ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2013. május 7.

# MATEMATIKA

# KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

# JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

# I.

| 1. | | |
|---|---|---|
| $A = \{3; 5; 6; 8; 9\}$ | 2 pont | *Nem bontható.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 2. | | |
|---|---|---|
| Az átlagos jövedelem 160 000 Ft. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 3. | | |
|---|---|---|
| A sütemény összköltsége 640 Ft. | 1 pont | |
| A vaj költsége ennek $\frac{3}{8}$ része. | 1 pont | *Ez a pont a 240 és a 640 arányának bármilyen formában történő meghatározásáért jár.* |
| A kérdéses körcikk középponti szöge 135°. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 4. | | |
|---|---|---|
| 1) párja C) | 1 pont | |
| 2) párja A) | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 5. | | |
|---|---|---|
| Az adatokat feltüntető helyes ábra, az út hossza $x$. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül jól dolgozik.* |
| $x = \frac{124}{\sin 6{,}5°} \approx$ | 1 pont | |
| ≈ 1095 méter hosszú az út. | 1 pont | *Ez a pont jár, ha a vizsgázó a sin 6,5°-nak más, legalább két tizedesjegyre helyesen kerekített értékével jól számol.* |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 6. | | |
|---|---|---|
| A metszéspont $M(2; 0)$. | 2 pont | *Koordinátánként 1-1 pont jár.* |
| Az egyenes meredeksége –2. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **7.** | | |
|---|---|---|
| $x^2+10x+21=(x+5)^2-4$ | 2 pont | |
| A minimumhely – 5. | 1 pont | |
| A minimum értéke – 4. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

*Megjegyzések:*
*1. Ha a vizsgázó meghatározza a függvény zérushelyeit (–7 és –3) és ezek segítségével helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.*
*2. Ha a vizsgázó a függvényt jól ábrázolja és az ábra alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.*

| **8.** | | |
|---|---|---|
| A) hamis<br>B) hamis<br>C) igaz | 2 pont | *2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **9.** | | |
|---|---|---|
| $k=8$ | 2 pont | *Nem bontható.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **10.** | | |
|---|---|---|
| *B* és *D* az első két helyen 2-féleképpen végezhet. | 1 pont | |
| Mögöttük *A*, *E* és *F* sorrendje 3! = 6-féle lehet. | 1 pont | |
| Így összesen $2\cdot 6=12$ -féleképpen érhetnek célba a versenyzők. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **11.** | | |
|---|---|---|
| A módusz 5, | 1 pont | |
| a medián 4. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **12.** | | |
|---|---|---|
| A kérdezett valószínűség $\frac{3}{8}(=0{,}375)$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

# II. A

| 13. a) | | |
|---|---|---|
| A sorozat differenciáját $d$-vel jelölve: $45{,}5 = \frac{2 \cdot 2 + (7-1)d}{2} \cdot 7$. | 1 pont | $a_4 = \frac{45{,}5}{7} = 6{,}5$ |
| $13 = 4 + 6d$ | 1 pont | $3d = 4{,}5$ |
| $d = 1{,}5$ | 1 pont | |
| $a_6 = 2 + 5 \cdot 1{,}5$ | 1 pont | |
| A sorozat 6. tagja 9,5. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| 13. b) | | |
|---|---|---|
| A sorozat hányadosát $q$-val jelölve: $5q + 5q^2 = 10$. | 1 pont | |
| $q_1 = -2$; $q_2 = 1$ | 2 pont | |
| Ha a hányados –2, akkor a sorozat első hét tagjának összege: $S_7 = 5 \cdot \frac{(-2)^7 - 1}{-2-1} =$ | 1 pont | |
| = 215. | 1 pont | |
| Ha a hányados 1, akkor a sorozat tagjai megegyeznek, | 1 pont | |
| így ebben az esetben az első hét tag összege $(7 \cdot 5 =) 35$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| 14. a) | | |
|---|---|---|
| A kérdéses súlyvonalra a *P* csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.* |
| A *QR* szakasz felezőpontja *F*(4; –0,5). | 1 pont | |
| A súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{PF}$ (10; 0,5). | 1 pont | |
| A súlyvonal egyenlete: $x - 20y = 14$. | 2 pont | *Bármely ezzel ekvivalens egyenlet is elfogadható.* |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

