ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2009. május 5.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS
MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
A páros számokat tartalmazó részhalmazok: $\{6\}$; $\{28\}$; $\{6;28\}$.	2 pont	*1 pontot kaphat a vizsgázó, ha csak két helyes részhalmazt ír fel. Szintén 1 pont jár, ha a helyes gondolatokat pontatlan jelölésekkel fejezi ki.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$t=\frac{(a^3)^5}{a^{-2}}=a^{17}$	2 pont	*Ha az egyik azonosságot jól alkalmazza, akkor 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
Az állítás logikai értéke: IGAZ.	1 pont	
Az állítás megfordítása: Ha egy szám osztható 12-vel, akkor osztható 36-tal is.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
A kézfogások száma 10.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
Tudja, hogy $t_3=50000\cdot1{,}074^3$.	2 pont	
Három év múlva 61 942 forint van a számlán.	1 pont	*Hibás kerekítés esetén nem jár a pont.*
Összesen:	**3 pont**	

6.		
A lehetséges kódok: 2244; 2424; 2442; 4422; 4242; 4224.	3 pont	*1-1 pont járjon 2-2 kód helyes felírásáért.*
Összesen:	**3 pont**	

7.		
A legbővebb értelmezési tartomány: $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\}$.	2 pont	*1. Más módon megadott helyes válaszért is 2 pont jár.* *2. Ha a legbővebb értelmezési tartománynak csak a negatív valós számokat jelöli meg, 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

8.		
A helyes válasz: –1.	2 pont	*Ha a vizsgázó más értéket is megad, 0 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

9.		
A háromszög átfogója 13 cm.	1 pont	*Indoklásként jó ábra is elfogadható.*
A derékszögű háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja.	1 pont	
A körülírt kör sugara 6,5 cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
$g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$.	3 pont	*Az argumentum helyes felírása 2 pont, a konstans jó megadása 1 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

11.		
$H \cup G = \{A; B; C; E; I; K; L; N; Ó; T\}$	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	
1) Ha a vizsgázó helyesen felírja külön-külön a H és/vagy a G halmazt, de a válasza mégsem jó, kaphat 1-1 pontot. *2) Ha a $H \cup G$ halmazba minden szükséges elemet felsorol, de van olyan elem, amit többször is, 1 pont adható.*		

12.		
Az egyenes egyenlete: $x - 2y = 8$.	3 pont	*Bármelyik alakban felírt helyes egyenlet 3 pontot ér.*
Összesen:	**3 pont**	*Ha csak a párhuzamosság teljesül, akkor 1 pont jár.*

II/A

13. a)		
Az egyenlet mindkét oldalán 3 hatványa áll, mert $9 = 3^2$.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során helyesen megjelenik, ez a pont is jár.*
A 3-as alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a kitevők egyenlők,	1 pont	
$x^2 - 3x - 10 = 0$.	1 pont	
$x_1 = 5$ és $x_2 = -2$.	2 pont	
Mindkét x érték kielégíti az eredeti egyenletet, tehát az egyenlet két megoldása: $x_1 = 5$ és $x_2 = -2$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

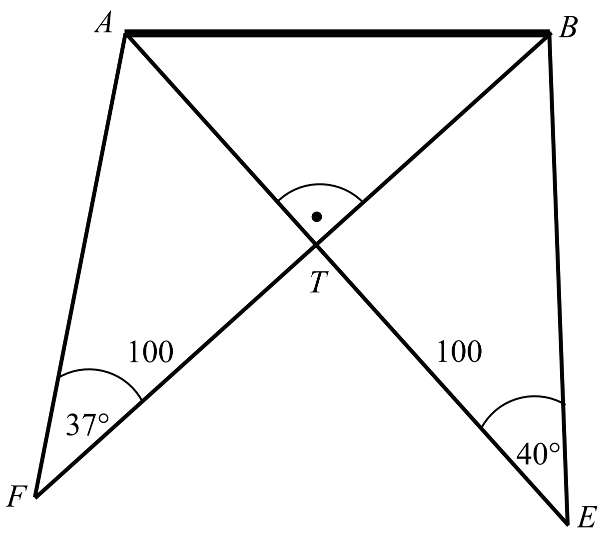
13. b)		
Az első egyenlőtlenség megoldása: $x < 2$.	2 pont	
A második egyenlőtlenség megoldása: $x \geq -2$.	2 pont	
Mindkét egyenlőtlenséget kielégítő egész számok a $\{-2; -1;\ 0;\ 1\}$ halmaz elemei.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	*Ha a válasza a $-2 \leq x < 2$, 1 ponttal kevesebbet kapjon.*

