ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

Összesen $\lvert H\rvert = 9\cdot 10^{19}$ darab húszjegyű szám van.	1 pont	
Ezt felhasználva: $\lvert A\rvert = \lvert H\rvert - \lvert\overline{A}\rvert = 9\cdot 10^{19} - 1{,}08\cdot 10^{19} = 7{,}92\cdot 10^{19}$,	1 pont	
tehát $\lvert A\rvert > \lvert\overline{A}\rvert$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) második megoldás		
(Először $\overline{A}$ elemszámát számítjuk ki.) Az első számjegy 8-féle lehet (nem lehet 0 és 7), a többi helyiérték mindegyikére 9-féle számjegyet írhatunk (egyik sem lehet 7),	1 pont	
így $\lvert\overline{A}\rvert = 8\cdot 9^{19}$.	1 pont	
Megadjuk azon húszjegyű számok számát, amelyekben pontosan egy darab 7-es számjegy szerepel, de az nem a legnagyobb helyiértéken található (ezek a számok A valódi részhalmazát alkotják). Ha már ez nagyobb, mint $\lvert\overline{A}\rvert$, akkor nyilván $\lvert A\rvert > \lvert\overline{A}\rvert$.	1 pont	
Az első helyiértéken 0 és 7 nem lehet, a 7-es számjegy 19 helyen lehet, a többi helyiérték mindegyikére pedig 9-féle számjegyet írhatunk. Ez $19\cdot 8\cdot 9^{18}$ lehetőség, ami több, mint $\lvert\overline{A}\rvert = 9\cdot 8\cdot 9^{18}$.	1 pont	
tehát $\lvert A\rvert > \lvert\overline{A}\rvert$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. c)		
Komplementer módszerrel dolgozunk: P(van benne 7-es) = 1 – P(nincs benne 7-es) =	1 pont	
$= 1 - \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$.	1 pont	
Így megoldandó az alábbi egyenlőtlenség: $1 - \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} > 0{,}99$.	1 pont	
Rendezve: $\frac{9}{800} > 0{,}9^{n-1}$.	1 pont	
Mivel az $x \mapsto \log_{0,9} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő,	1 pont	
$n > \log_{0,9}\frac{9}{800} + 1 \approx 43{,}59$,	1 pont	
tehát $n \geq 44$ ($n \in \mathbf{N}$).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. c)		
Jelölje $P(n)$ annak a valószínűségét, hogy n húzásra van szükség. ($P(1) = P(2) = P(6) = 0$) Három húzásra van szükség, ha a 2. és 3. húzás színe megegyezik az 1. húzás színével: $P(3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.	1 pont	$P(\text{ZZZ}) + P(\text{PPP}) =$ $= 2 \cdot \frac{1}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{10}$
4 húzásra van szükség és zöld a 4. húzás a PZZZ, ZPZZ vagy ZZPZ sorrendek esetén. Ugyanígy három megfelelő sorrend van akkor, ha piros a 4. húzás.	1 pont	
Minden ilyen húzási sorrend valószínűsége $\frac{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{20}$, tehát $P(4) = 6 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$.	1 pont	
5 húzásra akkor van szükség, ha az első 4 húzás között (a sorrendre való tekintet nélkül) 2-2 zöld és piros van.	1 pont	$P(5) = 1 - P(3) - P(4) = \frac{3}{5}$
Ennek a valószínűsége $P(5) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{3}{5}$.	1 pont	
A szükséges húzások számának várható értéke: $\sum_{i=3}^{5} P(i) \cdot i = \frac{1}{10} \cdot 3 + \frac{3}{10} \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 5 = 4{,}5$.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. a)		
(2) és (4) kizárják egymást, mert a 20-szal osztható számok 0-ra végződnek, így számjegyeik szorzata 0.	1 pont	
Tehát a másik két tulajdonságnak teljesülnie kell: a keresett szám biztosan húszjegyű, és számjegyeinek összege 20.	1 pont	
Az ilyen számok közül a legnagyobb a $992\underbrace{00...0}_{17\,\text{db}}$,	1 pont	
mely teljesíti a 20-szal való oszthatósági feltételt is (számjegyeinek szorzata viszont nem 20, így valóban pontosan három feltétel teljesül).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b) **első megoldás**		
(Először $\overline{A}$ elemszámát számítjuk ki.) Az első számjegy 8-féle lehet (nem lehet 0 és 7), a többi helyiérték mindegyikére 9-féle számjegyet írhatunk (egyik sem lehet 7),	1 pont	
így $\lvert \overline{A} \rvert = 8 \cdot 9^{19} \approx 1{,}08 \cdot 10^{19}$.	1 pont	

