ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2009. október 20.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
A számtani közép értéke: 73.	1 pont	
A mértani közép értéke: 55.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
Az A halmaz elemei: $\{2;3;5;7\}$.	1 pont	
A B halmaz elemei: $\{6;12;18;24;30\}$.	1 pont	
Az $A \cup B$ halmaz elemei: $\{2;3;5;6;7;12;18;24;30\}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
A fekete golyók száma: 12.	2 pont	*Ha a válasz hibás, de a keresett adatra helyes egyenletet írt fel, 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
A kifejezés értéke: 25.	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$\alpha = 27^\circ$	2 pont	*Ha csak a kerekítés hibás, 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
$a_{11} = (-5)\cdot(-2)^{10}$	1 pont	
$a_{11} = -5120$	1 pont	
Összesen:	**1 pont**	

7. **első megoldás**		
A hozzárendelési utasítás: $x \mapsto -\lvert x-1\rvert + 5$	3 pont	*A három transzformációs lépés 1-1 pontot ér.*
Összesen:	**3 pont**	

7. **második megoldás**		
A hozzárendelési utasítás: $x \mapsto \begin{cases} x+4, & ha\ x \le 1 \\ -x+6, & ha\ 1 < x \end{cases}$	3 pont	*1-1 pont a helyes képlet és 1 pont az értelmezési tartomány helyes megjelölése.*
Összesen:	**3 pont**	

8.		
A helyes kifejezés: F	3 pont	*A 3 pont nem bontható.*
Összesen:	**3 pont**	*Ha a betűjel helyett a helyes kifejezést írja fel, a pontok járnak.*

9.		
Az elhagyott szám: 5.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
A két vektor skaláris szorzata 0.	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
A két vektor szöge derékszög.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11.		
A kockába tehető legnagyobb felszínű gömb sugara 10 cm,	1 pont	
ennek felszíne $400\pi \approx 1256\left(cm^2\right)$.	1 pont	
Nem fér bele a gömb a dobozba.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*Ha kiszámolja a gömb sugarát* $(r \approx 11{,}28\ \text{cm})$ *és megmutatja, hogy az átmérő nagyobb 20 cm-nél, a pontok járnak.*

12.		
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right) =$	1 pont	
$= 2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$	1 pont	
$= -1$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II./A

13. a)		
A zárójelek felbontása: $x^2+4x+4-90=2{,}5x-85$.	1 pont	
$x^2+1{,}5x-1=0$.	1 pont	
$x_1=0{,}5$, $x_2=-2$.	2 pont	
A gyökök a valós számok halmazán megfelelnek.	1 pont	*Ellenőrzésért vagy ekvivalenciára való hivatkozás esetén jár a pont.*
Összesen:	**5 pont**	

13. b) első megoldás		
Ha $x>0$, akkor $3-x<14x$.	1 pont	*Ha esetszétválasztás nélkül dolgozik, legfeljebb 2 pont adható.*
$x>0{,}2$,	1 pont	
a feltétellel összevetve $x>0{,}2$.	1 pont	
Ha $x<0$, akkor $3-x>14x$.	1 pont	
$x<0{,}2$,	1 pont	
a feltétellel összevetve: $x<0$.	1 pont	
Az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty;0[\cup]0{,}2;\infty[$.	1 pont	*A helyes válasz bármilyen jó megjelenítéséért jár a pont.*
Összesen:	**7 pont**	

13. b) második megoldás		
$\frac{3-x}{7x}-2<0$.	1 pont	
$\frac{3-15x}{7x}<0$.	1 pont	
$3-15x>0$ és $7x<0$.	1 pont	
$x<0$	1 pont	
vagy $3-15x<0$ és $7x>0$.	1 pont	
$x>0{,}2$.	1 pont	
Az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty;0[\cup]0{,}2;\infty[$.	1 pont	*A helyes válasz bármilyen jó megjelenítéséért jár a pont.*
Összesen:	**7 pont**	

14. a)

(A soronként elhelyezett járólapok számát annak a számtani sorozatnak egymást követő tagjai adják, amelyre:) $a_1 = 8$, $d = 2$.	1 pont	
$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n =$	1 pont	
$= 858$.	1 pont	
$n^2 + 7n - 858 = 0$.	1 pont	
$n_1 = 26$ és $n_2 = -33$. (A megfelelő pozitív egész szám $n = 26$.)	1 pont	
Angéla 26 teljes sort rakott le (ez a megoldás a feltételeknek megfelel).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	*Ha tagonként összegezve jut el n = 26 – ig, nem utal arra, hogy más megoldás nem lehet, 4 pont adható.*

