ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2008. május 6.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.

Egy jó elem: 1 pont Két jó elem: 2 pont	2 pont	*Bármely alakban megadott helyes válasz esetén jár a pont.*
Összesen:	**2 pont**	

2.

21 kézfogás történt.	2 pont	*Ha a válasz 42 kézfogás, 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

3.

A keresett valószínűség: $\frac{1}{5}$	2 pont	*Ha négy 20-szal osztható számmal jól dolgozik, 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

4.

2 kilogrammot.	2 pont	*Az egyenes arányosság felismeréséért hibás számolás esetén is jár 1 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

5.

Zérushelyek: 0 és 5.	2 pont	*Helyes zérushelyenként 1 pont.*
A helyettesítési érték: – 4,56.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.

$\overrightarrow{KF} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$	2 pont	*A feladat megértéséért (pl. ábra) 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	*Bármely helyesen felírt (pl. összevonás nélküli) alakért jár a 2 pont.*

7.

a) igaz; b) hamis; c) hamis.	3 pont	*Minden helyes válasz 1 pont.*
Az a) megfordításaként mind a b), mind a c) állítás elfogadható. *Bár definíció szerint az a) állítás megfordítása a b) állítás, a középszintű követelmények körébe nem tartozó logikai elemzéssel bizonyítható, hogy a b) és a c) állítás logikailag ekvivalens.*	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8.		
A $2+\frac{2}{3}$ reciproka: $\frac{1}{2+\frac{2}{3}}$.	1 pont	
A reciprok értéke: $\frac{3}{8}\left(=\frac{375}{1000}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	*Ha jó számadatot ad meg, de nem két egész szám hányadosaként, 1 pont jár.*

9.		
A legnagyobb érték: 10.	1 pont	
Ezt az $x=0$ helyen veszi fel.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
A megfelelő képlet megtalálása.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megfelelő képlet csak a behelyettesített alakban szerepel.*
A képletbe való helyes behelyettesítés.	1 pont	
A sorozat 100-adik tagja: -1686.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11.		
Az egyszerűsített tört: $\frac{1}{x}$.	2 pont	*Ha csak a nevező helyes szorzat alakját találja meg, 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

12. **első megoldás**		
Angolul fordítanak 35-en.	1 pont	*Az adatoknak helyes halmazábrán való feltüntetéséért is jár ez a 3 pont.*
Németül fordítanak 25-en.	1 pont	
Az összeg 10-zel több a fordítók számánál.	1 pont	
A mindkét nyelven fordítók száma: 10.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12. **második megoldás**		
Mindkét nyelven a dolgozók 20%-a fordít.	3 pont	
A mindkét nyelven fordítók száma: 10.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II/A

13. a)		
Értelmezési tartomány: $x > -\frac{5}{3}$	1 pont	*Ha nem vizsgál értelmezési tartományt, de a két gyök helyességéről pl. behelyettesítéssel meggyőződik, akkor ezt a pontot is megkapja.*
A logaritmus azonosságának helyes alkalmazása.	1 pont	
(A lg függvény kölcsönösen egyértelmű.) $(x+15)^2 = 20(3x+5)$.	1 pont	
$x^2 - 30x + 125 = 0$.	1 pont	
$x_1 = 25$ és $x_2 = 5$.	1 pont	
Mindkét megoldás megfelel.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. b)		
$x \geq 0$.	1 pont	*Ha nem vizsgál értelmezési tartományt, de helyesen válaszol, akkor ezt a pontot is megkapja.*
$5^{2\sqrt{x}} = 5^{1+3\sqrt{x}}$.	2 pont	*A két hatványozás-azonosság alkalmazásáért 1-1 pont jár.*
$\sqrt{x} = -1$.	1 pont	
A négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért	1 pont	*Ez a pont más helyes indoklás esetén is jár.*
nincs valós megoldás.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. a)		
A kör egyenlete $(x-9)^2 + (y+8)^2 = 100$.	2 pont	
Ebbe behelyettesítve az $y = -16$-ot: $(x-9)^2 = 36$.	2 pont	*Az* $x^2 - 18x + 45 = 0$ *egyenlet felírásáért is jár a 2 pont.*
Az egyenletet megoldva: $x = 15$ vagy $x = 3$.	2 pont	*Gyökönként 1-1 pont.*
A közös pontok: $(15\,; -16)$ és $(3\,; -16)$	2 pont	*Az* $x_1 = 15, y_1 = -16$ *és* $x_2 = 3, y_2 = -16$ *alak is elfogadható.*
Összesen:	**8 pont**	

14. b)		
Az érintő egy normálvektora az $\overrightarrow{AP}$ vektor,	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
$\overrightarrow{AP}=(-8;6)$.	1 pont	
Az érintő egyenlete: $4x-3y=10$.	1 pont	
Az érintő iránytangense: $\frac{4}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. a)		
6 ilyen szám van.	3 pont	*A helyes válasz 2 pont, bármilyen helyes indoklás (pl. felsorolás) 1 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

