jegy is 4.	1 pont*	*1. eset:* _ _ _ _ 3 5 _ _ _ _ *2. eset:* _ _ _ _ 4 4 _ _ _ _
Az 1. esetben öt darab 5-ös lenne, ami mellé öt darab 3-as kell a 4-es átlaghoz, de az egyetlen módusz miatt ez nem lehetséges.	1 pont*	
A 2. esetben mindenképpen négy darab 5-ösnek kell lennie, mert ha kevesebb lenne, akkor 4-esből is lenne legalább annyi, mint 5-ösből, azaz nem az 5 lenne az egyetlen módusz.	1 pont*	_ _ _ _ 4 4 5 5 5 5 *lehet.*
Mivel a tíz jegy átlaga 4, ezért az összegük 40, így a négy legkisebb jegy összege $40 - 4\cdot 5 - 2\cdot 4 = 12$.	1 pont	
Ha nincs a négy legkisebb jegy között 4-es, akkor a 12 összegként csak négy darab 3-as jegyből adódhatna, de ekkor nem az 5 lenne az egyetlen módusz.	1 pont	
Ha van még egy 4-es jegy (több nem lehet a módusz miatt), akkor a többi jegy 2, 3, 3 lehet csak,	1 pont	
tehát a tíz jegy 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5. (Ez minden feltételnek megfelel.)	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az 5-ösök száma a módusz miatt legalább három, a medián miatt legfeljebb öt.	1 pont	
A három darab 5-ös kevés, mert a jegyek összege ekkor legfeljebb ($3\cdot 5 + 2\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 =$) 34 lenne (és így az átlag nem lehetne 4).	1 pont	
Öt darab 5-ös nem lehet, mert akkor öt darab 3-as kellene a 4-es átlaghoz. (A módusz miatt) ez sem lehetséges, tehát pontosan négy darab 5-ös lehet csak.	1 pont	

4. c) első megoldás		
3 egyforma ízt 4-féleképpen,	1 pont	
3 különböző ízt szintén 4-féleképpen választhat.	1 pont	
Valamelyikből 1-et és még egy másikból 2-t $4\cdot 3 = 12$-féleképpen választhat.	1 pont	$\binom{4}{2}\cdot 2$
Összesen tehát $4 + 4 + 12 = 20$-féleképpen választhatja ki Bence a kürtőskalácsokat.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. c) második megoldás		
4 különböző ízű kürtőskalács közül 3 db-ot kell kiválasztania úgy, hogy a sorrendjük nem számít, és egy típusból több darabot is választhat.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ez éppen négy elem harmadosztályú ismétléses kombinációja. Bence lehetséges választásainak száma: $\binom{4+3-1}{3} =$	2 pont	
$= \binom{6}{3} = 20.$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges esetet felsorolja (rendezett, logikus sorrendben megadja), és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

7. c) második megoldás		
Annak a valószínűsége, hogy Anna az első dobásával nyer, $\frac{1}{6}$. Annak a valószínűsége, hogy elsőre sem Anna, sem Balázs nem dob hatost, $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$.	1 pont	
Ha első dobásával egyikük sem nyert, akkor tekinthetjük úgy, hogy ekkor a játék újraindul. Ebben a pillanatban Anna győzelmének p valószínűsége megegyezik a játék legelején mérhető valószínűséggel.	1 pont	
Emiatt $p = \frac{1}{6} + \frac{25}{36}\cdot p$.	2 pont	
Innen $p = \frac{6}{11}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. d)		
Két kockával az összes (egyenlően valószínű) lehetséges eset száma $6\cdot 6 = 36$, ezek közül rendre 11, 9, 7, 5, 3, illetve 1 esetben lesz a nem nagyobb dobott érték 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6.	2 pont	
A keresett várható érték: $\frac{11}{36}\cdot 1+\frac{9}{36}\cdot 2+\frac{7}{36}\cdot 3+\frac{5}{36}\cdot 4+\frac{3}{36}\cdot 5+\frac{1}{36}\cdot 6=$	1 pont	
$=\frac{91}{36}$ ($\approx 2{,}528$).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

a nem nagyobb szám értéke	1	2	3	4	5	6
valószínűsége	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

7. b)		
Annak a valószínűsége, hogy Anna az első dobásával nyer, $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Második dobásával úgy nyer Anna, ha az első dobása egyiküknek sem hatos, másodikra viszont ő hatost dob. Ennek a valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$ ($\approx 0{,}116$).	1 pont	
Harmadik dobásával úgy nyer Anna, ha az első 2-2 dobása egyiküknek sem hatos, harmadikra viszont ő hatost dob. Ennek a valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$ ($\approx 0{,}080$).	1 pont	
A keresett valószínűség ezek összege, tehát $\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{25}{36}+\frac{625}{1296}\right)\approx 0{,}363$.	1 pont	$\frac{2821}{7776}$
Összesen:	**4 pont**	

7. c) első megoldás		
(Annak a valószínűsége, hogy Anna az első dobásával nyer, $\frac{1}{6}$, a második dobásával nyer, $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$, a harmadik dobásával nyer, $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$.) És így tovább, annak a valószínűsége, hogy Anna az n-edik dobásával nyer, $\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2} \cdot \frac{1}{6}$ (n pozitív egész).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezek a valószínűségek egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja $a_1=\frac{1}{6}$, hányadosa pedig $q=\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$.	2 pont	
A játék tetszőleges sok dobásból állhat, így a mértani sorozatból képzett végtelen mértani sor összegét kell meghatározni (ami létezik, mivel $0 < q < 1$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Anna győzelmének valószínűsége: $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{36}}=\frac{6}{11}$ ($\approx 0{,}545$).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

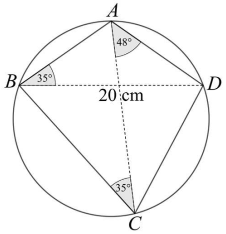
II.

