ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. május 6.

# MATEMATIKA

# EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

# JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**OKTATÁSI HIVATAL**

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a $\pi$ és az $e$ szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

# I.

| **1. a)** | | |
|---|---|---|
| Jelölje a cipők novemberi árát forintban $x$, $y$ és $z$ ($x \le y \le z$). A feladat szövege alapján megoldandó az alábbi egyenletrendszer: $\begin{cases} x+y+z=45\,000 \\ 0,5x+0,8y+z=37\,000 \\ 1,3x+y+z=48\,000. \end{cases}$ | 2 pont | |
| A harmadik egyenletből az elsőt kivonva: $0,3x = 3000$, amiből $x = 10\,000$. | 1 pont | |
| Ezt visszahelyettesítve, és az első egyenletből a második kivonva: $5000 + 0,2y = 8000$, amiből $y = 15\,000$. | 1 pont | |
| Az első egyenletbe visszahelyettesítve: $10\,000 + 15\,000 + z = 45\,000$, amiből $z = 20\,000$. | 1 pont | |
| Tehát a három cipő novemberi ára 10 000 Ft, 15 000 Ft és 20 000 Ft volt. | 1 pont | |
| Ellenőrzés a szövegbe való behelyettesítéssel. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **1. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A számtani sorozat differenciáját jelölje $d$, ezzel a négy szám rendre 3, $3 + d$, $3 + 2d$, 25. | 1 pont | |
| Az utolsó három szám mértani sorozatot alkot, ezért $\frac{3+2d}{3+d} = \frac{25}{3+2d}$. | 1 pont | $(3+2d)^2 = 25(3+d)$ |
| $9+12d+4d^2 = 75+25d$ Nullára rendezve: $4d^2-13d-66=0$. | 2 pont | |
| Ennek gyökei $d_1 = 6$ és $d_2 = -2,75$. | 1 pont | |
| A másik két szám ekkor vagy a (3 + 6 =) 9 és a (3 + 12 =) 15, vagy pedig a (3 – 2,75 =) 0,25 és a (3 – 5,5 =) –2,5. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: A 3, 9, 15 valóban egy (6 differenciájú) számtani, a 9, 15, 25 valóban egy ($\frac{5}{3}$ hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja. A 3, 0,25, –2,5 valóban egy (–2,75 differenciájú) számtani, a 0,25, –2,5, 25 egy (–10 hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **1. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A mértani sorozat hányadosát jelölje $q$, ezzel a négy szám rendre 3, $\frac{25}{q^2}$, $\frac{25}{q}$, 25. | 1 pont | |
| Az első három szám számtani sorozatot alkot, ezért $\frac{25}{q^2}-3=\frac{25}{q}-\frac{25}{q^2}$. | 1 pont | $2\cdot\frac{25}{q^2}=\frac{25}{q}+3$ |
| $25-3q^2=25q-25$ Nullára rendezve: $3q^2+25q-50=0$. | 2 pont | |
| Ennek gyökei $q_1=\frac{5}{3}$ és $q_2=-10$. | 1 pont | |
| A másik két szám ekkor vagy a 9 és a 15, vagy pedig a 0,25 és a –2,5. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: A 3, 9, 15 valóban egy (6 differenciájú) számtani, a 9, 15, 25 valóban egy ($\frac{5}{3}$ hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja. A 3, 0,25, –2,5 valóban egy (–2,75 differenciájú) számtani, a 0,25, –2,5, 25 egy (–10 hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **1. b) harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha a négy szám rendre 3, $a$, $b$, 25, akkor a feladat szövege alapján $b-a=a-3$, tehát $b=2a-3$, | 1 pont | $a=\frac{b+3}{2}$ |
| továbbá $\frac{b}{a}=\frac{25}{b}$, tehát $b^2=25a$. | 1 pont | |