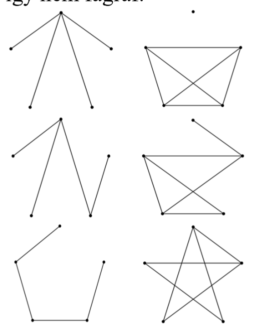
6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

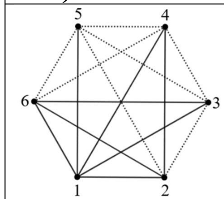
I.

1. a)		
Jelölje a cipők novemberi árát forintban x, y és z ($x \le y \le z$). A feladat szövege alapján megoldandó az alábbi egyenletrendszer: $\begin{cases} x+y+z=45\,000 \\ 0,5x+0,8y+z=37\,000 \\ 1,3x+y+z=48\,000. \end{cases}$	2 pont	
A harmadik egyenletből az elsőt kivonva: $0,3x = 3000$, amiből $x = 10\,000$.	1 pont	
Ezt visszahelyettesítve, és az első egyenletből a másodikat kivonva: $5000 + 0,2y = 8000$, amiből $y = 15\,000$.	1 pont	
Az első egyenletbe visszahelyettesítve: $10\,000 + 15\,000 + z = 45\,000$, amiből $z = 20\,000$.	1 pont	
Tehát a három cipő novemberi ára 10 000 Ft, 15 000 Ft és 20 000 Ft volt.	1 pont	
Ellenőrzés a szövegbe való behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b) első megoldás		
A számtani sorozat differenciáját jelölje d, ezzel a négy szám rendre 3, $3 + d$, $3 + 2d$, 25.	1 pont	
Az utolsó három szám mértani sorozatot alkot, ezért $\frac{3+2d}{3+d}=\frac{25}{3+2d}$.	1 pont	$(3+2d)^2=25(3+d)$
$9+12d+4d^2=75+25d$ Nullára rendezve: $4d^2-13d-66=0$.	2 pont	
Ennek gyökei $d_1 = 6$ és $d_2 = -2,75$.	1 pont	
A másik két szám ekkor vagy a (3 + 6 =) 9 és a (3 + 12 =) 15, vagy pedig a (3 – 2,75 =) 0,25 és a (3 – 5,5 =) –2,5.	1 pont	
Ellenőrzés: A 3, 9, 15 valóban egy (6 differenciájú) számtani, a 9, 15, 25 valóban egy ($\frac{5}{3}$ hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja. A 3, 0,25, –2,5 valóban egy (–2,75 differenciájú) számtani, a 0,25, –2,5, 25 egy (–10 hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. a) első megoldás		
Nem lehetséges.	1 pont	
G egy ötpontú fagráf, így 4 éle van.	1 pont	
Az ötpontú teljes gráfnak $\binom{5}{2}=10$ éle van.	1 pont	
G komplementerének így (10 – 4 =) 6 éle van, ezért nem lehet fagráf (mert annak csak 4 éle van).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. a) második megoldás		
Nem lehetséges.	1 pont	
Izomorfia erejéig három különböző ötpontú fagráf létezik, mindhárom komplementere tartalmaz kört, így nem fagráf. 	3 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. b)		
 (a zöld éleket folytonos, a piros éleket pontozott vonallal jelöltük)	1 pont	
A hat pont közül hármat $\binom{6}{3}=20$-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma).	1 pont	
A kedvező esetek száma 6 (zöld: 1-2-4, 1-2-6, 1-3-6; piros: 2-3-5, 3-4-5, 4-5-6).	2 pont	
A kérdezett valószínűség így $\frac{6}{20}=0,3$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. b) második megoldás		
Jelölje a doboz alapélét a, magasságát b. A doboz elkészítésének költsége ekkor $a^2 \cdot 4 + 4ab \cdot 3 = 4a^2 + 12ab = 300$ tallér.	1 pont	
(Keressük a^2b maximumát.) A számtani és mértani közepek közötti összefüggést használva: $300 = 4a^2 + 12ab = 12 \cdot \frac{a^2 + \frac{3}{2}ab + \frac{3}{2}ab}{3} \geq$ $\geq 12 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{3}{2}ab \cdot \frac{3}{2}ab}$.	2 pont	
Azaz $25 \geq \sqrt[3]{\frac{9}{4}a^4b^2}$,	1 pont	
amiből rendezés után $\frac{250}{3} \geq a^2b = V$ adódik, vagyis a térfogat maximum $\frac{250}{3}$ dm^3 lehet.	1 pont	
Ezt a maximumot fel is veszi a térfogat, ha a közepekben szereplő tagok egyenlők, vagyis ha $a^2 = \frac{3}{2}ab$, azaz $\frac{2}{3}a = b$.	1 pont	
$V = \frac{250}{3} = a^2b = a^2 \cdot \frac{2}{3}a = \frac{2a^3}{3}$,	1 pont	$300 = 4a^2 + 12 \cdot \frac{2}{3}a^2 = 12a^2$
amiből (a doboz alapéle) $a = 5$ dm, (a doboz magassága) $b = \frac{10}{3}$ dm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

