ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2012. május 8.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon!
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az így adott pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül egy, **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek ugyan hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.

$x - 3 = 20$	1 pont	
$x = 23$	1 pont	*Az indoklás nélküli válasz is teljes értékű.*
Összesen:	**2 pont**	

2.

a + **b**	2 pont	*Ha a leírt válaszból nem derül ki, hogy* ***a*** *és* ***b*** *vektorok, akkor 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

3.

$x = -3$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

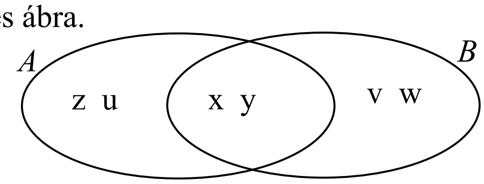
4.

A g függvény grafikonjának betűjele: B.	2 pont	
A zérushely: $(x =) -1$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5.

15 féle lehetőség van.	2 pont	*Fogadjuk el a* $\binom{6}{4}$*-et is!*
Összesen:	**2 pont**	

6.

Helyes ábra. 	1 pont	
$A \cap B = \{x; y\}$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.

$t_2 = t_0 \cdot q^2$	1 pont	*Ez a két pont megadható, ha képlet nélkül felírja:* $50000 \cdot 1{,}1^2$.
$t_2 = 50000 \cdot 1{,}1^2$	1 pont	
A befektetési jegy értéke: 60 500 Ft.	1 pont	*Ha jól kiszámolja az 1 év múlva aktuális értéket, és aztán rosszul folytatja, kapjon 1 pontot!*
Összesen:	**3 pont**	

8.		
y lehetséges értékei: 1; 4; 7.	2 pont	*Egy vagy két jó érték megadása 1 pont. Ha hibás y érték is szerepel a megoldásban, nem jár pont.*
Összesen:	**2 pont**	

9.		
A maximumhely: 6.	1 pont	
A maximum értéke: 3.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
Az ábrán pontosan egy harmadfokú,	1 pont	
pontosan három másodfokú,	1 pont	
pontosan egy elsőfokú pont van.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*Helyes ábra esetén jár mind a 3 pont.*

11.		
$(x-2)^2+(y+1)^2=5$	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a függvénytáblázat megfelelő képleteit jól alkalmazza.*
A középpont az $O(2;\ -1)$ pont,	1 pont	
a sugár $\sqrt{5}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
A: hamis.	1 pont	
B: hamis.	1 pont	
C: igaz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

13. a)

$1011_2 = 11$,	2 pont	
Pali állítása hamis.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. b)

$10 = a_1 + 36$	1 pont	
$a_1 = -26$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. c) első megoldás

$-26 + (n-1) \cdot 4 \geq 100$	2 pont	*Ha a reláció hiányos, 1 pont jár.*
$n \geq 32{,}5$; tehát 33-dik tagja a sorozatnak.	1 pont	
A keresett tag $a_{33} = 102$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

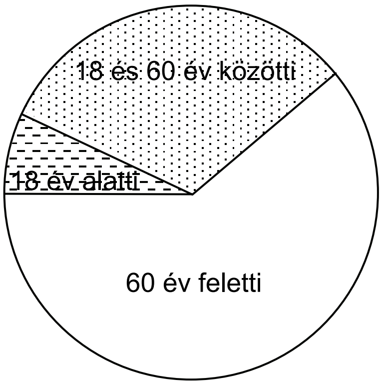
13. c) második megoldás

A sorozatban a 4-gyel osztva kettő maradékot adó számokról van szó.	1 pont	
Ezek közül a legkisebb 3-jegyű szám a 102.	1 pont	
$10 + k \cdot 4 = 102$; $k = 23$	1 pont	
Tehát a sorozat 10 + 23 = 33-dik tagjáról van szó.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. d)

Az első megfelelő tag $a_{10} = 10$, az utolsó $a_{32} = 98$,	2 pont	
ezért a halmaznak 22+1=23 eleme van.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. a)		
$p=\frac{k}{n}\left(=\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}\right)$	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
$p=\frac{1978}{12320}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}16$	1 pont	*≈16,06%*
Összesen:	**3 pont**	