| Itt $b$ helyére $2a-3$-at helyettesítve: $(2a-3)^2=25a$. | 1 pont | *Itt az a helyére* $\frac{b+3}{2}$*-t helyettesítve és rendezve:* $b^2-12,5b-37,5=0$. |
| Nullára rendezve: $4a^2-37a+9=0$. | 1 pont | |
| Ennek gyökei $a_1=9$ és $a_2=0,25$. | 1 pont | |
| Innen $b_1=15$ és $b_2=-2,5$. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: A 3, 9, 15 valóban egy (6 differenciájú) számtani, a 9, 15, 25 valóban egy ($\frac{5}{3}$ hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja. A 3, 0,25, –2,5 valóban egy (–2,75 differenciájú) számtani, a 0,25, –2,5, 25 egy (–10 hányadosú) mértani sorozat három egymást követő tagja. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **2. a)** | | |
|---|---|---|
| Behelyettesítve a megadott értékeket: $P(8)=\dfrac{E}{1+1,5\cdot 2^{-0,05\cdot 8}}=140$, | 1 pont | |
| ahonnan $E=140\cdot(1+1,5\cdot 2^{-0,4})\approx 299$, tehát a sziget eltartóképessége ebből a fajból kb. 300 egyed. | 2 pont | *Ha a vizsgázó válasza nem egész szám, akkor legfeljebb 1 pont jár.* |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **2. b)** | | |
|---|---|---|
| $P(0)=\dfrac{1500}{1+k\cdot 2^{-c\cdot 0}}=\dfrac{1500}{1+k}=200$, | 1 pont | |
| ahonnan $1+k=7,5$, tehát $k=6,5$. | 1 pont | |
| $P(5)=\dfrac{1500}{1+6,5\cdot 2^{-5c}}=350$, | 1 pont | |
| ahonnan $1+6,5\cdot 2^{-5c}=\dfrac{1500}{350}=\dfrac{30}{7}$, | 1 pont | $350+2275\cdot 2^{-5c}=1500$ |
| tehát $2^{-5c}=\dfrac{\frac{30}{7}-1}{6,5}\approx 0,5055$. | 1 pont | $2^{-5c}=\dfrac{1150}{2275}=\dfrac{46}{91}$ |
| $-5c=\log_2 0,5055\approx -0,9842$, | 1 pont | |
| ahonnan $c\approx 0,197$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **2. c) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Mivel $P(t)=\dfrac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}$, így bizonyítandó, hogy nemnegatív $t$ esetén $\dfrac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}\le E$. | 1 pont | |
| A tört nevezője pozitív, mert a 2-nek tetszőleges valós kitevős hatványa, valamint $k$ is pozitív. | 1 pont | |
| A (pozitív) $E$-vel osztva, a tört (pozitív) nevezőjével szorozva: $1\le 1+k\cdot 2^{-ct}$. | 1 pont | |
| $0\le k\cdot 2^{-ct}$, ami valóban teljesül. Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk (átalakításaink ekvivalensek voltak). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **2. c)** második megoldás | | |
|---|---|---|
| Mivel $P(t)=\dfrac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}$, így bizonyítandó, hogy nem-negatív $t$ esetén $\dfrac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}\le E$. | 1 pont | |
| A $k\cdot 2^{-ct}$ kifejezés értéke pozitív, mert a 2-nek tetszőleges valós kitevős hatványa, valamint $k$ is pozitív. | 1 pont | |
| Így az $1+k\cdot 2^{-ct}$ kifejezés értéke nagyobb 1-nél. | 1 pont | |
| Az $\dfrac{E}{1+k\cdot 2^{-ct}}$ tört nevezője tehát 1-nél nagyobb, a tört értéke így valóban kisebb $E$-nél (hiszen $E > 0$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **3. a)** | | |
|---|---|---|
| $a_2=a_1+2$<br>$a_3=a_2+3=a_1+5$<br>$a_4=a_3+4=a_1+9$ | 2 pont | |
| $a_1+a_2+a_3+a_4=4a_1+16=360$ | 1 pont | |
| Innen $a_1=86$. | 1 pont | |
| Így a négyszög belső szögei 86º, 88º, 91º és 95º (amelyek megfelelnek a feltételeknek). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