14. b)

A bordó járólapok száma 144.	2 pont	*Helyes százalékszámításért és a csomagok számának figyelembevételéért 1-1 pont jár.*
A huszonhatodik sorba $a_{26} = a_1 + 25d = 8 + 50 = 58$ járólap került.	1 pont	
A burkolt rész peremére $8 + 58 + 2 \cdot 24 = 114$ bordó színű került.	1 pont	
30 bordó járólap maradt ki.	1 pont	
Összesen $900 - 858 = 42$ járólap maradt ki, ezek közül 12 szürke és 30 bordó.	1 pont	
Összesen:	**6pont**	

15. a)

A dobható négyzetszámok: 16, 25, 36, 64.	1 pont	
Összesen 36 különböző kétjegyű számot kaphat.	1 pont	
A keresett valószínűség $p = \frac{1}{9} (\approx 0{,}111)$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. b)

Az egyes helyiértéken 6-féle, ettől függetlenül a tízes helyiértéken is 6-féle számot kaphat.	1 pont	
A számjegyek 6 esetben egyeznek meg, ez a kedvező esetek száma.	1 pont	
A valószínűség $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. c) első megoldás		
A számjegyek összege legfeljebb 9: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63 számok esetében.	4 pont	*Ezt a 4 pontot megkaphatja bármilyen helyes indoklásért, a 30 szám felsorolása nem szükséges.*
A kedvező esetek száma: 30.	1 pont	
A valószínűség: 30/36 = 5/6.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

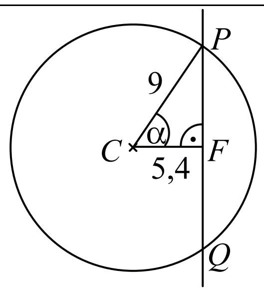
15. c) második megoldás		
A komplementer esemény (az összeg nagyobb 9-nél) valószínűségét számítjuk ki.	2 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldásban jelent meg, akkor is jár a 2 pont.*
A számjegyek összege nagyobb 9-nél: 46, 55, 56, 64, 65, 66.	2 pont	
A kedvező esetek száma: 6, a komplementer esemény valószínűsége: 6/36 = 1/6.	1 pont	
A keresett valószínűség: 1-1/6 = 5/6.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

II./B

16. a)		
Megoldandó az $x^2+y^2-6x+8y-56=0 \quad \wedge \quad x=8{,}4$ egyenletrendszer.	1 pont	
Behelyettesítés után: $y^2+8y-35{,}84=0$,	1 pont	
amelyből $y=3{,}2$ vagy $y=-11{,}2$.	2 pont	
Két közös pont van: $P_1(8{,}4\,;3{,}2)$, $P_2(8{,}4\,;-11{,}2)$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. b)		
A kör egyenlete átalakítva: $(x-3)^2+(y+4)^2=81$.	1 pont	
A kör középpontja $C(3;-4)$ (*és sugara 9*).	1 pont	
Az egyenes párhuzamos az ordinátatengellyel,	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
ezért a $C(3;-4)$ pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontja $T(8{,}4\,;-4)$.	1 pont	
Az egyenes $\overline{TC}=8{,}4-3=5{,}4$ egység távolságra van a kör középpontjától.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. c) első megoldás



A helyes ábra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a helyes adatokat a későbbiekben jól használja.*
A *CFP* derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{5{,}4}{9} = 0{,}6$,	1 pont	
tehát $\alpha \approx 53{,}13°$.	1 pont	
A *PQ* hosszabb körívhez tartozó középponti szög $360° - 2\alpha \approx 253{,}74°$.	1 pont	
A körív hossza: $\frac{2\cdot 9\cdot \pi \cdot 253{,}74}{360} \approx 39{,}9$.	1 pont	
A hosszabb *PQ* körív hossza kb. 39,9 cm.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

A középponti szöget radiánban is megadhatja (4,43) és az ennek megfelelő képlet alkalmazásával számíthatja a körív hosszát (39,9 cm).

