Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2025. május 6. 9:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Egy cipőboltban novemberben három pár cipő összesen 45 000 Ft-ba került. Egy karácsonyi akció keretében, ha valaki három pár cipőt egyszerre vásárolt, akkor a legolcsóbbat 50%, a második legolcsóbbat pedig 20% kedvezménnyel vehette meg (a legdrágább cipőre nem járt kedvezmény). Ebben az akcióban ugyanezért a három pár cipőért így összesen már csak 37 000 Ft-ot kellett fizetni.
Karácsony elmúltával az akció véget ért, és a legolcsóbb cipő árát – a novemberi árához képest – 30%-kal megemelték, így a három pár cipő ekkor összesen 48 000 Ft-ba került.

a) Határozza meg mindhárom pár cipő novemberi árát!

Négy szám közül az első három szám egy számtani, az utolsó három szám pedig egy mértani sorozat egymást követő három tagja. Az első szám a 3, a negyedik szám a 25.

b) Határozza meg a másik két számot!

a)	7 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

2. Egy kis szigeten élő állatfajok populációinak egyedszámát egy modell szerint (jó közelítéssel) a következő képlet adja meg: $P(t)=\dfrac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}$. A képletben $P(t)$ az adott faj populációjának egyedszáma a vizsgálat kezdetétől számított t év elteltével, E, k és c pedig az adott faj populációjára jellemző pozitív állandók: E a sziget eltartóképessége (a becsült maximális egyedszám, amit a sziget el tud tartani), k a populáció kezdeti méretétől, c pedig a populáció növekedési sebességétől függő állandó.

a) Egy emlősfajra jellemző állandók értéke $k = 1{,}5$ és $c = 0{,}05$. Tudjuk, hogy a vizsgálat kezdetétől számított 8 év elteltével 140 egyedből áll a faj populációja.
Határozza meg a szigetnek az erre az emlősfajra jellemző eltartóképességét!

b) Egy rágcsálófaj esetén a sziget eltartóképessége 1500 egyed.
Határozza meg az erre a populációra jellemző k és c állandók értékét, ha a vizsgálat kezdetekor 200, öt évvel később pedig 350 egyedből állt a populáció!

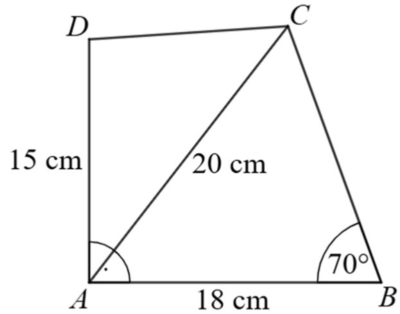
c) Igazolja, hogy egy populáció $P(t)$ egyedszáma a modell szerint soha nem haladhatja meg a sziget (adott populációra jellemző) eltartóképességét!

a)	3 pont	
b)	7 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	14 pont	

3. Az $\{a_n\}$ sorozat tagjaira $n \geq 2$ esetén az $a_n = a_{n-1} + n$ összefüggés teljesül. Egy négyszög belső szögei (fokban mérve) a_1, a_2, a_3 és a_4.

a) Határozza meg a négyszög belső szögeinek nagyságát!

Az $ABCD$ négyszög oldalai, átlói és szögei közül ismertek a következők:
$AB = 18$ cm, $AD = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $DAB\sphericalangle = 90º$, $ABC\sphericalangle = 70º$.



b) Határozza meg a négyszög BC és CD oldalának hosszát!

a)	5 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	12 pont	

4. Adott az $A(5; 14)$ és a $B(7; 6)$ pont a koordináta-rendszerben.

a) Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik az A és a B pontokra, és a középpontja az y tengelyen van!

b) Az $y = \frac{1}{2p}(x-u)^2 + v$ egyenletű parabola tengelypontja a B pont, és a parabola illeszkedik az A pontra. Határozza meg a parabola p paraméterének értékét!

a)	7 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	11 pont	

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy iskolának 510 tanulója van. Év végén a fiúk p százaléka, a lányok $p + 3$ százaléka lett kitűnő, így 13 fiú és 20 lány kitűnő tanuló van.

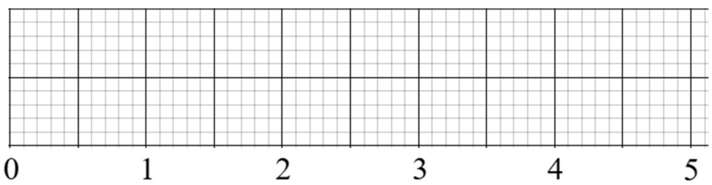
a) Határozza meg a fiúk és a lányok számát ebben az iskolában!

A 33 kitűnő (5,0 átlagú) tanuló közül sorsolással kiválasztanak hármat, akik ingyenes nyári táborozást nyernek.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kisorsolt tanulók között 1 fiú és 2 lány lesz!