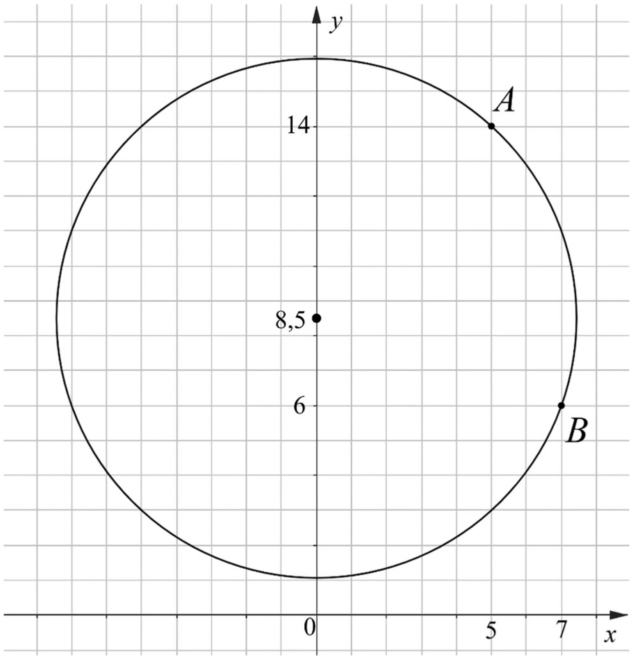
| **3. b)** első megoldás | | |
|---|---|---|
| Az $ABC$ háromszögben szinusztétellel: $\dfrac{18}{20}=\dfrac{\sin BCA\sphericalangle}{\sin 70°}$, | 1 pont | |
| ahonnan $BCA\sphericalangle \approx 57{,}75°$ (tompaszög nem lehet, mert rövidebb oldallal szemben kisebb szög van). | 1 pont | |
| Így $CAB\sphericalangle = (180° - 70° - 57{,}75° =)\ 52{,}25°$, és $DAC\sphericalangle = (90° - 52{,}25° =)\ 37{,}75°$. | 1 pont | |
| Az $ABC$ háromszögben koszinusztétellel: $BC^2=20^2+18^2-2\cdot 20\cdot 18\cdot\cos 52{,}25°$ ($\approx 283{,}2$), | 1 pont | *Az ABC háromszögben szinusztétellel:* $\dfrac{BC}{20}=\dfrac{\sin 52{,}25°}{\sin 70°}$, |
| ahonnan $BC \approx 16{,}83$ cm. | 1 pont | |
| Az $ACD$ háromszögben koszinusztétellel: $CD^2=20^2+15^2-2\cdot 20\cdot 15\cdot\cos 37{,}75°$ ($\approx 150{,}6$), | 1 pont | |
| ahonnan $CD \approx 12{,}27$ cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **3. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az $ABD$ háromszögben Pitagorasz-tétellel: $BD=\sqrt{15^2+18^2}\approx 23{,}43$ cm. | 1 pont | |
| $\operatorname{tg} ABD\sphericalangle=\frac{15}{18}$, | 1 pont | |
| ahonnan $ABD\sphericalangle\approx 39{,}81°$,<br>és így $DBC\sphericalangle=(70°-39{,}81°=)\ 30{,}19°$. | 1 pont | |
| Az $ABC$ háromszögben koszinusztétellel:<br>$20^2=18^2+BC^2-2\cdot 18\cdot BC\cdot\cos 70°$.<br>Rendezve: $BC^2-12{,}31\cdot BC-76=0$, | 1 pont | |
| ennek pozitív gyöke $BC\approx 16{,}83$ cm (a negatív gyök $\approx -4{,}52$). | 1 pont | |
| A $DBC$ háromszögben koszinusztétellel:<br>$CD^2=23{,}43^2+16{,}83^2-2\cdot 23{,}43\cdot 16{,}83\cdot\cos 30{,}19°$, | 1 pont | |
| ahonnan $CD\approx 12{,}27$ cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.*