16. c) második megoldás		
A rövidebb PQ körívhez tartozó 2α középponti szög a PCQ háromszögből koszinusztétellel kiszámítható. A CFP derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $FP = 7{,}2$ (cm), így $PQ = 14{,}4$ (cm).	1 pont	*A PQ szakasz hosszának kiszámításáért csak abban az esetben adható ez a pont, ha a megoldásból egyértelműen kiderül, hogy a PCQ háromszögből akarja meghatározni a középponti szöget.*
$\cos 2\alpha = \frac{2\cdot 9^2 - 14{,}4^2}{2\cdot 9^2} =$,	1 pont	
$= -0{,}28$,	1 pont	
amiből $2\alpha \approx 106{,}26°$.	1 pont	
A rövidebb körív hossza kb. $\frac{2\cdot 9\cdot \pi \cdot 106{,}26}{360} \approx 16{,}7$ (cm)	1 pont	
A hosszabbik PQ körív hossza kb. 39,8 cm.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

A többszöri kerekítés és különböző kiszámítási módok miatt (pl. a második körív hosszát kivonással vagy a körív hosszára vonatkozó képlet újbóli alkalmazásával számítja, vagy pl. a π közelítő értékét használja a számításokban) a fentiektől eltérő hosszak is elfogadhatók, ha azokat elvileg helyesen, a kerekítési szabályoknak megfelelően adta meg a vizsgázó.

17. a) első megoldás		
A térképen a paralelogramma kerülete 17,0 cm, a kerékpárút pedig $17{,}0\cdot 1{,}25 = 21{,}25$ cm hosszú.	1 pont	
A valóságban a kerékpárút hossza $21{,}25\cdot 3\cdot 10^4$ cm,	1 pont	
azaz 6,375 km.	1 pont	
Egy tizedes jegyre kerekítve tehát a kerékpárút hossza 6,4 km.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a) második megoldás		
A valóságban a paralelogramma oldalainak hossza: $AB = 4{,}7\cdot 3\cdot 10^4$ cm=1,41 km, illetve	1 pont	
$AD = 3{,}8\cdot 3\cdot 10^4$ cm=1,14 km (*és* $BD = 0{,}99$ *km*).	1 pont	
A paralelogramma kerülete 5,1 km, a kerékpárút hossza tehát $1{,}25\cdot 5{,}1 = 6{,}375$ km.	1 pont	
Egy tizedes jegyre kerekítve tehát a kerékpárút hossza 6,4 km.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b)		
Az AC szakasz a leghosszabb.	1 pont	Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.
Az ABD háromszögre felírjuk a koszinusztételt: $3{,}3^2 = 4{,}7^2 + 3{,}8^2 - 2\cdot 4{,}7\cdot 3{,}8\cdot \cos BAD\sphericalangle$.	1 pont	
Ebből: $\cos BAD\sphericalangle = \dfrac{4{,}7^2 + 3{,}8^2 - 3{,}3^2}{2\cdot 4{,}7\cdot 3{,}8} \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}7178$ (*tehát* $BAD\sphericalangle \approx 44{,}1°$ *és így* $ABC\sphericalangle \approx 135{,}9°$).	1 pont	
Az ABC háromszögből koszinusztétellel: $AC^2 = 4{,}7^2 + 3{,}8^2 - 2\cdot 4{,}7\cdot 3{,}8\cdot \cos ABC\sphericalangle$,	1 pont	
amiből $AC \approx 7{,}9$ (cm).	1 pont	
Ez a valóságban (egy tizedes jegyre kerekítve) 2,4 km.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

A valódi távolságokkal is számolhat, ekkor (felhasználva, hogy $BD = 0{,}99$ *km):*

$\cos BAD\sphericalangle = \dfrac{1{,}41^2 + 1{,}14^2 - 0{,}99^2}{2\cdot 1{,}41\cdot 1{,}14} \approx 0{,}7178$*, illetve*

$AC^2 \approx 1{,}41^2 + 1{,}14^2 + 2\cdot 1{,}41\cdot 1{,}14\cdot 0{,}7178$*, amiből* $AC^2 \approx 5{,}595$*, így AC egy tizedes jegyre kerekítve 2,4 km-nek adódik.*

17. c)		
A vízfelszín területe a valóságban: $9\cdot10^8\cdot4{,}7\cdot3{,}8\cdot\sin44{,}1°\approx1{,}119\cdot10^{10}$ (cm^2) (Heron-képlet is használható.),	2 pont	*A 2 pont megbontható a következőképpen: a (térképen látható vagy a valódi) paralelogramma területének elvileg helyes felírásáért (a paralelogramma területképletének helyes alkalmazása, vagy Heron-képlet felírása, vagy két egybevágó háromszögre bontás esetén a háromszög területének felírása) 1 pont, a terület helyes kiszámítása 1 pont.*
ami $1{,}119\cdot10^6$ m^2.	1 pont	*Ez a pont a vízfelszín területének m^2-ben való megadásáért, vagy – ha más mértékegységben adja meg ezt a területet és a térfogatot így nem m^3-ben kapja meg – a kérdezett térfogat m^3-be történő helyes átváltásáért jár.*
Tehát kb. $1{,}119\cdot10^6\cdot0{,}15\approx1{,}679\cdot10^5$ m^3-rel lesz több víz a tárolóban,	2 pont	*Ha a mértékegységeket nem egyezteti helyesen, legfeljebb 1 pont adható.*
ami ezer köbméterre kerekítve 168 ezer m^3 vízmennyiséget jelent.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. a)		
(táblázat alább)	3 pont	*Két-két helyes (és megfelelően kerekített) függvényértékért jár 1-1 pont. Ha a hat függvényérték bármelyikét hibás kerekítéssel adja meg, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat, de további kerekítési hibák miatt már nem vonható le pont.*
Összesen:	**3 pont**	

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)$ $\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800	713	635	505	450	357	253

18. b)		
Megoldandó a $0{,}15 = 0{,}1^{\frac{x}{6}}$ egyenlet (ahol x a keresett távolság mm-ben mérve).	2 pont	*A 2 pont nem bontható.*
$\lg 0{,}15 = \frac{x}{6} \cdot \lg 0{,}1$ $x = 6 \cdot \frac{\lg 0{,}15}{\lg 0{,}1}$	2 pont	
$x \approx 4{,}9$	1 pont	
A lézersugár intenzitása kb. 4,9 mm mélységben csökken az eredeti érték 15%-ára.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
1) Ha a 4,9-et próbálgatással (számológép) kapja meg, akkor ezért legfeljebb 3 pont jár. *2) Ha próbálgatással kapja meg a 4,9-et és hivatkozik az I függvény szigorú monotonitására, akkor teljes pontszámot kap.*		

18. c) első megoldás		
Minden csillag esetében három lehetőség van a megvilágításra: kék, zöld, nincs kirajzolva.	3 pont	*A 3 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak számolásból derül ki.*
A különböző dekorációs tervek száma ezért: $3^4 = 81$.	4 pont	
Legalább egy csillagot ki kell rajzolni, így a lehetőségek száma 81-1=80.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	
Ha a modellt két állapotra számolja végig, legfeljebb 4 pontot kaphat.		

18. c) **második megoldás**		
1 csillag van kirajzolva: $\binom{4}{1} \cdot 2 = 8$ eset.	1 pont	
2 csillag van kirajzolva: $\binom{4}{2} \cdot (1+2+1) = 24$ eset. (Négy csillag közül kettőt hatféleképpen választhatunk ki, mindkettőt kirajzolhatjuk kék vagy zöld fénnyel, vagy különböző színekkel.)	2 pont	
3 csillag van kirajzolva: $\binom{4}{3} \cdot (1+3+3+1) = 32$ eset. (A négy csillagból hármat négyféleképpen választhatunk ki. Ezeket azonos színnel kétféleképpen rajzolhatjuk ki. Az egyik kék, kettő zöld kirajzolása 3-féle lehetőséget ad. Ugyanez igaz a színek felcserélésekor is.)	2 pont	
4 csillag van kirajzolva: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + \binom{4}{2} = 16$ eset. (Egyszínű csillagok kétféle lehetőség, három azonos és egy másik színű $2 \cdot 4$ lehetőség, két két azonos színű csillag $\binom{4}{2}$ lehetőség.)	2 pont	
Összesen: 8+24+32+16=80 dekorációs terv készülhet.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. c) **harmadik megoldás**		
Minden kirajzolt csillag kétféle szín lehet: kék vagy zöld.	2 pont	*A 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a számolásból derül ki.*
Egy csillag van kirajzolva: $4 \cdot 2$=8 lehetőség.	1 pont	
Két csillag van kirajzolva: $\binom{4}{2} \cdot 2^2 = 24$ lehetőség. (Két csillagot hatféleképpen lehet kirajzolni és ezek bármelyikét 2^2-féleképpen lehet színezni.)	2 pont	
Három csillag van kirajzolva: $4 \cdot 2^3$=32 lehetőség.	1 pont	
Négy csillag van kirajzolva: 2^4=16 lehetőség. (Bármelyik csillag kétféle színnel rajzolható ki.)	1 pont	
Összesen: 8+24+32+16=80 dekorációs terv készülhet.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	