14. a)		
A 645 és a 654 közötti egészeket kell vizsgálni.	1 pont	
Az iskola létszámának 11 többszörösének kell lennie.	2 pont	*Ha a vizsgázó egyenként megvizsgálja a szóba jövő számokat, akkor is jár a 3 pont.*
Az iskola tanulóinak száma 649.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b)		
56 gyerek legalább 180 cm magas.	1 pont	
$56 \cdot 0{,}75 = 42$ (a legalább 180 cm-esek közül) a kosaras.	1 pont	
Az iskolában $\frac{42}{70} \cdot 100 = 60$ tanuló kosarazik.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. c)		
Legfeljebb 180 cm magas 568 tanuló.	1 pont	
$p = \frac{568}{616} \approx 0{,}922$ a valószínűsége, hogy legfeljebb 180 cm magas tanuló nyerje a főnyereményt.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15.



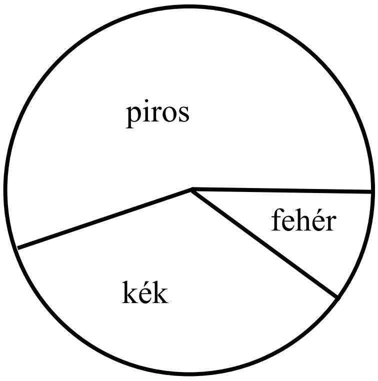
A feladat tartalmának megértését tükröző térképvázlat, jó jelölésekkel.	3 pont	*Nem várjuk el, hogy a térképvázlat a méretarányokat is tükrözze.*
TBE és *TAF* derékszögű háromszögekben a tangens szögfüggvényt alkalmazzuk.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem hivatkozik a tangens szögfüggvényre, de jól alkalmazza, akkor is jár az 1 pont.*
$tg40^{\circ} = \frac{TB}{100}$.	1 pont	
$TB = 100 \cdot \text{tg}40^{\circ} \left(\approx 83{,}91\right)$.	1 pont	
$tg37^{\circ} = \frac{TA}{100}$.	1 pont	
$TA = 100 \cdot \text{tg}37^{\circ} \left(\approx 75{,}36\right)$.	1 pont	
Az *ABT* derékszögű háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz tételét: $AB^2 = TB^2 + TA^2$.	2 pont	*Ha a vizsgázó nem hivatkozik a Pitagorasz tételére, de jól alkalmazza, akkor is jár a 2 pont.*
TB és *TA* értékét behelyettesítve $AB \approx \sqrt{12720} = 112{,}78$.	1 pont	
A fák távolsága méterre kerekítve 113.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	*Ha a vizsgázó nem helyesen kerekít, vagy nem megfelelő kerekítéssel számol (pl. közbülső értékeket pontatlanul használ), csak egyszer vonjunk le 1-et az adható pontból.*

II/B

16. első megoldás		
Az $\{a_n\}$ mértani sorozat és a $\{b_n\}$ számtani sorozat szóban forgó három-három tagjáról tudjuk, hogy $a_1 = b_1$; $a_2 = b_4$; $a_3 = b_{16}$.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a gondolat kifejtése nincs ugyan leírva, de az összefüggéseket helyesen használja a vizsgázó.*
Jelöljük a $\{b_n\}$számtani sorozat különbségét *d*-vel.	1 pont	
A számtani sorozat szóban forgó tagjai ekkor: $b_1 = 5$; $b_4 = 5 + 3d$; $b_{16} = 5 + 15d$.	2 pont	
A mértani sorozat tagjaira a mértani közép összefüggés alapján: $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$	2 pont	
Behelyettesítve a megfelelő b_i értékeket kapjuk, hogy: $5 \cdot (5 + 15d) = (5 + 3d)^2$.	2 pont	
Rendezve az egyenletet: $9d^2 - 45d = 0$.	2 pont	
Innen $d_1 = 0$ és $d_2 = 5$.	2 pont	
Ha $d_1 = 0$, a számtani sorozat ötödik tagja 5, a mértani sorozat első öt tagjának összege 25.	2 pont	
Ha $d_2 = 5$, a sorozat ötödik tagja 25,	1 pont	
(a mértani sorozat szóbanforgó tagjai: 5, 20, 80, tehát) $q = 4$.	1 pont	
$s_5 = 5 \cdot \frac{4^5 - 1}{3} = 1705$.	1 pont	
Összesen:	**17 pont**	