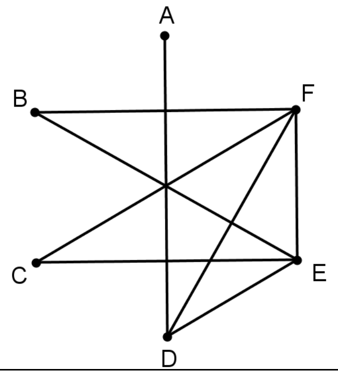
| **14. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| (A kérdéses szöget a háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni.) Az oldalvektorok $\overrightarrow{PQ}$(12; –5) és $\overrightarrow{PR}$(8; 6). | 2 pont | |
| A két vektor skalárszorzata a koordinátákból: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = 12\cdot 8 + (-5)\cdot 6 (= 66)$. | 1 pont | |
| Az oldalvektorok hossza $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$ = 13 és $\lvert\overrightarrow{PR}\rvert$ = 10. | 1 pont | |
| A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} =\right) 66 = 13\cdot 10\cdot\cos\alpha$, ahol $\alpha$ a két vektor által bezárt szöget jelöli. | 1 pont | |
| Innen $\cos\alpha \approx 0{,}5077$. | 1 pont | |
| $\alpha \approx 59{,}5°$ (mivel $0° < \alpha < 180°$). | 1 pont | *Más, ésszerű és helyes kerekítéssel kapott eredmény is elfogadható.* |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **14. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A *PQR* háromszög oldalainak hosszát a két pont távolságának kiszámításához használt képlettel határozzuk meg. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.* |
| *PQ* = 13, *PR* = 10, *QR* = $\sqrt{137}$ (≈ 11,7) | 2 pont | *Két oldal helyes kiszámolásáért 1 pont, más esetben 0 pont jár.* |
| Írjuk fel a *PQR* háromszög *QR* oldalára a koszinusztételt: $\left(\sqrt{137}\right)^2 = 10^2 + 13^2 - 2\cdot 10\cdot 13\cdot\cos\alpha$, (ahol $\alpha$ a háromszög *P* csúcsánál lévő belső szöget jelöli.) | 1 pont | |
| Innen $\cos\alpha \approx 0{,}5077$. | 2 pont | |
| $\alpha \approx 59{,}5°$ (mivel $0° < \alpha < 180°$). | 1 pont | *Más, ésszerű és helyes kerekítéssel kapott eredmény is elfogadható.* |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| 15. a) | | |
|---|---|---|
| A járulékokra levont összeg $200\,000 \cdot 0{,}17 = 34\,000$ (Ft). | 1 pont | |
| A személyi jövedelemadóra levont összeg $200\,000 \cdot 1{,}27 \cdot 0{,}17 = 43\,180$ (Ft). | 1 pont | |
| Kovács úr nettó bére: 200 000 – 34 000 – 43 180 + 15 100 = | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.* |
| = 137 920 Ft. | 1 pont | |
| Ez a bruttó bérének megközelítőleg a 69%-a. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| 15. b) | | |
|---|---|---|
| Ha Szabó úr bruttó bére az adott hónapban $x$ Ft volt, akkor járulékokra $0{,}17x$ Ft-ot, | 1 pont | *Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.* |
| személyi jövedelemadóra pedig $0{,}17 \cdot 1{,}27x$ Ft-ot vontak le. | 1 pont | |
| $x - 0{,}17x - 0{,}17 \cdot 1{,}27x + 5980 = 173\,015$ | 2 pont | |
| $0{,}6141x = 167\,035$ | 1 pont | |
| Ebből $x \approx 272\,000$. | 1 pont | |
| Szabó úr bruttó bére 272 000 Ft volt. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