15. b)		
Az utolsó számjegy páros szám (2, 4, vagy 6),	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
az első 4 számjegy $6^4(=1296)$-féleképpen alakulhat.	2 pont	
$3\cdot 6^4(=3888)$-féle páros szám lehet.	1 pont	*Az eredmény bármelyik helyes alakjáért jár az 1 pont.*
Összesen:	**4 pont**	

15. c)		
(A 4-gyel való oszthatósági szabály értelmében) a két utolsó helyen 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64 állhat,	2 pont	*Ha a megadott kilencnél több vagy kevesebb 4-gyel osztható számot sorol fel, de legalább hatot a megadottak közül, akkor 1 pontot kap. Néggyel nem osztható szám szerepeltetése esetén erre a részre nem adható pont.*
az első 3 számjegy pedig $6^3(=216)$-féleképpen alakulhat.	2 pont	
Tehát $9\cdot 6^3(=1944)$-féle 4-gyel osztható szám lehet.	1 pont	*Az eredmény bármelyik helyes alakjáért jár az 1 pont.*
Összesen:	**5 pont**	

II/B

16. a)		
Az adatok helyes értelmezése (pl. ábra).	1 pont	*Az 1 pont jár, ha az adatokat jól használja.*
A csonka kúp alakú rész térfogatának kiszámítása ($\approx 318\ \text{cm}^3$).	1 pont	*Csak hibás számításért veszítsen pontot.* *A részeredmények tetszőleges pontosságú helyes kerekítéssel elfogadhatók.*
A henger alakú rész térfogatának kiszámítása ($\approx 6786\ \text{cm}^3$).	1 pont	
A kúp alakú rész térfogatának kiszámítása ($\approx 603\ \text{cm}^3$).	1 pont	
Egy cölöp térfogatának kiszámítása $\approx 7707\ \text{cm}^3$.	1 pont	
Egy cölöp elkészítéséhez $\approx \dfrac{7707}{0{,}82} (\approx 9399)\,\text{cm}^3$,	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
5000 cölöp elkészítéséhez $\approx 46\ 995\ 000\ \text{cm}^3$, azaz $\approx 47\ \text{m}^3$ fára van szükség.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

16. b)		
A csonka kúp fedőköre területének kiszámítása: $\approx 50\ \text{cm}^2$.	1 pont	*Ha a cölöp felszínét hibásan értelmezi (hozzáveszi az alapköröket) legfeljebb 3 pontot kaphat.* *A részeredmények tetszőleges pontosságú helyes kerekítéssel elfogadhatók.*
A csonka kúp alkotójának kiszámítása: $\sqrt{20}$ ($\approx 4{,}47$),	1 pont	
palást területének kiszámítása: $\approx 141\ \text{cm}^2$.	1 pont	
A hengerpalást területének kiszámítása: $\approx 2262\ \text{cm}^2$.	1 pont	
A kúp alkotójának kiszámítása: $\sqrt{292}$ ($\approx 17{,}09$),	1 pont	
a kúppalást területének kiszámítása: $\approx 322\ \text{cm}^2$.	1 pont	
1 cölöp felszíne $\approx 2775\ \text{cm}^2$,	1 pont	
5000 cölöp felszíne $\approx 13\ 875\ 000\ \text{cm}^2$,	1 pont	
ami $\approx 1388\ \text{m}^2$.	1 pont	*Az $1387\ m^2$ is elfogadható.*
Összesen:	**9 pont**	

Ha a megoldás során az átmérő adatát sugárként használja (henger, csonkakúp fedőköre), de egyébként helyesen számol, az a) és b) részben összesen 2 pontot veszítsen.

17. a)		
A felvehető összeg: $700000 \cdot 1{,}06^2$,	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
ami 786 520 (Ft).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b) **első megoldás**		
(Az első évben x %-os volt a kamat.) Az első év végén a számlán lévő összeg: $800\,000\left(1+\frac{x}{100}\right)$.	2 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
A második év végén a felvehető összeg: $800\,000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x+3}{100}\right)=907\,200$.	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
$x^2+203x-1040=0$.	3 pont	*A kéttagúak helyes összeszorzása 2 pont, helyes rendezés 1 pont.*
$x_1=5$;	1 pont	
a másik gyök negatív (–208), nem felel meg.	1 pont	
Az első évben 5%-os volt a kamat.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