16. **második megoldás**		
Az $\{a_n\}$ mértani sorozat és a $\{b_n\}$ számtani sorozat szóban forgó három-három tagjáról tudjuk, hogy $a_1 = b_1$; $a_2 = b_4$; $a_3 = b_{16}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a gondolat kifejtése nincs ugyan leírva, de az összefüggést helyesen használja a vizsgázó.*
Jelöljük az $\{a_n\}$mértani sorozat hányadosát q-val, a mértani sorozat szóban forgó tagjai ekkor: $a_1 = 5$; $a_2 = 5q$; $a_3 = 5q^2$.	2 pont	
A számtani sorozat különbségét d-vel jelölve: $b_4 - b_1 = 3d$ és $b_{16} - b_4 = 12d$.	2 pont	
E két összefüggésből kapjuk, hogy $4(b_4 - b_1) = b_{16} - b_4$.	1 pont	
Behelyettesítve a megfelelő a_i értékeket kapjuk, hogy: $4 \cdot (5q - 5) = 5q^2 - 5q$.	2 pont	
Rendezve az egyenletet: $q^2 - 5q + 4 = 0$.	2 pont	
Innen $q_1 = 1$ és $q_2 = 4$.	2 pont	
Ha $q = 1$, a számtani sorozat ötödik tagja 5, a mértani sorozat első öt tagjának összege 25.	2 pont	
Ha $q = 4$ (a mértani sorozat szóbanforgó tagjai: 5, 20, 80, tehát), a számtani sorozatban $d = 5$,	1 pont	
az ötödik tag 25,	1 pont	
A mértani sorozatban: $s_5 = 5 + 20 + 80 + 320 + 1280 = 1705$.	1 pont	
Összesen:	**17 pont**	

17. a)



Helyes ábra:	2 pont	
A középponti szögek: (táblázat) A középponti szögek kiszámítása mértékegységenként 1-1 pont.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

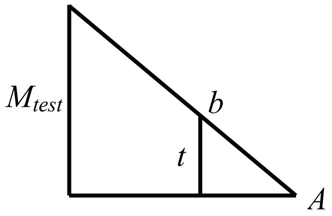
	fehér	kék	piros
fokban	36	126	198
radiánban	0,2π (≈0,6283)	0,7π (≈2,1991)	1,1π (≈3,45581)

17. b)

A kedvező esetek száma 54.	1 pont	
$p = \frac{54}{99} \approx 0{,}545$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. c)		
Bármelyik számozott golyó kihúzásának ugyanakkora a valószínűsége, tehát alkalmazható a klasszikus modell.		
Az összes esetek száma $n = 10^4$.	1 pont	
Az 1-10-ig felírt számokkal a 24-et a következő módokon állíthatjuk elő: a) 1, 1, 3, 8 b) 1, 1, 4, 6 c) 1, 2, 2, 6 d) 1, 2, 3, 4 e) 2, 2, 2, 3	5 pont	
A lehetséges sorrendek száma miatt: a), b), illetve c) 12-12 eset;	1 pont	*Akkor is jár az egy pont, ha valamelyik esetet nem vette észre.*
d) 24 eset;	1 pont	
e) 4 eset.	1 pont	
A keresett valószínűség így $\frac{64}{10000} = 0{,}0064$.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

18. a)		
A ponyva területe 6 egybevágó egyenlő szárú háromszög területének összege.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a gondolat csak a számolásban jelenik meg.*
Egy ilyen háromszög magassága m_o; Pitagorasz tétele alapján: $m_o = \sqrt{M_{test}^2 + m_a^2}$, ahol m_a az alap egy középponti háromszögének magassága.	3 pont	*Egy megfelelő háromszög megtalálása 2 pont, Pitagorasz tételének alkalmazása 1 pont.*
$m_o = \sqrt{256 + \frac{3}{4} \cdot 144} = \sqrt{364} (\approx 19{,}08)$.	1 pont	
$A = 6 \cdot \frac{12}{2} \cdot \sqrt{364} (\approx 686{,}87)$.	1 pont	
A ponyva felülete 687 m^2.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. b)		
Pitagorasz tétele alapján egy oldalél hossza: $b=\sqrt{16^2+12^2}=20$	2 pont	
Egy kis támasztórúd *t* hossza: az *A* középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság miatt $t=\frac{1}{3}\cdot 16=\frac{16}{3}$ 	2 pont	
A rudak összhossza: $M_{test}+6\cdot b+6\cdot t=$	1 pont	
=168 méter.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. c)		
A kifeszített kötél egy olyan síkmetszetet jelöl ki, amelyik párhuzamos a gúla alaplapjával, és a csúcstól $\frac{2}{3}M_{test}$ távolságra van,	2 pont	*Bármilyen jó indoklás 2 pontot ér.*
ezért a síkmetszet egy szabályos hatszög, amelynek egy oldala 8 m,	1 pont	
így a kifeszített kötél hossza 48 méter.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	