ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2013. május 7.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

18. b) **első megoldás**		
Az összes (egyenlően valószínű) eset száma $8^4 (= 4096)$.	1 pont	
5-nél többet dobni háromféleképpen lehet (6, 7, 8).	1 pont	
Az olyan esetek száma, amelyben mind a négy dobás 5-nél nagyobb $3^4 (= 81)$.	1 pont	
Pontosan három 5-nél nagyobb dobás úgy lehetséges, hogy a négy dobás közül az egyik nem ilyen.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Az ilyen esetek száma $4 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) (= 540)$.	2 pont	*Ha a vizsgázó egyetlen hibája, hogy nem szoroz 4-gyel, akkor 1 pontot kapjon.*
A kedvező esetek száma 81 + 540 = 621.	1 pont	
A kérdezett valószínűség $\frac{621}{4096}$ $(\approx 0{,}152)$	1 pont	*Százalékban megadott helyes válaszért is jár ez a pont.*
Összesen:	**8 pont**	

18. b) **második megoldás**		
P(egy adott dobás 5-nél nagyobb) $= \frac{3}{8}$	2 pont	
P(mind a négy dobás nagyobb 5-nél) = $= \left(\frac{3}{8}\right)^4$ $(\approx 0{,}0198)$	1 pont	
P(három dobás nagyobb 5-nél, egy nem) = $= \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{5}{8}$ $(\approx 0{,}1318)$	2 pont	*Ha a vizsgázó egyetlen hibája, hogy nem szoroz 4-gyel, akkor 1 pontot kapjon.*
A kérdéses valószínűség ezek összege, azaz	1 pont	
$\approx 0{,}152$.	2 pont	*Százalékban megadott helyes válaszért is jár ez a pont.*
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a binomiális eloszlás képletét használva helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

17. c)		
(A megadott egyenlet cos x-ben másodfokú,) így a megoldóképlet felhasználásával	1 pont	
$\cos x = 0{,}5$	1 pont	
vagy $\cos x = -2$.	1 pont	
Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1;\ 1]$ intervallum).	1 pont	
A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$.	2 pont	*Ha a vizsgázó a megadott alaphalmazt nem veszi figyelembe vagy fokban (jól) adja meg a válaszát (–60º; 60º), akkor 1 pontot kapjon.*
Összesen:	**6 pont**	

18. a)		
Az oldallap-háromszögekben a 2 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) $\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$ ($\approx 2{,}83$) (cm).	1 pont	.
Egy oldallap területe $\frac{2\cdot\sqrt{8}}{2}$ ($\approx 2{,}83$) (cm^2).	1 pont	
A test felszíne: $A \approx 22{,}6$ cm^2.	1 pont	
A testet alkotó gúlák magassága megegyezik annak az egyenlő szárú háromszögnek a magasságával, amelynek szára a gúlák oldalélével, alapja a gúla alapjának átlójával egyezik meg.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból (például megfelelő ábrából) kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
A gúla m magasságára (a Pitagorasz-tételt alkalmazva): $m^2=3^2-\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2$.	1 pont	
$m=\sqrt{7}$ ($\approx 2{,}65$) (cm)	1 pont	
A gúla térfogata: $V=\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{7}$ ($\approx 3{,}53$) (cm^3).	1 pont	
A test térfogata ennek kétszerese,	1 pont	
azaz megközelítőleg 7,1 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a feladat megoldása során rosszul kerekít, vagy válaszában nem kerekít, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.
Ha a vizsgázó valamelyik válaszát mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

I.

1.		
$A = \{3;\ 5;\ 6;\ 8;\ 9\}$	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
Az átlagos jövedelem 160 000 Ft.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
A sütemény összköltsége 640 Ft.	1 pont	
A vaj költsége ennek $\frac{3}{8}$ része.	1 pont	*Ez a pont a 240 és a 640 arányának bármilyen formában történő meghatározásáért jár.*
A kérdéses körcikk középponti szöge 135°.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4.		
1) párja C)	1 pont	
2) párja A)	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
Az adatokat feltüntető helyes ábra, az út hossza x.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül jól dolgozik.*
$x=\frac{124}{\sin 6{,}5°}\approx$	1 pont	
≈ 1095 méter hosszú az út.	1 pont	*Ez a pont jár, ha a vizsgázó a sin 6,5°-nak más, legalább két tizedesjegyre helyesen kerekített értékével jól számol.*
Összesen:	**3 pont**	

6.		
A metszéspont $M(2;\ 0)$.	2 pont	*Koordinátánként 1-1 pont jár.*
Az egyenes meredeksége –2.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7.		
$x^2+10x+21=(x+5)^2-4$	2 pont	
A minimumhely – 5.	1 pont	
A minimum értéke – 4.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó meghatározza a függvény zérushelyeit (–7 és –3) és ezek segítségével helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.
2. Ha a vizsgázó a függvényt jól ábrázolja és az ábra alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