14. b)		
		
A 60 év feletti ápoltak száma: $1978-138-633=1207$ fő.	1 pont	
A 18 év alatti 138 fő a kördiagramon megfelel $\frac{138}{1978}\cdot 360°\approx 25°$-os középponti szögnek.	1 pont	*Ha a középponti szög kiszámításának helyes módszere egyszer sem jelenik meg, akkor jó adatok esetén is csak 1 pont jár.* *Ha csak egy számítást részletez, de mindhárom adata jó, 2 pontot kapjon.*
A 18 és 60 év közötti 633 fő a kördiagramon megfelel $\left(\frac{633}{1978}\cdot 360°\approx\right)115°$-os középponti szögnek.	1 pont	
A 60 év feletti 1207 fő a kördiagramon megfelel $\left(\frac{1207}{1978}\cdot 360°\approx\right)220°$-os középponti szögnek.	1 pont	
A kördiagram helyes elkészítése (hozzávetőleges szögekkel, a körcikkek címkézésével).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. c)		
A Nekeresden élők között $12320\cdot 0{,}24=$	1 pont	
$=2956{,}8(\approx 2957)$ fő 60 év feletti.	1 pont	*2956 is elfogadható.*
A 60 év feletti és ápolásban részesülők száma 1207, így a keresett valószínűség: $\frac{1207}{2957}(\approx 0{,}41)$.	1 pont	
A valószínűség $0{,}41-0{,}16=0{,}25$-dal emelkedett.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15.		
Az ABP háromszögben koszinusz-tételt alkalmazva:	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
$BP^2 = 620^2 + 720^2 - 2\cdot 620\cdot 720\cdot \cos 53°$,	1 pont	
$BP \approx 605$	2 pont*	
Az AQB szög 19º.	1 pont	
Az ABQ háromszögben szinusz-tételt (kétszer) alkalmazva:	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
$\frac{620}{\sin 19°} = \frac{AQ}{\sin 108°}$,	1 pont	
$AQ \approx 1811$	1 pont*	
$PQ \approx 1811 - 720 = 1091$	1 pont*	
$\frac{620}{\sin 19°} = \frac{BQ}{\sin 53°}$,	1 pont	
$BQ \approx 1521$	1 pont*	
A távolságok méterre kerekítve: $PQ = 1091$ m, $BQ = 1521$ m és $BP = 605$ m.	1 pont*	*Ez a pont a válaszul megadott mértékegységért (m) jár.*
Összesen:	**12 pont**	
*Amennyiben számítása közben, nyomon követhetően szabályos kerekítéseket alkalmaz a *-gal megjelölt pontokat akkor is megkaphatja, ha eredményei a megadottól legfeljebb 3 méterrel eltérnek.*		

II. B

16. a)

(Az *A* csapatnál mind a 7 játékos 6 nemzetbelijével mérkőzik, így a mérkőzéseket duplán számoltuk.) Az *A* csapatnál $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ mérkőzés zajlott.	1 pont	
(A *B* csapatnak n tagja van,) a lejátszott mérkőzések száma $\frac{n\cdot(n-1)}{2}=55$.	2 pont	
Az $n^2-n-110=0$	1 pont	
egyenlet pozitív gyöke 11 (a gyökök -10 és 11).	2 pont	
A *B* csapatnak 11 tagja van.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

16. b)

Az *A* csapat mind a 6 játékosa 8 mérkőzést játszik.	1 pont	
Összesen 6·8 = 48 mérkőzés zajlott a második héten.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. c)

(A klasszikus valószínűségi modell alkalmazható.) $p=\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
A nyerteseket $\binom{18}{4}$-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Az *A* csapat 7 tagjából 1-et 7-féleképpen,	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha csak a kedvező esetek számát írja fel helyesen.*
a *B* csapat 11 tagjából 3-at $\binom{11}{3}$-féleképpen választhatunk ki.	1 pont	
(A két kiválasztás egymástól független.) A kedvező esetek száma: $7\cdot\binom{11}{3}$.	1 pont	
A keresett valószínűség $p=\frac{7\cdot\binom{11}{3}}{\binom{18}{4}}=$ $\left(=\frac{7\cdot 165}{3060}\right)\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}377\approx 38\%$.	1 pont	*A helyes valószínűség bármely alakban megadva 1 pontot ér.*
Összesen:	**7 pont**	