## II. B

| 16. a) | | |
|---|---|---|
| Az egyik lehetséges megoldás (a résztvevőket nevük kezdőbetűjével jelölve):   | 4 pont | *Három csúcs helyes fokszáma 1 pontot, négy csúcsé 2 pontot, öt csúcsé 3 pontot ér.* |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **16. b)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha Andi egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta volna, | 2 pont | *Ez a 3 pont jár, ha a vizsgázó egy gráfon egyértelműen jelöli az AB élt és az F-ből (vagy E-ből) induló négy élt.* |
| akkor például Feri eddigi mérkőzéseit Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszotta volna. | 1 pont | |
| Ekkor azonban Enikőnek már nem lehet meg a négy mérkőzése, hiszen legfeljebb Csabával, Danival és Ferivel játszhatott volna. | 2 pont | *Az „ellentmondásra jutás” bármilyen helyes indoklásáért jár ez a 2 pont.* |
| Tehát igazoltuk, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését nem játszhatta Barnabással. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **16. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Feri a négy meccse között vagy játszott Andival, vagy nem. | 1 pont | |
| Ha játszott vele, akkor Andi az egyetlen meccsét nem játszhatta Barnabással. | 1 pont | |
| Ha nem játszott vele, akkor Feri Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszott. | 1 pont | |
| Ez utóbbi esetben Enikőre is igaz, hogy vagy játszott Andival vagy nem. Ha játszott vele, akkor Andi az egyetlen meccsét nem játszhatta Barnabással, | 1 pont | |
| ha nem, akkor Enikő a maradék három meccsét Barnabással, Csabával és Danival játszotta le. | 1 pont | |
| Ekkor viszont már Barnabás a két meccsét Enikővel és Ferivel játszotta, tehát nem játszhatta Andival (aki csak Danival játszhatott). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **16. c)** | | |
|---|---|---|
| A játékosok kiválasztása helyett a lejátszott – illetve nem lejátszott – mérkőzéseiket vizsgáljuk. | 2 pont | *Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.* |
| Összesen $\left(\frac{6\cdot 5}{2}=\right)15$ mérkőzés szükséges (összes eset száma). | 2 pont | |
| Eddig 8 mérkőzés zajlott le, | 1 pont | |
| tehát 7 mérkőzést kell még lejátszani (kedvező esetek száma). | 1 pont | |
| A keresett valószínűség $\frac{7}{15}$ $(\approx 0{,}47)$. | 1 pont | *Százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.* |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **17. a)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha $x < 3$, akkor ($3 - x > 0$, ezért) | 1 pont | |
| $x + 2 \geq 0$, vagyis $x \geq -2$. | 1 pont | |
| A 3-nál kisebb számok halmazán tehát a $[-2;3[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek. | 1 pont | *A* $-2 \leq x < 3$ *jelölés is elfogadható.* |
| Ha $x > 3$, akkor ($3 - x < 0$, ezért) | 1 pont | |
| $x + 2 \leq 0$, vagyis $x \leq -2$. | 1 pont | |
| A 3-nál nagyobb számok halmazában nincs ilyen elem, tehát a 3-nál nagyobb számok között nincs megoldása az egyenlőtlenségnek. | 1 pont | |
| A megoldáshalmaz: $[-2;3[$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **17. a)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A vizsgázó megrajzolja (vázolja) az $x \mapsto x + 2$ és az $x \mapsto 3 - x$ elsőfokú függvények grafikonját, vagy a számláló és a nevező előjelét külön-külön helyesen állapítja meg számegyenes segítségével vagy szövegesen indokolva. | 2-2 pont | *Ha a függvények monotonitása és zérushelye is jól jelenik meg az ábrán, akkor jár ez a 2-2 pont* |
| Megállapítja, hogy a $]-\infty;-2[$ intervallum elemei nem megoldások. | 1 pont | *Szöveges vagy a számegyenes segítségével, ábrával alátámasztott indoklás egyaránt elfogadható.* |
| Megállapítja, hogy a $[-2;3[$ intervallum elemei mind megoldások. | 1 pont | |
| Megállapítja, hogy a $[3;+\infty[$ intervallum elemei nem megoldások. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a 3-at elfogadja megoldásként, akkor ezért 2 pontot veszítsen. Ha a vizsgázó a (–2)-t nem adja meg megoldásként (nem vizsgálja az egyenlőséget), akkor ezért 1 pontot veszítsen.*