8.		
A) hamis B) hamis C) igaz	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

9.		
$k=8$	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
B és D az első két helyen 2-féleképpen végezhet.	1 pont	
Mögöttük A, E és F sorrendje 3! = 6-féle lehet.	1 pont	
Így összesen $2\cdot 6=12$ -féleképpen érhetnek célba a versenyzők.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11.		
A módusz 5,	1 pont	
a medián 4.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12.		
A kérdezett valószínűség $\frac{3}{8}(=0{,}375)$.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

17. a) első megoldás		
Ha $x<3$, akkor ($3-x>0$, ezért)	1 pont	
$x+2\geq 0$, vagyis $x\geq -2$.	1 pont	
A 3-nál kisebb számok halmazán tehát a $[-2;3[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek.	1 pont	*A $-2\leq x<3$ jelölés is elfogadható.*
Ha $x>3$, akkor ($3-x<0$, ezért)	1 pont	
$x+2\leq 0$, vagyis $x\leq -2$.	1 pont	
A 3-nál nagyobb számok halmazában nincs ilyen elem, tehát a 3-nál nagyobb számok között nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.	1 pont	
A megoldáshalmaz: $[-2;3[$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. a) második megoldás		
A vizsgázó megrajzolja (vázolja) az $x\mapsto x+2$ és az $x\mapsto 3-x$ elsőfokú függvények grafikonját, vagy a számláló és a nevező előjelét külön-külön helyesen állapítja meg számegyenes segítségével vagy szövegesen indokolva.	2-2 pont	*Ha a függvények monotonitása és zérushelye is jól jelenik meg az ábrán, akkor jár ez a 2-2 pont*
Megállapítja, hogy a $]-\infty;-2[$ intervallum elemei nem megoldások.	1 pont	*Szöveges vagy a számegyenes segítségével, ábrával alátámasztott indoklás egyaránt elfogadható.*
Megállapítja, hogy a $[-2;3[$ intervallum elemei mind megoldások.	1 pont	
Megállapítja, hogy a $[3;+\infty[$ intervallum elemei nem megoldások.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a 3-at elfogadja megoldásként, akkor ezért 2 pontot veszítsen. Ha a vizsgázó a (–2)-t nem adja meg megoldásként (nem vizsgálja az egyenlőséget), akkor ezért 1 pontot veszítsen.

17. b)		
$5\cdot 3^x=20$	1 pont	
$3^x=4$	1 pont	
$x=\log_3 4$	1 pont	$x\lg 3=\lg 4$
$x\approx 1{,}2619$	1 pont	*Csak a megadott alakért jár ez a pont.*
Összesen:	**4 pont**	

16. b) első megoldás

Ha Andi egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta volna,	2 pont	*Ez a 3 pont jár, ha a vizsgázó egy gráfon egyértelműen jelöli az AB élt és az F-ből (vagy E-ből) induló négy élt.*
akkor például Feri eddigi mérkőzéseit Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszotta volna.	1 pont	
Ekkor azonban Enikőnek már nem lehet meg a négy mérkőzése, hiszen legfeljebb Csabával, Danival és Ferivel játszhatott volna.	2 pont	*Az „ellentmondásra jutás" bármilyen helyes indoklásáért jár ez a 2 pont.*
Tehát igazoltuk, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését nem játszhatta Barnabással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. b) második megoldás

Feri a négy meccse között vagy játszott Andival, vagy nem.	1 pont	
Ha játszott vele, akkor Andi az egyetlen meccsét nem játszhatta Barnabással.	1 pont	
Ha nem játszott vele, akkor Feri Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszott.	1 pont	
Ez utóbbi esetben Enikőre is igaz, hogy vagy játszott Andival vagy nem. Ha játszott vele, akkor Andi az egyetlen meccsét nem játszhatta Barnabással,	1 pont	
ha nem, akkor Enikő a maradék három meccsét Barnabással, Csabával és Danival játszotta le.	1 pont	
Ekkor viszont már Barnabás a két meccsét Enikővel és Ferivel játszotta, tehát nem játszhatta Andival (aki csak Danival játszhatott).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. c)

A játékosok kiválasztása helyett a lejátszott – illetve nem lejátszott – mérkőzéseiket vizsgáljuk.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Összesen $\left(\frac{6\cdot 5}{2}=\right)15$ mérkőzés szükséges (összes eset száma).	2 pont	
Eddig 8 mérkőzés zajlott le,	1 pont	
tehát 7 mérkőzést kell még lejátszani (kedvező esetek száma).	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{7}{15}(\approx 0{,}47)$.	1 pont	*Százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**7 pont**	

II. A

13. a)