7. c)		
Tegyük fel először, hogy az alaplap kék. Lehet minden oldallap piros, vagy minden oldallap kék, ez 1-1 lehetőség.	1 pont	
Lehet egy vagy három piros oldallap, ez is 1-1 lehetőség.	1 pont	
És lehet két piros oldallap, ez 2 lehetőség (vagy egymás mellett, vagy egymással szemben vannak).	1 pont	
Mivel ugyanígy (2 + 2 + 2 =) 6 lehetőség van akkor is, ha az alaplap piros, ezért összesen 12 megfelelő színezés van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor a teljes pontszám jár.

1. b) második megoldás		
A mértani sorozat hányadosát jelölje q, ezzel a négy szám rendre 3, $\frac{25}{q^2}$, $\frac{25}{q}$, 25.	1 pont	
Az első három szám számtani sorozatot alkot, ezért $\frac{25}{q^2} - 3 = \frac{25}{q} - \frac{25}{q^2}$.	1 pont	$2 \cdot \frac{25}{q^2} = \frac{25}{q} + 3$
$25 - 3q^2 = 25q - 25$ Nullára rendezve: $3q^2 + 25q - 50 = 0$.	2 pont	
Ennek gyökei $q_1 = \frac{5}{3}$ és $q_2 = -10$.	1 pont	
A másik két szám ekkor vagy a 9 és a 15, vagy pedig a 0,25 és a –2,5.	1 pont	
Ellenőrzés: A 3, 9, 15 valóban egy (6 differenciájú) számtani, a 9, 15, 25 valóban egy ($\frac{5}{3}$ hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja. A 3, 0,25, –2,5 valóban egy (–2,75 differenciájú) számtani, a 0,25, –2,5, 25 egy (–10 hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b) harmadik megoldás		
Ha a négy szám rendre 3, a, b, 25, akkor a feladat szövege alapján $b - a = a - 3$, tehát $b = 2a - 3$,	1 pont	$a = \frac{b+3}{2}$
továbbá $\frac{b}{a} = \frac{25}{b}$, tehát $b^2 = 25a$.	1 pont	
Itt b helyére $2a - 3$-at helyettesítve: $(2a-3)^2 = 25a$.	1 pont	*Itt az a helyére $\frac{b+3}{2}$-t helyettesítve és rendezve:* $b^2 - 12{,}5b - 37{,}5 = 0$.
Nullára rendezve: $4a^2 - 37a + 9 = 0$.	1 pont	
Ennek gyökei $a_1 = 9$ és $a_2 = 0{,}25$.	1 pont	
Innen $b_1 = 15$ és $b_2 = -2{,}5$.	1 pont	
Ellenőrzés: A 3, 9, 15 valóban egy (6 differenciájú) számtani, a 9, 15, 25 valóban egy ($\frac{5}{3}$ hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja. A 3, 0,25, –2,5 valóban egy (–2,75 differenciájú) számtani, a 0,25, –2,5, 25 egy (–10 hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. a)		
Behelyettesítve a megadott értékeket: $P(8)=\frac{E}{1+1,5\cdot 2^{-0,05\cdot 8}}=140$,	1 pont	
ahonnan $E=140\cdot(1+1,5\cdot 2^{-0,4})\approx 299$, tehát a sziget eltartóképessége ebből a fajból kb. 300 egyed.	2 pont	*Ha a vizsgázó válasza nem egész szám, akkor legfeljebb 1 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