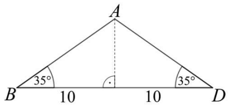
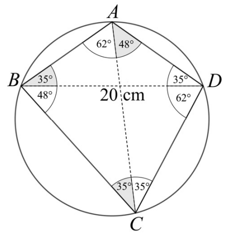
5. a)		
A számtani sorozat differenciája: $d=\frac{22-5}{10}=1{,}7$.	1 pont	
A sorozat első tagja: $a_1=5-2\cdot 1{,}7=1{,}6$.	1 pont	
A sorozat első 100 tagjának összege: $S_{100}=\frac{2\cdot 1{,}6+99\cdot 1{,}7}{2}\cdot 100=8575$.	2 pont	$a_{100}=1{,}6+99\cdot 1{,}7=169{,}9$ $S_{100}=\frac{1{,}6+169{,}9}{2}\cdot 100=$ $=8575$
Összesen:	**4 pont**	

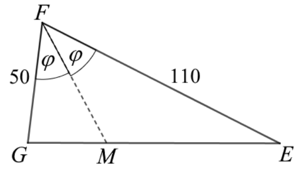
5. b)		
A számtani sorozat első n tagjának összege $S_n=\frac{2\cdot 91+(n-1)\cdot 2}{2}\cdot n=n^3$.	2 pont	$a_n=91+(n-1)\cdot 2=2n+89$ $S_n=\frac{91+(2n+89)}{2}\cdot n=n^3$
$(90+n)\cdot n=n^3$ (Osztva $n\neq 0$-val, és nullára rendezve:) $n^2-n-90=0$.	2 pont	
$n=-9$ nem megoldás ($n>0$).	1 pont	
$n=10$ megoldás ($S_{10}=1000=10^3$ valóban).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. c)		
A mértani sorozat első n tagjának összege $S_n=1{,}6\cdot\frac{2^n-1}{2-1}>1\,000\,000\,000$.	2 pont	
$2^n>625\,000\,001$	1 pont	
A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő,	1 pont	*Az lg-függvény szigorúan monoton növekedő, ezért*
ezért $n>\log_2 625\,000\,001\approx 29{,}2$.	1 pont	$\lg 2^n>\lg 625\,000\,001$ $n\lg 2>\lg 625\,000\,001$ ($\lg 2>0$, *így*) $n>\frac{\lg 625\,000\,001}{\lg 2}\approx 29{,}2$
Tehát legalább 30 tagot kell összeadni.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel dolgozik, akkor az egyenlet helyes megoldásáért 4 pontot kapjon. Ha ezután a szigorúan monoton növekedésre hivatkozva helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.
2. Ha a vizsgázó megmutatja, hogy $n = 29$ nem felel meg, ***és*** *$n = 30$ megfelel, akkor ezért 3 pontot kapjon. Ha ezután a szigorúan monoton növekedésre hivatkozva helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.*

6. a)		
 A kerületi szögek tétele miatt	1 pont	
$ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 35°$ (mert mindkettő ugyanahhoz az AB ívhez tartozik),	1 pont	
illetve $ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle = 35°$ (mert mindkettő ugyanahhoz az AD ívhez tartozik).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. b)		
(Az egyenlőszárú ABD háromszög BD alapja 20 cm hosszú, ezért) $AB = AD = \dfrac{10}{\cos 35°} \approx 12{,}2$ cm.	2 pont	
(A kerületi szögek tétele vagy a háromszögek belső szögösszege miatt:) $CAB\sphericalangle = 62°$, $DBC\sphericalangle = 48°$, $BDC\sphericalangle = 62°$.	2 pont	
($BCD\sphericalangle = 70°$, így) a BCD háromszögben szinusztételt alkalmazva: $\dfrac{BC}{20} = \dfrac{\sin 62°}{\sin 70°}$,	1 pont	
amiből $BC \approx 18{,}8$ cm.	1 pont	
Koszinusztétellel: $CD = \sqrt{20^2 + 18{,}8^2 - 2\cdot 20\cdot 18{,}8\cdot\cos 48°} \approx$	1 pont	*Szinusztétellel:* $\dfrac{CD}{20} = \dfrac{\sin 48°}{\sin 70°}$
$\approx 15{,}8$ cm.	1 pont	$CD \approx 15{,}8$ cm.
A húrnégyszög kerülete: $(12{,}2 + 12{,}2 + 18{,}8 + 15{,}8 =)$ 59 cm.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

6. c)		
 (Jelölje az F-hez tartozó belső szögfelező és az EG oldal metszéspontját M.) A szögfelezőtétel miatt $\dfrac{EM}{MG} = \dfrac{FE}{FG}$,	1 pont	*Az EG oldalt a szögfelezőtétel alapján* $110:50$ *arányban kell felosztani,*
amiből (arányos osztással) $EM = \dfrac{104}{110+50}\cdot 110 = 71{,}5$ cm.	2 pont	
Ezért $MG = (104 - 71{,}5 =)\ 32{,}5$ cm. (A szögfelező az EG oldalt 71,5 cm, illetve 32,5 cm hosszú szakaszokra osztja.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Mértékegység hiánya miatt a teljes feladatban összesen legfeljebb 1 pontot veszítsen a vizsgázó.

7. a)		
Annak a valószínűsége, hogy Anna az első dobásával nem nyer (és így Balázs dobhat), $\dfrac{5}{6}$.	1 pont	
Balázs ezután (Anna első dobásától függetlenül) $\dfrac{1}{6}$ valószínűséggel nyer,	1 pont	
így a keresett valószínűség $\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{36}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	