A sorozat differenciáját d-vel jelölve: $45{,}5=\frac{2\cdot 2+(7-1)d}{2}\cdot 7$.	1 pont	$a_4=\frac{45{,}5}{7}=6{,}5$
$13=4+6d$	1 pont	$3d=4{,}5$
$d=1{,}5$	1 pont	
$a_6=2+5\cdot 1{,}5$	1 pont	
A sorozat 6. tagja 9,5.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b)

A sorozat hányadosát q-val jelölve: $5q+5q^2=10$.	1 pont	
$q_1=-2$; $q_2=1$	2 pont	
Ha a hányados –2, akkor a sorozat első hét tagjának összege: $S_7=5\cdot\frac{(-2)^7-1}{-2-1}=$	1 pont	
$=215$.	1 pont	
Ha a hányados 1, akkor a sorozat tagjai megegyeznek,	1 pont	
így ebben az esetben az első hét tag összege $(7\cdot 5=)35$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

14. a)

A kérdéses súlyvonalra a P csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
A QR szakasz felezőpontja $F(4; -0{,}5)$.	1 pont	
A súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{PF}$ (10; 0,5).	1 pont	
A súlyvonal egyenlete: $x - 20y = 14$.	2 pont	*Bármely ezzel ekvivalens egyenlet is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

14. b) első megoldás

(A kérdéses szöget a háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni.) Az oldalvektorok $\overrightarrow{PQ}(12; -5)$ és $\overrightarrow{PR}(8; 6)$.	2 pont	
A két vektor skalárszorzata a koordinátákból: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = 12\cdot 8 + (-5)\cdot 6 (= 66)$.	1 pont	
Az oldalvektorok hossza $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert = 13$ és $\lvert\overrightarrow{PR}\rvert = 10$.	1 pont	
A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} =\right) 66 = 13\cdot 10\cdot\cos\alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szöget jelöli.	1 pont	
Innen $\cos\alpha \approx 0{,}5077$.	1 pont	
$\alpha \approx 59{,}5°$ (mivel $0° < \alpha < 180°$).	1 pont	*Más, ésszerű és helyes kerekítéssel kapott eredmény is elfogadható.*
Összesen:	**7 pont**	

14. b) második megoldás

A PQR háromszög oldalainak hosszát a két pont távolságának kiszámításához használt képlettel határozzuk meg.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$PQ = 13$, $PR = 10$, $QR = \sqrt{137}$ ($\approx 11{,}7$)	2 pont	*Két oldal helyes kiszámolásáért 1 pont, más esetben 0 pont jár.*
Írjuk fel a PQR háromszög QR oldalára a koszinusztételt: $\left(\sqrt{137}\right)^2 = 10^2 + 13^2 - 2\cdot 10\cdot 13\cdot\cos\alpha$, (ahol α a háromszög P csúcsánál lévő belső szöget jelöli.)	1 pont	
Innen $\cos\alpha \approx 0{,}5077$.	2 pont	
$\alpha \approx 59{,}5°$ (mivel $0° < \alpha < 180°$).	1 pont	*Más, ésszerű és helyes kerekítéssel kapott eredmény is elfogadható.*
Összesen:	**7 pont**	

15. a)

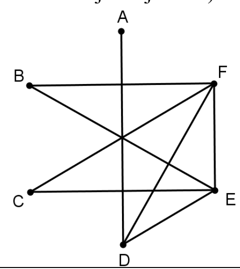
A járulékokra levont összeg $200\,000\cdot 0{,}17 = 34\,000$ (Ft).	1 pont	
A személyi jövedelemadóra levont összeg $200\,000\cdot 1{,}27\cdot 0{,}17 = 43\,180$ (Ft).	1 pont	
Kovács úr nettó bére: 200 000 – 34 000 – 43 180 + 15 100 =	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
= 137 920 Ft.	1 pont	
Ez a bruttó bérének megközelítőleg a 69%-a.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. b)

Ha Szabó úr bruttó bére az adott hónapban x Ft volt, akkor járulékokra $0{,}17x$ Ft-ot,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
személyi jövedelemadóra pedig $0{,}17\cdot 1{,}27x$ Ft-ot vontak le.	1 pont	
$x - 0{,}17x - 0{,}17\cdot 1{,}27x + 5980 = 173\,015$	2 pont	
$0{,}6141x = 167\,035$	1 pont	
Ebből $x \approx 272\,000$.	1 pont	
Szabó úr bruttó bére 272 000 Ft volt.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II. B

16. a)

Az egyik lehetséges megoldás (a résztvevőket nevük kezdőbetűjével jelölve): 	4 pont	*Három csúcs helyes fokszáma 1 pontot, négy csúcsé 2 pontot, öt csúcsé 3 pontot ér.*
Összesen:	**4 pont**	