| **4. a)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A keresett kör középpontja az $AB$ szakasz felezőmerőlegesének és az $y$ tengelynek a metszéspontja. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Az $AB$ szakasz felezőpontja:<br>$F_{AB}\left(\frac{5+7}{2};\frac{14+6}{2}\right)=(6;10)$. | 1 pont | |
| A felezőmerőleges egy normálvektora:<br>$\overrightarrow{AB}(7-5;6-14)=(2;-8)$, | 1 pont | $\mathbf{n}(1;-4)$ |
| így az egyenlete: $2x-8y=(2\cdot 6-8\cdot 10=)\ -68$. | 1 pont | $x-4y=-34$ |
| $x=0$ esetén $y=8{,}5$,<br>tehát a kör középpontjának koordinátái $(0;\ 8{,}5)$. | 1 pont | |
| A kör sugara a középpont és például az $A$ pont távolsága: $\sqrt{5^2+(14-8{,}5)^2}=\sqrt{55{,}25}$ $(\approx 7{,}43)$. | 1 pont | |
| A kör egyenlete $x^2+(y-8{,}5)^2=55{,}25$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

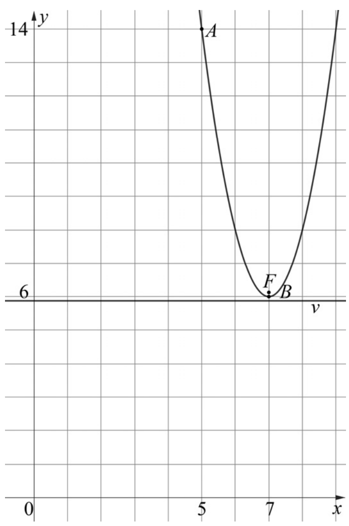
| **4. a) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A keresett kör $y$ tengelyre illeszkedő középpontja legyen a $C(0;\, v)$ pont. | 1 pont | |
| $CA = CB$, tehát $\sqrt{5^2+(14-v)^2} = \sqrt{7^2+(6-v)^2}$, | 1 pont | |
| amiből $25+196-28v+v^2 = 49+36-12v+v^2$. | 1 pont | |
| Innen $16v = 136$, azaz $v = 8{,}5$.<br>Tehát a kör középpontjának koordinátái $(0;\, 8{,}5)$. | 2 pont | |
| A kör sugara a középpont és például a $B$ pont távolsága: $\sqrt{7^2+(6-8{,}5)^2} = \sqrt{55{,}25}$ ($\approx 7{,}43$). | 1 pont | |
| A kör egyenlete $x^2+(y-8{,}5)^2 = 55{,}25$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |




| **4. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Mivel $B(7;\, 6)$ a parabola tengelypontja,<br>ezért a parabola egyenlete: $y = \frac{1}{2p}(x-7)^2+6$. | 1 pont | |
| Behelyettesítve az $A$ pont koordinátáit:<br>$14 = \frac{1}{2p}(5-7)^2+6$. | 1 pont | |
| $8 = \frac{4}{2p}$, | 1 pont | |
| amiből $p = \frac{1}{4}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **4. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha a „felfelé nyíló” parabola tengelypontja $B(7;\,6)$ és paramétere $p$, akkor fókuszpontja $\left(7;\,6+\frac{p}{2}\right)$, vezéregyenesének egyenlete pedig $y=6-\frac{p}{2}$. | 1 pont | |
| Az $A$ pont illeszkedik a parabolára, így egyenlő távolságra van a fókuszponttól és a (parabola alatt levő) vezéregyenestől: $\sqrt{(5-7)^2+\left(14-\left(6+\frac{p}{2}\right)\right)^2}=14-\left(6-\frac{p}{2}\right)$. | 1 pont | |
| Négyzetre emelve (mindkét oldal pozitív): $68-8p+\frac{p^2}{4}=64+8p+\frac{p^2}{4}$, | 1 pont | |
| amiből $p=\frac{1}{4}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **4. b)** **harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Toljuk el (a (7; 6) vektorral) a koordináta-rendszert úgy, hogy az origó a $B$ pont legyen. Ebben a koordináta-rendszerben az $A$ pont koordinátái (–2; 8). | 1 pont | |
| Az origó tengelypontú parabola egyenlete $y=\frac{1}{2p}x^2$. | 1 pont | |
| Ebbe az $A$ pont (új) koordinátáit behelyettesítve: $8=\frac{1}{2p}\cdot(-2)^2$, | 1 pont | |
| amiből $p=\frac{1}{4}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |



# II.

| **5. a) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha az iskola fiú tanulóinak számát $n$-nel jelöljük, akkor a lányok száma $510 - n$. | 1 pont | |
| Megoldandó a következő egyenletrendszer: $\begin{cases} n \cdot \frac{p}{100} = 13 \\ (510 - n) \cdot \frac{p+3}{100} = 20. \end{cases}$ | 1 pont | |
| Rendezve az egyenleteket: $\begin{cases} np = 1300 \\ 510p - np + 1530 - 3n = 2000. \end{cases}$ | 1 pont | |
| A két egyenletet összeadva: $510p + 1530 - 3n = 3300$, | 1 pont* | |
| amiből $n = \frac{510p - 1770}{3} = 170p - 590$. | 1 pont* | $p = \frac{n}{170} + \frac{59}{17}$ |
| Ezt az első egyenletbe visszaírva: $(170p - 590) \cdot p = 1300$, majd 10-zel osztva és nullára rendezve: $17p^2 - 59p - 130 = 0$. | 1 pont* | $n \cdot \left( \frac{n}{170} + \frac{59}{17} \right) = 1300$<br>$0 = n^2 + 590n - 221\,000$ |
| A másodfokú egyenlet pozitív megoldása $p = 5$ (a másik megoldás $-\frac{26}{17}$), ahonnan $n = 260$. | 1 pont | $n_1 = 260$ ($n_2 = -850$)<br>$p = 5$ |
| Tehát a fiúk száma 260, a lányok száma pedig 250. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: $260 \cdot 0{,}05 = 13$ és $250 \cdot 0{,}08 = 20$ valóban. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