17. a)		
$2x-1>0$ és $2x-3>0$, tehát $x>1{,}5$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a végén behelyettesítés alapján szűri ki a hamis gyököt.*
A logaritmus azonosságai alapján: $\lg(2x-1)(2x-3)=\lg 8$	1 pont	
(A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés,) ezért $(2x-1)(2x-3)=8$, azaz	1 pont	
$4x^2-8x-5=0$.	1 pont	
Ennek gyökei: $x_1=\frac{5}{2}$ és $x_2=-\frac{1}{2}$.	1 pont	
A értelmezési tartományba csak $x_1=\frac{5}{2}$ tartozik bele, és ez valóban megoldás.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

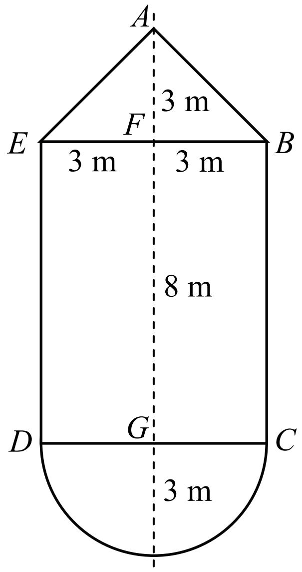
17. b)		
Az egyenlet $\cos x$-re kapott gyökei megegyeznek az a)-beli másodfokú egyenlet gyökeivel. ($(\cos x)_1=\frac{5}{2}$ és $(\cos x)_2=-\frac{1}{2}$)	2 pont	
A $\cos x=\frac{5}{2}$ nem ad megoldást.	1 pont	
$\cos x=-\frac{1}{2}$-hez tartozó egyetlen szög, ami egy háromszög szöge lehet $x=120^\circ=\frac{2\pi}{3}$ és ez valóban megoldás.	1 pont	*Az x szög bármelyik helyes megadásáért jár a pont. Nem jár a pont, ha a vizsgázó több szöget is megad.*
Összesen:	**4 pont**	

17. c) **első megoldás**		
Bevezetjük a $\sqrt{y}=z$ új változót,	1 pont	
így $0\le z$ ad csak megoldást.	1 pont	
A $4z^2-8z-5=0$ másodfokú egyenlet egyetlen nem negatív gyöke $z=\frac{5}{2}$.	1 pont	
Így az eredeti egyenlet megoldása $y=\frac{25}{4}$, és ez valóban megoldás.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. c) második megoldás		
Mindkét oldalt négyzetre emeljük: $16y^2 - 40y + 25 = 64y$	1 pont	
A $16y^2 - 104y + 25 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei $y_1 = \frac{25}{4}$, $y_2 = \frac{1}{4}$	2 pont	
Behelyettesítés vagy az eredeti egyenletben a két oldal értékkészletének a vizsgálata mutatja, hogy csak az első gyök a megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

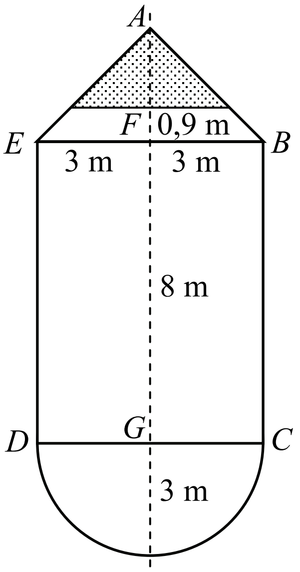
17. d)		
A középső számot rögzítjük.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
A többi számnak 6!-féle sorrendje lehetséges,	1 pont	
tehát a hét számnak 720-féle kívánt leírási sorrendje van.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

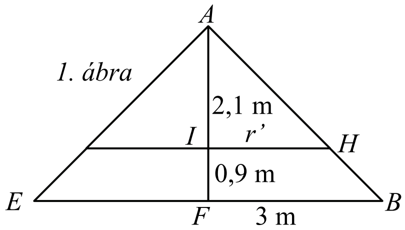
18. a)