2. b)		
$P(0)=\frac{1500}{1+k\cdot 2^{-c\cdot 0}}=\frac{1500}{1+k}=200$,	1 pont	
ahonnan 1 + k = 7,5, tehát k = 6,5.	1 pont	
$P(5)=\frac{1500}{1+6,5\cdot 2^{-5c}}=350$,	1 pont	
ahonnan $1+6,5\cdot 2^{-5c}=\frac{1500}{350}=\frac{30}{7}$,	1 pont	$350+2275\cdot 2^{-5c}=1500$
tehát $2^{-5c}=\frac{\frac{30}{7}-1}{6,5}\approx 0,5055$.	1 pont	$2^{-5c}=\frac{1150}{2275}=\frac{46}{91}$
$-5c=\log_2 0,5055\approx -0,9842$,	1 pont	
ahonnan $c\approx 0,197$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. c) első megoldás		
Mivel $P(t)=\frac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}$, így bizonyítandó, hogy nemnegatív t esetén $\frac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}\le E$.	1 pont	
A tört nevezője pozitív, mert a 2-nek tetszőleges valós kitevős hatványa, valamint k is pozitív.	1 pont	
A (pozitív) E-vel osztva, a tört (pozitív) nevezőjével szorozva: $1\le 1+k\cdot 2^{-ct}$.	1 pont	
$0\le k\cdot 2^{-ct}$, ami valóban teljesül. Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk (átalakításaink ekvivalensek voltak).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a) első megoldás		
Az alaplap területe 36 dm^2, anyagköltsége 144 tallér.	1 pont	
A négy oldallapra így legfeljebb (300 – 144 =) 156 tallér marad, oldallaponként tehát (156 : 4 =) 39 tallér.	1 pont	
Egy oldallap területe ekkor (39 : 3 =) 13 dm^2.	1 pont	
A doboz magassága így legfeljebb $\frac{13}{6}$ dm lehet.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a) második megoldás		
A doboz magasságát (dm-ben) jelölje m. A doboz anyagköltségére felírható a következő egyenlőtlenség: $6^2\cdot 4+4\cdot 6\cdot m\cdot 3\le 300$.	2 pont	*Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel számol, a megfelelő pontok járnak.*
144 + 72m ≤ 300, amiből $m\le\frac{13}{6}$. A doboz magassága így legfeljebb $\frac{13}{6}$ dm lehet.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b) első megoldás		
Jelölje a doboz alapélét a, magasságát b. A doboz elkészítésének költsége ekkor $a^2\cdot 4+4ab\cdot 3=4a^2+12ab=300$ tallér.	1 pont	
(Keressük a^2b maximumát.) Kifejezzük b-t: $b=\frac{300-4a^2}{12a}=\frac{25}{a}-\frac{a}{3}$,	1 pont	
és ezzel felírjuk a doboz térfogatát: $V=a^2b=a^2\left(\frac{25}{a}-\frac{a}{3}\right)=25a-\frac{a^3}{3}$.	1 pont	
A pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(a)=25a-\frac{a^3}{3}$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(a)=25-a^2$	1 pont	
$25-a^2=0$-ból ($a>0$ miatt) $a=5$, majd $b=\frac{10}{3}$.	1 pont	
$f''(a)=-2a<0$ miatt ez valóban maximumhelye f-nek.	1 pont	*Az első deriváltfüggvény előjele a = 5-ben pozitívról negatívra változik.*
A 300 tallérból elkészíthető maximális térfogatú doboz alapéle tehát 5 dm, magassága $\frac{10}{3}$ dm.	1 pont	*A maximális térfogat* $\frac{250}{3}$ dm^3.
Összesen:	**8 pont**	