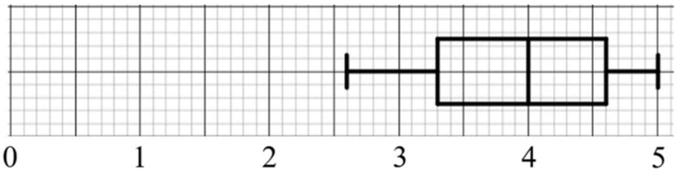
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

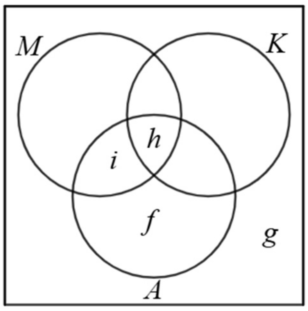
| | | |
|---|---|---|
| Az első egyenletből $n = \frac{1300}{p}$. | 1 pont | |
| Ezt a második egyenletbe visszaírva: $510p - 1300 + 1530 - 3 \cdot \frac{1300}{p} = 2000$. | 1 pont | |
| Beszorozva $p$-vel és nullára rendezve: $510p^2 - 1770p - 3900 = 0$. | 1 pont | |

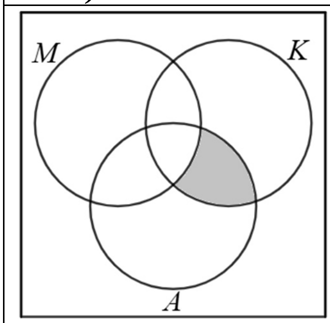
| **5. a)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha az iskola fiú tanulóinak számát $n$-nel jelöljük, akkor a lányok száma $510 - n$. | 1 pont | |
| A 13 az $n$-nek $\frac{13}{n}\cdot 100$ százaléka, a 20 az $(510 - n)$-nek a $\frac{20}{510-n}\cdot 100$ százaléka. | 2 pont | |
| Így megoldandó a következő egyenlet: $\frac{13}{n}\cdot 100+3=\frac{20}{510-n}\cdot 100$. | 1 pont | |
| A nevezőkkel mindkét oldalt megszorozva: $1300\cdot(510-n)+3n\cdot(510-n)=2000n$. | 1 pont | |
| Nullára rendezve: $0=n^2+590n-221\,000$. | 1 pont | |
| A másodfokú egyenlet pozitív megoldása $n = 260$. | 1 pont | |
| Tehát a fiúk száma 260, a lányok száma pedig 250. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: a 13 a 260-nak 5 százaléka, a 20 a 250-nek 8 százaléka, és $5 + 3 = 8$ valóban. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