Az 510 tanuló év végi tanulmányi átlagairól (a kitűnők számán kívül) még a következő információkat tudjuk: az év végi átlagok terjedelme 2,4; módusza 3,8; mediánja 4,0; átlaga 4,2; szórása 0,9; alsó kvartilise 3,3; felső kvartilise 4,6.

c) Készítsen a tanulók év végi tanulmányi átlagairól sodrófadiagramot!



a)	9 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Legyen a H alaphalmaz az egyváltozós valós függvények halmaza, M, K és A pedig a H alábbi részhalmazai:

M = {az értelmezési tartományukon szigorúan monoton növekedő függvények};
K = {az értelmezési tartományukon konvex függvények};
A = {alulról korlátos függvények}.

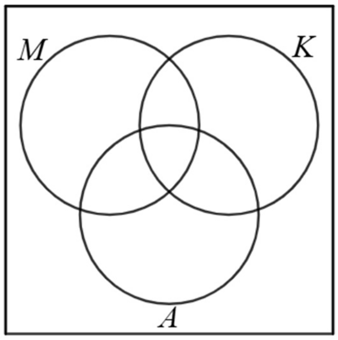
a) Helyezze el az alábbi hozzárendelésekkel megadott függvények betűjelét az ábra megfelelő részébe!

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad x \mapsto \sin x$

$g\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\quad x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad x \mapsto 2^x$

$i\colon \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbf{R},\quad x \mapsto \sqrt{x}$



b) Jelölje az ábrán satírozással a $(K \cap A) \setminus M$ halmazt, és hozzárendelési szabályával adjon meg egy olyan j függvényt, amely ebbe a halmazba tartozik!

c) Határozza meg az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + bx + c$ függvény b és c paramétereinek értékét, ha tudjuk, hogy a függvénynek $x = 2$-ben minimumhelye van, és a minimum értéke -1.

d) Határozza meg azokat a $p \in [0; 2\pi]$ értékeket, amelyekre $\int_0^p \sin x \, dx = \dfrac{1}{2}$.

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
d)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Felül nyitott, négyzet alapú egyenes hasáb alakú tárolódobozt készítünk. A doboz alaplapjának anyagköltsége 4 tallér négyzetdeciméterenként, az oldallapok anyagköltsége 3 tallér négyzetdeciméterenként. Az egész doboz anyagköltségére összesen 300 tallér áll rendelkezésre.

a) Legfeljebb mekkora lehet a doboz magassága, ha alapélei 6 dm hosszúak?

b) Határozza meg a 300 tallérból elkészíthető maximális térfogatú doboz éleinek hosszát!

Az elkészült doboz alaplapját és négy oldallapját kívül kékre vagy pirosra festjük, egy-egy lapot egyszínűre.

c) Hányféle különböző színezésű doboz készíthető? (Két színezést különbözőnek tekintünk, ha forgatással nem vihetők át egymásba. Nem szükséges mindkét színt felhasználni.)

a)	4 pont	
b)	8 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

8. Legyen G egy ötpontú fagráf.

a) Lehetséges-e, hogy ekkor G komplementere is fagráf?

Egy hatpontú teljes gráf pontjait megszámozzuk 1-től 6-ig. A gráf éleit ezután zöldre vagy pirosra színezzük a következő szabály szerint: két pontot összekötő él zöld lesz, ha a két ponthoz írt számok közül az egyik osztója a másiknak, egyébként pedig piros. A gráf pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott három pontot összekötő három él azonos színű!

Egy dobozban 3 zöld és 3 piros golyó van. A dobozból csukott szemmel, visszatevés nélkül addig húzunk egymás után golyókat, amíg vagy a zöld vagy a piros golyók közül kihúzzuk mind a hármat.

c) Határozza meg a szükséges húzások számának várható értékét!

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. **a)** Melyik az a legnagyobb természetes szám, amelyre az alábbi négy tulajdonságból pontosan három teljesül?

(1) Húszjegyű.
(2) 20-szal osztható.
(3) Számjegyeinek összege 20.
(4) Számjegyeinek szorzata 20.

Legyen a H alaphalmaz a húszjegyű pozitív egész számok halmaza, az A halmaz pedig a 7-es számjegyet tartalmazó húszjegyű pozitív egész számok halmaza.

b) Melyik a nagyobb: $|A|$ vagy $|\overline{A}|$?

Az n jegyű pozitív egészek közül egyet véletlenszerűen kiválasztva 0,99-nél nagyobb annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám tartalmaz 7-es számjegyet.

c) Határozza meg n lehetséges értékeit!

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

<table>
<tr><td></td><td rowspan="2">a feladat sorszáma</td><td colspan="4">pontszám</td></tr>
<tr><td></td><td>maximális</td><td>elért</td><td>maximális</td><td>elért</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I. rész</td><td>1.</td><td>14</td><td></td><td rowspan="4">51</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>11</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II. rész</td><td></td><td>16</td><td></td><td rowspan="4">64</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">← nem választott feladat</td></tr>
<tr><td colspan="4">Az írásbeli vizsgarész pontszáma</td><td>115</td><td></td></tr>
</table>

dátum

javító tanár

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">pontszáma egész számra kerekítve</td></tr>
<tr><td></td><td>elért</td><td>programba beírt</td></tr>
<tr><td>I. rész</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II. rész</td><td></td><td></td></tr>
</table>

dátum

dátum

javító tanár

jegyző