6. c) második megoldás		
A függvény átalakítva: $x \mapsto \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c.$	1 pont	
Ennek minimumhelye $x = -\frac{b}{2} = 2$, amiből $b = -4$.	1 pont	
A függvény minimumértéke $-\frac{(-4)^2}{4} + c = -1$,	1 pont	
amiből $c = 3$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. c) harmadik megoldás		
A függvény deriváltfüggvénye $x \mapsto 2x + b$.	1 pont	
A függvény a minimumát $x = 2$-ben veszi fel, így a deriváltja itt nulla: $2 \cdot 2 + b = 0$, azaz $b = -4$.	1 pont	
Itt a függvényérték $(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + c = -1$,	1 pont	
amiből $c = 3$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. d)		
$\int_0^p \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^p =$	1 pont	
$= -\cos p - (-\cos 0) = \frac{1}{2}$,	1 pont	
amiből $-\cos p + 1 = \frac{1}{2}$, tehát $\cos p = \frac{1}{2}$.	1 pont	
A $[0; 2\pi]$ intervallumon $p_1 = \frac{\pi}{3}$,	1 pont	
és $p_2 = \frac{5\pi}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. c) második megoldás		
Mivel $P(t) = \frac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}$, így bizonyítandó, hogy nemnegatív t esetén $\frac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}} \le E$.	1 pont	
A $k \cdot 2^{-ct}$ kifejezés értéke pozitív, mert a 2-nek tetszőleges valós kitevős hatványa, valamint k is pozitív.	1 pont	
Így az $1 + k \cdot 2^{-ct}$ kifejezés értéke nagyobb 1-nél.	1 pont	
Az $\frac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}$ tört nevezője tehát 1-nél nagyobb, a tört értéke így valóban kisebb E-nél (hiszen $E > 0$).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

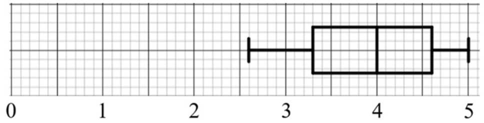
3. a)		
$a_2 = a_1 + 2$ $a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 5$ $a_4 = a_3 + 4 = a_1 + 9$	2 pont	
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 + 16 = 360$	1 pont	
Innen $a_1 = 86$.	1 pont	
Így a négyszög belső szögei 86º, 88º, 91º és 95º (amelyek megfelelnek a feltételeknek).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