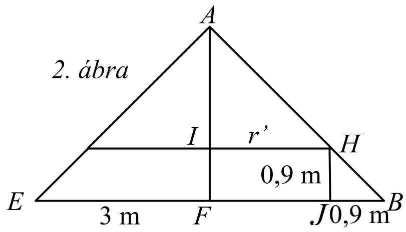


A feladat megértése.	1 pont	
A tartály alsó részének felülete (egy $r = 3$ méter sugarú félgömb felszíne): $A_1 = \frac{4r^2\pi}{2} = 2r^2\pi = 2\cdot 3^2\cdot\pi = 18\pi\left(\approx 56{,}5\right)$	1 pont	
A tartály középső részének felülete (egy $r = 3$ méter sugarú, $m = 8$ méter magas körhenger palástjának területe): $A_2 = 2r\pi m = 2\cdot 3\cdot\pi\cdot 8 = 48\pi\left(\approx 150{,}8\right)$	1 pont	
A tartály felső részének felülete (egy $r = 3$ méter sugarú, $m = 3$ méter magas forgáskúp palástjának területe): A kúp alkotója: $AB = a = \sqrt{2}r$	1 pont	
$A_3 = ra\pi = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\pi = 9\sqrt{2}\pi\left(\approx 40\right)$	1 pont	
A belső felület: $A = 18\pi + 48\pi + 9\sqrt{2}\pi = \left(66 + 9\sqrt{2}\right)\pi \approx 247{,}33\,\mathrm{m}^2$ azaz mivel a feladat értelmezése szerint itt felfelé kell kerekíteni, hogy elég legyen az anyag, $248\ \mathrm{m}^2$ a helyes válasz.	1 pont	*Ha csak a matematikai kerekítést végezte el, úgy a 247 m² esetén is jár ez a pont.*
Összesen:	**6 pont**	

18. b)







A tartály magassága: $(3+8+3=)\,14$ méter. A magasság 85%-a: $(14\cdot 0{,}85=)\,11{,}9$ méter,	1 pont	
ami azt jelenti, hogy a félgömb és a henger tele van, valamint a kúpban 0,9 méter magasan áll a víz.	1 pont	
A tartály alsó részének térfogata (egy r = 3 méter sugarú félgömb térfogata): $V_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4r^3\pi}{3}\left(=\frac{2r^3\pi}{3}\right)=$	1 pont	
$=\frac{2\cdot 3^3\cdot\pi}{3}(=18\pi\approx 56{,}5)$.	1 pont	
A tartály középső részének térfogata (egy r = 3 méter sugarú, m = 8 méter magas körhenger térfogata): $V_2=r^2\pi m=$	1 pont	
$=3^2\cdot\pi\cdot 8(=72\pi\approx 226{,}2)$.	1 pont	
A tartály felső részének térfogata (egy csonkakúp térfogata). A csonkakúp fedőkörének sugarát kiszámolhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételével: *(1. ábra)* $\left(\frac{IH}{FB}=\right)\frac{r'}{3}=\frac{2{,}1}{3}\left(=\frac{AI}{AF}\right)$,	1 pont*	
$r'=2{,}1$.	1 pont*	
$V_3=\frac{\pi}{3}m\left(r^2+r'^2+rr'\right)=$	1 pont	
$=\frac{\pi}{3}\cdot 0{,}9\cdot\left(3^2+2{,}1^2+3\cdot 2{,}1\right)=(5{,}913\pi\approx 18{,}6)$.	1 pont	
A tartályban lévő víz térfogata: $V=18\pi+72\pi+5{,}913\pi=95{,}913\,\pi\approx 301\ \mathrm{m}^3$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

*A másik megoldási mód a *-gal jelölt két pontra.*

A tartály felső részének térfogata (egy csonkakúp térfogata). A csonkakúp fedőkörének sugarát kiszámolhatjuk észrevéve, hogy az $AFB\Delta$ és a $HJB\Delta$ is egyenlőszárú derékszögű háromszög, *(2. ábra)*	1 pont*	
így $r' = (FB - JB = 3 - 0{,}9 =) 2{,}1$.	1 pont*	