ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2011. május 3.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$a\cdot\left(a^2+1\right)$	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
A tankönyvek ára 6300 Ft.	1 pont	
A füzetek ára 2250 Ft.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
Az M-es pólók relatív gyakorisága: $\left(\frac{238}{1116}\approx\right)0{,}2133$.	1 pont	*A legalább két tizedes-jegyre történő helyes kerekítés is elfogadható.*
Az L-es méret a módusz.	1 pont	*Ha 322-t válaszol, akkor is megkapja a pontot.*
Átlagosan 186 darabot adtak el.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4.		
Az igaz állítás betűjele: A, C.	2 pont	*Egy-egy helyes válasz 1-1 pont. Ha B szerepel, 0 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$x=12$;	1 pont	
$y=9$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
A kézfogások száma 9.	2 pont	*Ha a vizsgázó 18 kézfo-gást ír, 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$X\cdot Y=24\cdot10^{101}$	1 pont	*Helyes végeredmény esetén ez a pont is jár.*
$X\cdot Y=2{,}4\cdot10^{102}$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8.		
$q=\frac{3}{4}$	1 pont	
$a_5=a_3\cdot q^2$	1 pont	
$a_5=\frac{27}{8}(=3{,}375)$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
$a=\frac{3h-256}{10}$ vagy $182=\frac{10a+256}{3}$	1 pont	
$a=\frac{3\cdot 182-256}{10}$	1 pont	*Helyes válasz esetén ez a pont is jár.*
Az alkar $a=29$ cm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
Két év alatt az érték $1{,}2\cdot 1{,}3(=1{,}56)$-szorosára nő.	1 pont	
Két év után a könyv értéke: $(23000\cdot 1{,}2\cdot 1{,}3=)35880$ Ft.	1 pont	
A növekedés 56%-os.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11.		
$b<0$	1 pont	
$b=0$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12.		
$A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 9;\ 12;\ 18;\ 36\}$	1 pont	*Ez a pont csak a teljes felsorolásért jár.*
$B=\{1;\ 4;\ 16\}$	1 pont	*Ez a pont csak a teljes felsorolásért jár.*
$A\cap B=\{1;\ 4\}$	1 pont	
$A\setminus B=\{2;\ 3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 18;\ 36\}$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. A

13. a) első megoldás		
Mivel $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$,	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
így a megoldandó egyenlet: $x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 2$,	1 pont	*A pont a zárójel szükségességének ismeretéért jár. Akkor is adjuk meg a pontot, ha a vizsgázó írásban nem jelöli, de jól bontja fel a zárójelet.*
azaz $x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$.	1 pont	
Ebből $x = \frac{3}{2}$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. a) második megoldás		
Felismeri az alkalmazható azonosságot.	2 pont	
$x^2 - (x-1)^2 = 2 \iff \big(x-(x-1)\big)\big(x+(x-1)\big) = 2$,	1 pont	*Akkor is adjuk meg az 1-1 pontot, ha a vizsgázó írásban nem jelöli, de jól bontja fel a zárójelet.*
ebből $(x - x + 1)(2x - 1) = 2$.	1 pont	
Ebből $x = \frac{3}{2}$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. b)		
Az 1-nél nagyobb x-ek esetén	1 pont*	
$\lg x - \lg(x-1) = 2 \iff \lg\frac{x}{x-1} = 2$.	1 pont	*Ez az 1 pont a logaritmus azonosságának helyes alkalmazásáért jár.*
(A logaritmus definíciójából adódik, hogy) $\frac{x}{x-1} = 100$.	1 pont	
Azaz $x = 100(x-1)$,	1 pont	
Ebből $x = \frac{100}{99}$ $(\approx 1{,}01)$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
*A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a kapott gyököt az eredeti egyenletbe való behelyettesítés alapján fogadja el.*		