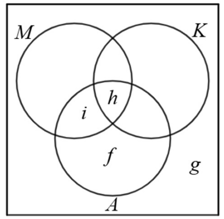
3. b) első megoldás		
Az ABC háromszögben szinusztétellel: $\frac{18}{20} = \frac{\sin BCA\sphericalangle}{\sin 70°}$,	1 pont	
ahonnan $BCA\sphericalangle \approx 57{,}75°$ (tompaszög nem lehet, mert rövidebb oldallal szemben kisebb szög van).	1 pont	
Így $CAB\sphericalangle = (180° - 70° - 57{,}75° =)\ 52{,}25°$, és $DAC\sphericalangle = (90° - 52{,}25° =)\ 37{,}75°$.	1 pont	
Az ABC háromszögben koszinusztétellel: $BC^2 = 20^2 + 18^2 - 2 \cdot 20 \cdot 18 \cdot \cos 52{,}25°$ $(\approx 283{,}2)$,	1 pont	*Az ABC háromszögben szinusztétellel:* $\frac{BC}{20} = \frac{\sin 52{,}25°}{\sin 70°}$,
ahonnan $BC \approx 16{,}83$ cm.	1 pont	
Az ACD háromszögben koszinusztétellel: $CD^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 37{,}75°$ $(\approx 150{,}6)$,	1 pont	
ahonnan $CD \approx 12{,}27$ cm.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

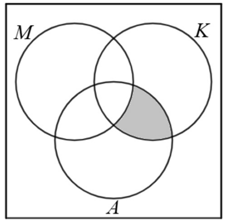
3. b) második megoldás		
Az ABD háromszögben Pitagorasz-tétellel: $BD=\sqrt{15^2+18^2}\approx 23{,}43$ cm.	1 pont	
$\operatorname{tg} ABD\sphericalangle=\frac{15}{18}$,	1 pont	
ahonnan $ABD\sphericalangle\approx 39{,}81°$, és így $DBC\sphericalangle=(70°-39{,}81°=)\ 30{,}19°$.	1 pont	
Az ABC háromszögben koszinusztétellel: $20^2=18^2+BC^2-2\cdot18\cdot BC\cdot\cos70°$. Rendezve: $BC^2-12{,}31\cdot BC-76=0$,	1 pont	
ennek pozitív gyöke $BC\approx 16{,}83$ cm (a negatív gyök $\approx -4{,}52$).	1 pont	
A DBC háromszögben koszinusztétellel: $CD^2=23{,}43^2+16{,}83^2-2\cdot23{,}43\cdot16{,}83\cdot\cos30{,}19°$,	1 pont	
ahonnan $CD\approx 12{,}27$ cm.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

4. a) első megoldás		
A keresett kör középpontja az AB szakasz felezőmerőlegesének és az y tengelynek a metszéspontja.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az AB szakasz felezőpontja: $F_{AB}\left(\frac{5+7}{2};\frac{14+6}{2}\right)=(6;10)$.	1 pont	
A felezőmerőleges egy normálvektora: $\overrightarrow{AB}(7-5;6-14)=(2;-8)$,	1 pont	$\mathbf{n}(1;-4)$
így az egyenlete: $2x-8y=(2\cdot6-8\cdot10=)\ -68$.	1 pont	$x-4y=-34$
$x=0$ esetén $y=8{,}5$, tehát a kör középpontjának koordinátái $(0;\ 8{,}5)$.	1 pont	
A kör sugara a középpont és például az A pont távolsága: $\sqrt{5^2+(14-8{,}5)^2}=\sqrt{55{,}25}$ ($\approx 7{,}43$).	1 pont	
A kör egyenlete $x^2+(y-8{,}5)^2=55{,}25$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

5. c)		
Mivel vannak kitűnő tanulók, ezért a maximum 5, a terjedelem miatt a minimum $5-2{,}4=2{,}6$.	1 pont	
	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. a)		
	1-1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. b)		
	1 pont	
Egy megfelelő függvény megadása, pl. $(\mathbf{R}\to\mathbf{R})\ x\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^x$ vagy $(\mathbf{R}\to\mathbf{R})\ x\mapsto x^2$.	2 pont	*1 pont jár, ha a megadott függvény a háromból csak két szempont szerint megfelelő.*
Összesen:	**3 pont**	