17. b) **második megoldás**		
(Az első évben q-szorosára változott az összeg, akkor) az első év végén a számlán lévő összeg: $800\,000\cdot q$.	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
A második évben $(q+0{,}03)$-szorosára változott az összeg.	2 pont	
A második év végén a felvehető összeg: $800\,000\cdot q\cdot(q+0{,}03)=907\,200$.	2 pont	
$q^2+0{,}03q-1{,}134=0$.	2 pont	
$q_1=1{,}05$;	1 pont	
a másik gyök negatív (–1,08), nem felel meg.	1 pont	
Az első évben 5%-os volt a kamat.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

17. b) kiegészítés		
A b) feladat szövegének, a „kamatlábat… 3%-kal növelte” kifejezésnek lehetséges egy másik, a köznapi életben megszokott szóhasználattól eltérő, ám matematikailag nem kifogásolható értelmezése is. Az ennek megfelelő megoldás és annak értékelése:		
(Az első évben x %-os volt a kamat.) Az első év végén a számlán lévő összeg: $800\,000\left(1+\frac{x}{100}\right)$.	2 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
A második év végén a felvehető összeg: $800\,000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{1{,}03\,x}{100}\right)=907\,200$.	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
$1{,}03x^2+203x-1340=0$.	3 pont	*A kéttagúak helyes összeszorzása 2 pont, helyes rendezés 1 pont.*
$x_1=6{,}39$;	1 pont	
a másik gyök negatív, nem felel meg.	1 pont	
Az első évben 6,39(≈6,4)%-os volt a kamat.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

17. c)		
Ha a két évvel ezelőtti ár y forint, akkor egy év múlva $1{,}04\cdot y$,	1 pont	
két év múlva $1{,}04^2\cdot y=907\,200$ forint az ár.	1 pont	
$y=\frac{907\,200}{1{,}04^2}(\approx 838\,757)$.	1 pont	
Két évvel korábban ≈ 838 757 Ft-ot kellett volna fizetniük.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
1. Ha 907 200 forintnál nagyobb összeget ad meg válaszként, akkor a megoldására 0 pontot kap. *2. Ha 907 200 $\cdot\, 0{,}96^2$-nel számol, akkor 1 pontot kaphat.*		

18. a)		
A kedvező esetek száma 4. (Zsófi akkor folytatja a játékot, ha a dobott szám 3, 4, 5 vagy 6.)	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
Az összes eset száma 6.	1 pont	
A valószínűség: $\frac{4}{6}\left(=\frac{2}{3}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)		
Összesen 36 (egyenlően valószínű) lehetőség van.	1 pont	
Egy játékos 12 forintot kap, ha a következő dobáspárok lépnek fel: (2; 6), (3; 4), (4; 3) és (6; 2).	2 pont*	*Ez a 2 pont nem bontható.*
Az első eset nem lehet, mert akkor Zsófi nem játszik tovább.	1 pont*	
Tehát a kedvező esetek száma 3.	1 pont	
A 12 forint kifizetésének valószínűsége: $\frac{3}{36}\left(=\frac{1}{12}\right)$	1 pont	*Hibás előzmények után a kombinatorikus modell használata esetén jár az 1 pont.*
Összesen:	**6 pont**	
*A *-gal megjelölt (összesen 3) pont akkor is jár, ha pontosan azt a három esetet – (3; 4), (4; 3) és (6; 2) – sorolja fel (akár indoklás nélkül), amelyek Zsófi esetében megfelelnek.*		

18. c)

		második dobás eredménye					
		1	2	3	4	5	6
első dobás eredménye	1	-13	-12	-11	-10	-9	-8
	2	-12	-10	-8	-6	-4	-2
	3	-11	-8	-5	-2	1	4
	4	-10	-6	-2	2	6	10
	5	-9	-4	1	6	11	16
	6	-8	-2	4	10	16	22

(táblázat)	4 pont	*1 vagy 2 hibás szám esetén 3 pontot kap,* *3 vagy 4 hibás szám esetén 2 pontot kap,* *4-nél több hibás szám esetén nem kaphat pontot.*
Összesen:	**4 pont**	

18. d)		
Barnabás akkor nyer, ha egyenlege pozitív.	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
13 esetben pozitív az eredmény.	1 pont	*Ez a pont a táblázatban szereplő pozitív számok helyes összeszámlálásáért jár.*
Barnabás $\frac{13}{36}$ valószínűséggel nyer.	1 pont	*Hibás előzmények után a kombinatorikus modell használata esetén jár az 1 pont.*
Összesen:	**3 pont**	
Táblázat nélkül is indokolhat: *nyer, ha a szorzat legalább 15, azaz ha a két dobott szám közül* *az egyik a 3 és a másik az 5, vagy 6 (ez 4 eset); vagy* *az egyik a 4 és a másik a 4, vagy 5, vagy 6 (ez 5 eset); vagy* *az egyik az 5 és a másik az 5, vagy 6 (ez 3 eset); vagy* *az egyik a 6 és a másik is 6 (ez 1 eset).* *Összesen 13 eset. Stb.*		