| **5. b)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A 13 fiú és a 20 lány közül 1 fiút és 2 lányt $\binom{13}{1}\binom{20}{2}$ (= 2470)-féleképpen lehet kiválasztani (kedvező esetek száma). | 2 pont | |
| A 33 kitűnő tanuló közül 3-at $\binom{33}{3}$ (= 5456)-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma). | 1 pont | |
| Tehát a keresett valószínűség $\frac{\binom{13}{1}\binom{20}{2}}{\binom{33}{3}}\approx 0{,}453$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **5. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha figyelembe vesszük a tanulók kiválasztásának sorrendjét, akkor annak a valószínűsége, hogy először fiút, majd ezután másodjára és harmadjára is lányt választunk: $\frac{13}{33}\cdot\frac{20}{32}\cdot\frac{19}{31}$ ($\approx 0{,}151$). | 2 pont | |
| Mivel ugyanennyi annak a valószínűsége is, hogy a fiút másodjára vagy harmadjára választjuk, ezért a kérdezett valószínűség $3\cdot\frac{13\cdot 20\cdot 19}{33\cdot 32\cdot 31}\approx 0{,}453$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **5. c)** | | |
|---|---|---|
| Mivel vannak kitűnő tanulók, ezért a maximum 5, a terjedelem miatt a minimum 5 – 2,4 = 2,6. | 1 pont | |
|  | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **6. a)** | | |
|---|---|---|
|  | 1-1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **6. b)** | | |
|---|---|---|
|  | 1 pont | |
| Egy megfelelő függvény megadása, pl. $(\mathbf{R} \to \mathbf{R})\ x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ vagy $(\mathbf{R} \to \mathbf{R})\ x \mapsto x^2$. | 2 pont | *1 pont jár, ha a megadott függvény a háromból csak két szempont szerint megfelelő.* |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **6. c) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A függvénygrafikon egy parabola, melynek tengelypontja (2; –1), így a függvény hozzárendelési szabálya $x \mapsto (x-2)^2 - 1$. | 2 pont | |
| $(x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$, | 1 pont | |
| amiből $b = -4$ és $c = 3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **6. c)** második megoldás | | |
|---|---|---|
| A függvény átalakítva: $x \mapsto \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$. | 1 pont | |
| Ennek minimumhelye $x = -\frac{b}{2} = 2$, amiből $b = -4$. | 1 pont | |
| A függvény minimumértéke $-\frac{(-4)^2}{4} + c = -1$, | 1 pont | |
| amiből $c = 3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **6. c)** harmadik megoldás | | |
|---|---|---|
| A függvény deriváltfüggvénye $x \mapsto 2x + b$. | 1 pont | |
| A függvény a minimumát $x = 2$-ben veszi fel, így a deriváltja itt nulla: $2 \cdot 2 + b = 0$, azaz $b = -4$. | 1 pont | |
| Itt a függvényérték $(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + c = -1$, | 1 pont | |
| amiből $c = 3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **6. d)** | | |
|---|---|---|
| $\int_0^p \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^p =$ | 1 pont | |
| $= -\cos p - (-\cos 0) = \frac{1}{2}$, | 1 pont | |
| amiből $-\cos p + 1 = \frac{1}{2}$, tehát $\cos p = \frac{1}{2}$. | 1 pont | |
| A $[0; 2\pi]$ intervallumon $p_1 = \frac{\pi}{3}$, | 1 pont | |
| és $p_2 = \frac{5\pi}{3}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **7. a) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az alaplap területe 36 dm$^2$, anyagköltsége 144 tallér. | 1 pont | |
| A négy oldallapra így legfeljebb (300 – 144 =) 156 tallér marad, oldallaponként tehát (156 : 4 =) 39 tallér. | 1 pont | |
| Egy oldallap területe ekkor (39 : 3 =) 13 dm$^2$. | 1 pont | |
| A doboz magassága így legfeljebb $\frac{13}{6}$ dm lehet. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **7. a) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A doboz magasságát (dm-ben) jelölje *m*. A doboz anyagköltségére felírható a következő egyenlőtlenség: $6^2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot m \cdot 3 \le 300$. | 2 pont | *Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel számol, a megfelelő pontok járnak.* |
| $144 + 72m \le 300$, amiből $m \le \frac{13}{6}$. A doboz magassága így legfeljebb $\frac{13}{6}$ dm lehet. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **7. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Jelölje a doboz alapélét *a*, magasságát *b*. A doboz elkészítésének költsége ekkor $a^2 \cdot 4 + 4ab \cdot 3 = 4a^2 + 12ab = 300$ tallér. | 1 pont | |
| (Keressük $a^2b$ maximumát.) Kifejezzük *b*-t: $b = \frac{300 - 4a^2}{12a} = \frac{25}{a} - \frac{a}{3}$, | 1 pont | |
| és ezzel felírjuk a doboz térfogatát: $V = a^2b = a^2\left(\frac{25}{a} - \frac{a}{3}\right) = 25a - \frac{a^3}{3}$. | 1 pont | |
| A pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(a) = 25a - \frac{a^3}{3}$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $f'(a) = 25 - a^2$ | 1 pont | |
| $25 - a^2 = 0$-ból ($a > 0$ miatt) $a = 5$, majd $b = \frac{10}{3}$. | 1 pont | |
| $f''(a) = -2a < 0$ miatt ez valóban maximumhelye *f*-nek. | 1 pont | *Az első deriváltfüggvény előjele a = 5-ben pozitívról negatívra változik.* |
| A 300 tallérból elkészíthető maximális térfogatú doboz alapéle tehát 5 dm, magassága $\frac{10}{3}$ dm. | 1 pont | *A maximális térfogat* $\frac{250}{3}$ dm$^3$. |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