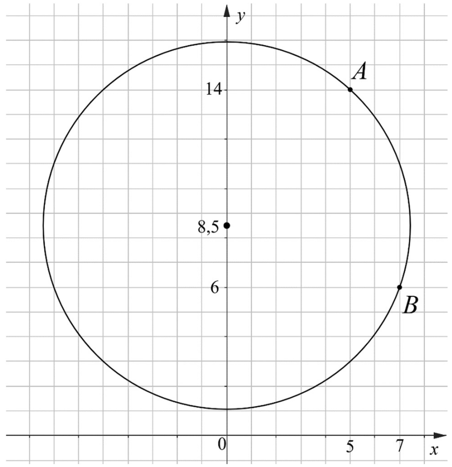
6. c) első megoldás		
A függvénygrafikon egy parabola, melynek tengelypontja $(2;-1)$, így a függvény hozzárendelési szabálya $x\mapsto(x-2)^2-1$.	2 pont	
$(x-2)^2-1=x^2-4x+3$,	1 pont	
amiből $b=-4$ és $c=3$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. a) második megoldás		
Ha az iskola fiú tanulóinak számát n-nel jelöljük, akkor a lányok száma $510 - n$.	1 pont	
A 13 az n-nek $\frac{13}{n} \cdot 100$ százaléka, a 20 az $(510 - n)$-nek a $\frac{20}{510-n} \cdot 100$ százaléka.	2 pont	
Így megoldandó a következő egyenlet: $\frac{13}{n} \cdot 100 + 3 = \frac{20}{510-n} \cdot 100$.	1 pont	
A nevezőkkel mindkét oldalt megszorozva: $1300 \cdot (510 - n) + 3n \cdot (510 - n) = 2000n$.	1 pont	
Nullára rendezve: $0 = n^2 + 590n - 221\,000$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet pozitív megoldása $n = 260$.	1 pont	
Tehát a fiúk száma 260, a lányok száma pedig 250.	1 pont	
Ellenőrzés: a 13 a 260-nak 5 százaléka, a 20 a 250-nek 8 százaléka, és 5 + 3 = 8 valóban.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

5. b) első megoldás		
A 13 fiú és a 20 lány közül 1 fiút és 2 lányt $\binom{13}{1}\binom{20}{2}$ (= 2470)-féleképpen lehet kiválasztani (kedvező esetek száma).	2 pont	
A 33 kitűnő tanuló közül 3-at $\binom{33}{3}$(= 5456)-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma).	1 pont	
Tehát a keresett valószínűség $\frac{\binom{13}{1}\binom{20}{2}}{\binom{33}{3}} \approx 0{,}453$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b) második megoldás		
Ha figyelembe vesszük a tanulók kiválasztásának sorrendjét, akkor annak a valószínűsége, hogy először fiút, majd ezután másodjára és harmadjára is lányt választunk: $\frac{13}{33} \cdot \frac{20}{32} \cdot \frac{19}{31}$ (≈ 0,151).	2 pont	
Mivel ugyanennyi annak a valószínűsége is, hogy a fiút másodjára vagy harmadjára választjuk, ezért a kérdezett valószínűség $3 \cdot \frac{13 \cdot 20 \cdot 19}{33 \cdot 32 \cdot 31} \approx 0{,}453$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

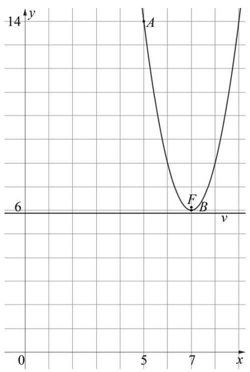
4. a) második megoldás		
A keresett kör y tengelyre illeszkedő középpontja legyen a $C(0; v)$ pont.	1 pont	
$CA = CB$, tehát $\sqrt{5^2 + (14-v)^2} = \sqrt{7^2 + (6-v)^2}$,	1 pont	
amiből $25 + 196 - 28v + v^2 = 49 + 36 - 12v + v^2$.	1 pont	
Innen $16v = 136$, azaz $v = 8{,}5$. Tehát a kör középpontjának koordinátái (0; 8,5).	2 pont	
A kör sugara a középpont és például a B pont távolsága: $\sqrt{7^2 + (6-8{,}5)^2} = \sqrt{55{,}25}$ (≈ 7,43).	1 pont	
A kör egyenlete $x^2 + (y - 8{,}5)^2 = 55{,}25$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	