| **17. b)** | | |
|---|---|---|
| $5 \cdot 3^x = 20$ | 1 pont | |
| $3^x = 4$ | 1 pont | |
| $x = \log_3 4$ | 1 pont | $x \lg 3 = \lg 4$ |
| $x \approx 1{,}2619$ | 1 pont | *Csak a megadott alakért jár ez a pont.* |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **17. c)** | | |
|---|---|---|
| (A megadott egyenlet cos $x$-ben másodfokú,) így a megoldóképlet felhasználásával | 1 pont | |
| $\cos x = 0{,}5$ | 1 pont | |
| vagy $\cos x = -2$. | 1 pont | |
| Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1;\ 1]$ intervallum). | 1 pont | |
| A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$. | 2 pont | *Ha a vizsgázó a megadott alaphalmazt nem veszi figyelembe vagy fokban (jól) adja meg a válaszát (–60º; 60º), akkor 1 pontot kapjon.* |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **18. a)** | | |
|---|---|---|
| Az oldallap-háromszögekben a 2 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) $\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$ ($\approx 2{,}83$) (cm). | 1 pont | . |
| Egy oldallap területe $\frac{2\cdot\sqrt{8}}{2}$ ($\approx 2{,}83$) (cm$^2$). | 1 pont | |
| A test felszíne: $A \approx 22{,}6$ cm$^2$. | 1 pont | |
| A testet alkotó gúlák magassága megegyezik annak az egyenlő szárú háromszögnek a magasságával, amelynek szára a gúlák oldalélével, alapja a gúla alapjának átlójával egyezik meg. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból (például megfelelő ábrából) kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.* |
| A gúla $m$ magasságára (a Pitagorasz-tételt alkalmazva): $m^2=3^2-\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2$. | 1 pont | |
| $m=\sqrt{7}$ ($\approx 2{,}65$) (cm) | 1 pont | |
| A gúla térfogata: $V=\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{7}$ ($\approx 3{,}53$) (cm$^3$). | 1 pont | |
| A test térfogata ennek kétszerese, | 1 pont | |
| azaz megközelítőleg 7,1 cm$^3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a feladat megoldása során rosszul kerekít, vagy válaszában nem kerekít, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*
*Ha a vizsgázó valamelyik válaszát mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

| **18. b)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az összes (egyenlően valószínű) eset száma $8^4 (= 4096)$. | 1 pont | |
| 5-nél többet dobni háromféleképpen lehet (6, 7, 8). | 1 pont | |
| Az olyan esetek száma, amelyben mind a négy dobás 5-nél nagyobb $3^4 (= 81)$. | 1 pont | |
| Pontosan három 5-nél nagyobb dobás úgy lehetséges, hogy a négy dobás közül az egyik nem ilyen. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.* |
| Az ilyen esetek száma $4 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) (= 540)$. | 2 pont | *Ha a vizsgázó egyetlen hibája, hogy nem szoroz 4-gyel, akkor 1 pontot kapjon.* |
| A kedvező esetek száma 81 + 540 = 621. | 1 pont | |
| A kérdezett valószínűség $\frac{621}{4096}$ ($\approx 0{,}152$) | 1 pont | *Százalékban megadott helyes válaszért is jár ez a pont.* |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

| **18. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| $P(\text{egy adott dobás 5-nél nagyobb}) = \frac{3}{8}$ | 2 pont | |
| $P$(mind a négy dobás nagyobb 5-nél) = $= \left(\frac{3}{8}\right)^4$ ($\approx 0{,}0198$) | 1 pont | |
| $P$(három dobás nagyobb 5-nél, egy nem) = $= \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{5}{8}$ ($\approx 0{,}1318$) | 2 pont | *Ha a vizsgázó egyetlen hibája, hogy nem szoroz 4-gyel, akkor 1 pontot kapjon.* |
| A kérdéses valószínűség ezek összege, azaz | 1 pont | |
| $\approx 0{,}152$. | 2 pont | *Százalékban megadott helyes válaszért is jár ez a pont.* |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a binomiális eloszlás képletét használva helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.*