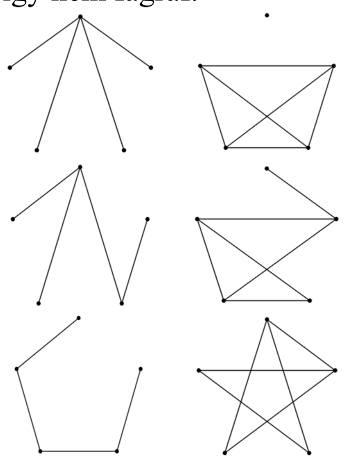
| **7. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Jelölje a doboz alapélét $a$, magasságát $b$.<br>A doboz elkészítésének költsége ekkor<br>$a^2 \cdot 4 + 4ab \cdot 3 = 4a^2 + 12ab = 300$ tallér. | 1 pont | |
| (Keressük $a^2 b$ maximumát.)<br>A számtani és mértani közepek közötti összefüggést<br>használva: $300 = 4a^2 + 12ab = 12 \cdot \frac{a^2 + \frac{3}{2}ab + \frac{3}{2}ab}{3} \geq$<br>$\geq 12 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{3}{2}ab \cdot \frac{3}{2}ab}$. | 2 pont | |
| Azaz $25 \geq \sqrt[3]{\frac{9}{4}a^4 b^2}$, | 1 pont | |
| amiből rendezés után $\frac{250}{3} \geq a^2 b = V$ adódik,<br>vagyis a térfogat maximum $\frac{250}{3}$ dm$^3$ lehet. | 1 pont | |
| Ezt a maximumot fel is veszi a térfogat, ha a közepekben szereplő tagok egyenlők, vagyis ha<br>$a^2 = \frac{3}{2}ab,$ azaz $\frac{2}{3}a = b.$ | 1 pont | |
| $V = \frac{250}{3} = a^2 b = a^2 \cdot \frac{2}{3}a = \frac{2a^3}{3}$, | 1 pont | $300 = 4a^2 + 12 \cdot \frac{2}{3}a^2 = 12a^2$ |
| amiből (a doboz alapéle) $a$ = 5 dm, (a doboz magassága) $b = \frac{10}{3}$ dm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

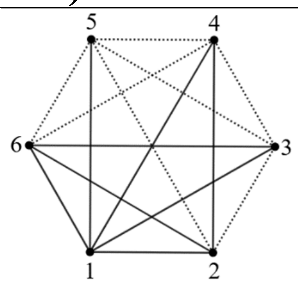
*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.*

| **7. c)** | | |
|---|---|---|
| Tegyük fel először, hogy az alaplap kék.<br>Lehet minden oldallap piros, vagy minden oldallap kék, ez 1-1 lehetőség. | 1 pont | |
| Lehet egy vagy három piros oldallap, ez is 1-1 lehetőség. | 1 pont | |
| És lehet két piros oldallap, ez 2 lehetőség (vagy egymás mellett, vagy egymással szemben vannak). | 1 pont | |
| Mivel ugyanígy (2 + 2 + 2 =) 6 lehetőség van akkor is, ha az alaplap piros, ezért összesen 12 megfelelő színezés van. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor a teljes pontszám jár.*