4. b) első megoldás		
Mivel $B(7; 6)$ a parabola tengelypontja, ezért a parabola egyenlete: $y = \frac{1}{2p}(x-7)^2 + 6$.	1 pont	
Behelyettesítve az A pont koordinátáit: $14 = \frac{1}{2p}(5-7)^2 + 6$.	1 pont	
$8 = \frac{4}{2p}$,	1 pont	
amiből $p = \frac{1}{4}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. b) második megoldás		
Ha a „felfelé nyíló” parabola tengelypontja $B(7; 6)$ és paramétere p, akkor fókuszpontja $\left(7; 6+\frac{p}{2}\right)$, vezéregyenesének egyenlete pedig $y=6-\frac{p}{2}$.	1 pont	
Az A pont illeszkedik a parabolára, így egyenlő távolságra van a fókuszponttól és a (parabola alatt levő) vezéregyenestől: $\sqrt{(5-7)^2+\left(14-\left(6+\frac{p}{2}\right)\right)^2}=14-\left(6-\frac{p}{2}\right)$.	1 pont	
Négyzetre emelve (mindkét oldal pozitív): $68-8p+\frac{p^2}{4}=64+8p+\frac{p^2}{4}$,	1 pont	
amiből $p=\frac{1}{4}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. b) harmadik megoldás		
Toljuk el (a (7; 6) vektorral) a koordináta-rendszert úgy, hogy az origó a B pont legyen. Ebben a koordináta-rendszerben az A pont koordinátái (–2; 8).	1 pont	
Az origó tengelypontú parabola egyenlete $y=\frac{1}{2p}x^2$.	1 pont	
Ebbe az A pont (új) koordinátáit behelyettesítve: $8=\frac{1}{2p}\cdot(-2)^2$,	1 pont	
amiből $p=\frac{1}{4}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	



II.

5. a) első megoldás		
Ha az iskola fiú tanulóinak számát n-nel jelöljük, akkor a lányok száma 510 – n.	1 pont	
Megoldandó a következő egyenletrendszer: $\begin{cases} n\cdot\frac{p}{100}=13 \\ (510-n)\cdot\frac{p+3}{100}=20. \end{cases}$	1 pont	
Rendezve az egyenleteket: $\begin{cases} np=1300 \\ 510p-np+1530-3n=2000. \end{cases}$	1 pont	
A két egyenletet összeadva: $510p+1530-3n=3300$,	1 pont*	
amiből $n=\frac{510p-1770}{3}=170p-590$.	1 pont*	$p=\frac{n}{170}+\frac{59}{17}$
Ezt az első egyenletbe visszaírva: $(170p-590)\cdot p=1300$, majd 10-zel osztva és nullára rendezve: $17p^2-59p-130=0$.	1 pont*	$n\cdot\left(\frac{n}{170}+\frac{59}{17}\right)=1300$ $0=n^2+590n-221\,000$
A másodfokú egyenlet pozitív megoldása $p=5$ (a másik megoldás $-\frac{26}{17}$), ahonnan $n=260$.	1 pont	$n_1=260$ ($n_2=-850$) $p=5$
Tehát a fiúk száma 260, a lányok száma pedig 250.	1 pont	
Ellenőrzés: $260\cdot0{,}05=13$ és $250\cdot0{,}08=20$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az első egyenletből $n=\frac{1300}{p}$.	1 pont	
Ezt a második egyenletbe visszaírva: $510p-1300+1530-3\cdot\frac{1300}{p}=2000$.	1 pont	
Beszorozva p-vel és nullára rendezve: $510p^2-1770p-3900=0$.	1 pont	