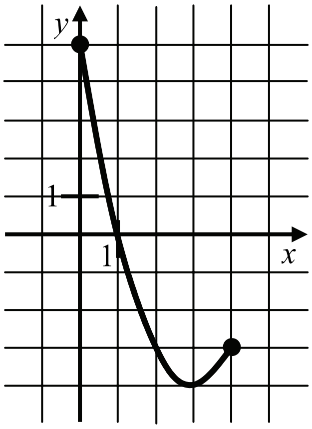
14.		
A telefonszám 7-jegyű, így egy 4 és egy 3 számból álló oszlop számaiból áll.	1 pont	*Ez az 1-1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ezeket a gondolatokat csak felhasználja a megoldása során.*
Két lényegesen különböző eset van: az első számjegy vagy a középső oszlopból, vagy valamelyik szélső oszlopból való.	1 pont	
Első eset Ha a középső oszlop számjegyeivel kezdődik a szám, akkor – mivel 0-val nem kezdődhet a telefonszám – az első számjegy 3-féle lehet.	1 pont	
A 4 számjegynek $3 \cdot 3! = 18$ sorrendje lehetséges.	1 pont	
Ekkor az első 4 számjegyet követő 3 számjegy vagy az első, vagy a harmadik oszlop számjegyeiből adódik. A 3 számjegy mindkét esetben $3! = 6$-féle sorrendben írható.	1 pont	
Az így adódó 7-jegyű telefonszámok száma: $3 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2 (= 216)$.	2 pont	*Ha nem említi mindkét lehetőséget, 1 pontot kaphat.*
Második eset A telefonszám első 3 számjegye az első oszlopban álló számjegyekből áll. Azok sorrendje $3! = 6$-féle lehet, és mindegyik elrendezés esetében az azokat követő 4 jegy sorrendje (a középső oszlopból) $4! = 24$-féle lehet.	1 pont	
Így az ilyen telefonszámok száma $3! \cdot 4! (= 144)$.	2 pont	
Hasonlóan adódik, hogy a harmadik oszlop számjegyeivel kezdődő telefonszámok száma is ugyanannyi $(3! \cdot 4! = 144)$.	1 pont	
A feltételeknek eleget tevő 7-jegyű telefonszámok száma $216 + 144 + 144 = 504$.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

15. a)

csak maximuma van	csak minimuma van	minimuma és maximuma is van	nincs szélsőértéke
g	*j*	*f*	*h; m*

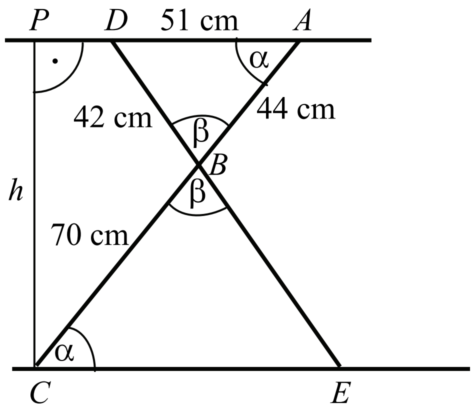
Helyesen beírt függvény betűjele 1 pont, ha ez a betűjel csak egy helyen szerepel.	5 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. b)

	3 pont	*Ha tudja, hogy a függvény képe egy felfele nyitott parabola íve 1 pont.* *A tengelypont jó helyen van 1 pont.* *Ha figyelembe veszi az adott értelmezési tartományt 1 pont.*
Értékkészlete $[-4;5]$.	2 pont	*Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe az adott értelmezési tartományt, legfeljebb 1 pont adható.*
A $k(x)=0$ egyenlet megoldásai (1 és 5) közül csak az 1 tartozik az értelmezési tartományba, tehát ez a zérushely.	2 pont	*Ha vizsgázó a $k(x)=0$ egyenlet mindkét megoldását megadja zérushelyként, legfeljebb 1 pont adható.*
Összesen:	**7 pont**	

II. B

16. a)



Az *ABD* és a *CBE* háromszög hasonlók,	2 pont	
mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, illetve váltószögek).	1 pont	
Ezért (a megfelelő oldalaik aránya is egyenlő, tehát) $\frac{BE}{42}=\frac{70}{44}$.	2 pont	
$BE = 42\cdot\frac{70}{44}\approx 66{,}8\,(\text{cm})$.	1 pont	
A *DE* tartórúd tehát ≈109 cm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

16. b)

Az *ABD* háromszögben számoljuk ki pl. az α szöget koszinusztétel alkalmazásával.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a gondolat csak a megoldásban jelenik meg.*
$42^2 = 51^2 + 44^2 - 2\cdot 51\cdot 44\cdot\cos\alpha$.	2 pont	
Ebből $\cos\alpha\approx 0{,}6179$,	2 pont	
$\alpha\approx 51{,}8°$.	1 pont	
Az *APC* derékszögű háromszögből: $h = AC\cdot\sin\alpha$,	2 pont	
azaz $h\approx 114\cdot\sin 51{,}8°\approx 89{,}6$ (cm).	1 pont	
A vasalófelület tehát ≈ (90+3=) 93 cm magasságban van a padló felett.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

Az ABD háromszög másik két szögének nagysága $\beta\approx 72{,}7°$ és $ADB\sphericalangle\approx 55{,}5°$.
Ha a másik tartórúd segítségével számol, akkor $h\approx 109\cdot\sin 55{,}5°\approx 89{,}8$ cm adódik, ami kerekítve ugyancsak 90 cm.

17. a) első megoldás		
Összesen 6^3-féle (egyenlően valószínű) dobássorozat lehetséges.	1 pont	
a1) <u>300 zseton a nyeremény:</u> Mindhárom dobás páros. Ez 3^3-féleképpen következhet be.	1 pont	
300 zsetont $\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{8}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a2) <u>500 zseton a nyeremény:</u> Az első dobás 1-es, a második páros és a harmadik páratlan. Ez $3\cdot 3$-féleképpen következhet be.	1 pont	
Az, hogy az első dobás 1-es, a második páratlan és a harmadik páros szintén $3\cdot 3$-féleképpen teljesülhet.	1 pont	
A kedvező esetek száma $3\cdot 3+3\cdot 3\ (=18)$.	1 pont	
500 zsetont $\frac{2\cdot 3\cdot 3}{6^3}=\frac{1}{12}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a3) <u>800 zseton a nyeremény:</u> Az első dobás 3-as, a másik kettő pedig páratlan. Ez $3\cdot 3$-féleképpen következhet be.	1 pont	
(Mivel a három dobás 6^3-féle lehet, így) annak a valószínűsége, hogy 800 zsetont nyer $\frac{3\cdot 3}{6^3}=\frac{1}{24}$.	1 pont	
a4) <u>2000 zseton a nyeremény:</u> Mivel a kedvező esetek száma 1,	1 pont	
így a 2000 zsetonos nyeremény valószínűsége $\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

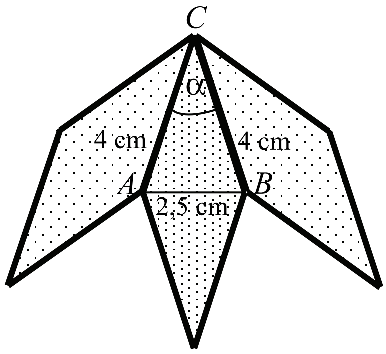
17. a) második megoldás		
a1) 300 zseton a nyeremény: Mivel (a három dobás eredménye független egymástól, és) minden dobás eredménye $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz páros,	1 pont	
ezért 300 zsetont $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a2) 500 zseton a nyeremény: Annak a valószínűsége, hogy az első dobás 1-es lesz $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a második páros és a harmadik páratlan $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.	1 pont	
Ugyanennyi $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$ annak a valószínűsége is, hogy a második dobás páratlan és a harmadik páros.	1 pont	*Vagy: a második és harmadik dobás eredménye paritás szempontjából 4-féle lehet (ps-ps, ps-pt, pt-ps és pt-pt), és mivel mindegyik ugyanakkora valószínűséggel következik be, a kedvező esetek bekövetkezésének valószínűsége 0,5.*
Annak a valószínűsége, hogy az egyik dobás páros, a másik páratlan $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,	1 pont	
így 500 zsetont $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a3) 800 zseton a nyeremény: Annak a valószínűsége, hogy az első dobás 3-as $\frac{1}{6}$, annak pedig, hogy a további két dobás páratlan $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.	1 pont	
800 zsetont $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a4) 2000 zseton a nyeremény: A három dobás bármelyike során az 5-ös dobásának valószínűsége $\frac{1}{6}$,	1 pont	
(és mivel a három dobás eredménye független egymástól,) ezért 2000 zsetont $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

17. b)		
A nyertes dobássorozat komplementer eseménye olyan forduló, amelyben nem nyer a játékos.	2 pont	*Ez a 3 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ezeket a gondolatokat csak felhasználja a megoldása során.*
Az esemény és a komplementer esemény valószínűségének összege 1.	1 pont	
Nyerési esély $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{216}$,	1 pont	
azaz $\frac{27}{216}+\frac{18}{216}+\frac{9}{216}+\frac{1}{216}=\frac{55}{216}$ ($\approx 0{,}25$).	1 pont	
Tehát annak a valószínűsége, hogy a játékos nem nyer $1-\frac{55}{216}=\frac{161}{216}\ (\approx 0{,}75)$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. a) első megoldás		
A sütemények száma többszöröse a 16-nak és a 18-nak is.	1 pont	*Akkor is jár a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás menetéből derül ki.*
16 és 18 legkisebb közös többszöröse 144.	2 pont	
A sütemények száma ezért a 144-nek többszöröse.	1 pont	*Akkor is jár a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás menetéből derül ki.*
A 144 többszörösei közül a 400 és az 500 közé csak a 144 háromszorosa esik.	1 pont	
A sütemények száma 432.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. a) második megoldás		
Ha egy lány n db süteményt sütött és egy fiú k db-ot kapott, akkor a sütemények száma $16n$ és $18k$ módon is kiszámítható, azaz $16n=18k$.	1 pont	
(Ebből $n=\frac{9k}{8}$. Mivel n és k is pozitív egész és $(9\,;8)=1$, így) k osztható 8-cal.	2 pont	
A sütemények száma 400 és 500 közé esik, így $400<18k<500$, azaz $23\le k\le 27$.	1 pont	
Ezek közül csak a 24 osztható 8-cal, ezért $k=24$.	1 pont	
A sütemények száma tehát $18\cdot 24$, azaz 432.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. b)



Modellt talál a feladathoz (pl. felülnézeti ábrát készít, amelyen a kívánt elhelyezésben tünteti fel a süteményeket).	2 pont	
Az ABC egyenlő szárú háromszögből: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1{,}25}{4}=0{,}3125$.	2 pont	
Ebből $\alpha \approx 36{,}4°$ $(36{,}41^\circ < \alpha < 36{,}42^\circ)$	1 pont	
(Mivel $9<\frac{360°}{\alpha}<10$, ezért) Dani legfeljebb 9 darabot tudott elhelyezni a tálon a leírt módon.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. c)

A rombusz alakú sütemény felülnézetének területe $\approx 9{,}5$ cm^2.	2 pont	*A területet kiszámíthatja az előző részben kapott szög segítségével, vagy kiszámítja a rombusz másik átlójának a hosszát (≈ 7,6 cm; 1 pont) és az átlókkal számítja a területet (1 pont).*
A linzerkarika felülnézetének területe $2^2\pi - x^2\pi$ (cm^2).	1 pont	
$4\pi - x^2\pi \approx 9{,}5$	1 pont	
$x \approx 0{,}99$. Azaz a linzerkarika belső körének sugara kb. 1 cm.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	