| **8. a)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Nem lehetséges. | 1 pont | |
| $G$ egy ötpontú fagráf, így 4 éle van. | 1 pont | |
| Az ötpontú teljes gráfnak $\binom{5}{2}=10$ éle van. | 1 pont | |
| $G$ komplementerének így (10 – 4 =) 6 éle van, ezért nem lehet fagráf (mert annak csak 4 éle van). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **8. a)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Nem lehetséges. | 1 pont | |
| Izomorfia erejéig három különböző ötpontú fagráf létezik, mindhárom komplementere tartalmaz kört, így nem fagráf.  | 3 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **8. b)** | | |
|---|---|---|
|   (a zöld éleket folytonos, a piros éleket pontozott vonallal jelöltük) | 1 pont | |
| A hat pont közül hármat $\binom{6}{3}$ = 20-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma). | 1 pont | |
| A kedvező esetek száma 6 (zöld: 1-2-4, 1-2-6, 1-3-6; piros: 2-3-5, 3-4-5, 4-5-6). | 2 pont | |
| A kérdezett valószínűség így $\frac{6}{20}=0,3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| 8. c) | | |
|---|---|---|
| Jelölje $P(n)$ annak a valószínűségét, hogy $n$ húzásra van szükség. ($P(1) = P(2) = P(6) = 0$) Három húzásra van szükség, ha a 2. és 3. húzás színe megegyezik az 1. húzás színével: $P(3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$. | 1 pont | $P(\text{ZZZ}) + P(\text{PPP}) = $ $= 2 \cdot \frac{1}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{10}$ |
| 4 húzásra van szükség és zöld a 4. húzás a PZZZ, ZPZZ vagy ZZPZ sorrendek esetén. Ugyanígy három megfelelő sorrend van akkor, ha piros a 4. húzás. | 1 pont | |
| Minden ilyen húzási sorrend valószínűsége $\frac{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{20}$, tehát $P(4) = 6 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$. | 1 pont | |
| 5 húzásra akkor van szükség, ha az első 4 húzás között (a sorrendre való tekintet nélkül) 2-2 zöld és piros van. | 1 pont | $P(5) = 1 - P(3) - P(4) = \frac{3}{5}$ |
| Ennek a valószínűsége $P(5) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{3}{5}$. | 1 pont | |
| A szükséges húzások számának várható értéke: $\sum_{i=3}^{5} P(i) \cdot i = \frac{1}{10} \cdot 3 + \frac{3}{10} \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 5 = 4,5$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| 9. a) | | |
|---|---|---|
| (2) és (4) kizárják egymást, mert a 20-szal osztható számok 0-ra végződnek, így számjegyeik szorzata 0. | 1 pont | |
| Tehát a másik két tulajdonságnak teljesülnie kell: a keresett szám biztosan húszjegyű, és számjegyeinek összege 20. | 1 pont | |
| Az ilyen számok közül a legnagyobb a $992\underbrace{00...0}_{17\text{ db}}$, | 1 pont | |
| mely teljesíti a 20-szal való oszthatósági feltételt is (számjegyeinek szorzata viszont nem 20, így valóban pontosan három feltétel teljesül). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 9. b) **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| (Először $\overline{A}$ elemszámát számítjuk ki.) Az első számjegy 8-féle lehet (nem lehet 0 és 7), a többi helyiérték mindegyikére 9-féle számjegyet írhatunk (egyik sem lehet 7), | 1 pont | |
| így $\lvert\overline{A}\rvert = 8 \cdot 9^{19} \approx 1,08 \cdot 10^{19}$. | 1 pont | |

| | | |
|---|---|---|
| Összesen $\lvert H \rvert = 9 \cdot 10^{19}$ darab húszjegyű szám van. | 1 pont | |
| Ezt felhasználva:<br>$\lvert A \rvert = \lvert H \rvert - \lvert \overline{A} \rvert = 9 \cdot 10^{19} - 1{,}08 \cdot 10^{19} = 7{,}92 \cdot 10^{19}$, | 1 pont | |
| tehát $\lvert A \rvert > \lvert \overline{A} \rvert$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **9. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| (Először $\overline{A}$ elemszámát számítjuk ki.)<br>Az első számjegy 8-féle lehet (nem lehet 0 és 7),<br>a többi helyiérték mindegyikére 9-féle számjegyet írhatunk (egyik sem lehet 7), | 1 pont | |
| így $\lvert \overline{A} \rvert = 8 \cdot 9^{19}$. | 1 pont | |
| Megadjuk azon húszjegyű számok számát, amelyekben pontosan egy darab 7-es számjegy szerepel, de az nem a legnagyobb helyiértéken található (ezek a számok $A$ valódi részhalmazát alkotják).<br>Ha már ez nagyobb, mint $\lvert \overline{A} \rvert$, akkor nyilván $\lvert A \rvert > \lvert \overline{A} \rvert$. | 1 pont | |
| Az első helyiértéken 0 és 7 nem lehet, a 7-es számjegy 19 helyen lehet, a többi helyiérték mindegyikére pedig 9-féle számjegyet írhatunk. Ez $19 \cdot 8 \cdot 9^{18}$ lehetőség, ami több, mint $\lvert \overline{A} \rvert = 9 \cdot 8 \cdot 9^{18}$. | 1 pont | |
| tehát $\lvert A \rvert > \lvert \overline{A} \rvert$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **9. c)** | | |
|---|---|---|
| Komplementer módszerrel dolgozunk:<br>$P$(van benne 7-es) = 1 – $P$(nincs benne 7-es) = | 1 pont | |
| $= 1 - \frac{8}{9} \cdot \left( \frac{9}{10} \right)^{n-1}$. | 1 pont | |
| Így megoldandó az alábbi egyenlőtlenség:<br>$1 - \frac{8}{9} \cdot \left( \frac{9}{10} \right)^{n-1} > 0{,}99$. | 1 pont | |
| Rendezve: $\frac{9}{800} > 0{,}9^{n-1}$. | 1 pont | |
| Mivel az $x \mapsto \log_{0,9} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, | 1 pont | |
| $n > \log_{0,9} \frac{9}{800} + 1 \approx 43{,}59$, | 1 pont | |
| tehát $n \geq 44$ ($n \in \mathbf{N}$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |