ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. október 15.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

18. b) **második megoldás**		
Rendezzük a köveket úgy, hogy mindegyiknek a bal oldali részén legyen legalább annyi pötty, mint a jobb oldalin.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Összesen 7 olyan kő van, amelynek a bal oldali részén 6 pötty van. (Ezek a 6-0, a 6-1, a 6-2, a 6-3, a 6-4, a 6-5 és a 6-6 kövek).	1 pont	
További 6 olyan kő van, amelynek bal oldalán 5 pötty van,	1 pont	
és így tovább, egészen addig az egyetlen kőig, amelynek mindkét része üres (0-0-s kő).	1 pont	
Így összesen 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =	1 pont	
= 28 kő van a teljes készletben.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes eset felsorolásával jól adja meg a választ, akkor jár a 6 pont.

18. c)		
Aki pontosan a harmadik dobására kezdi el a játékot, az az első két dobásánál öt-ötfélét dobhatott,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
a harmadikra viszont csak egyfélét (hatost).	1 pont	
Így a kedvező esetek száma $5\cdot 5\cdot 1$.	1 pont	
Az összes eset száma: 6^3.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{25}{216}$ ($\approx 0{,}1157$).	2 pont	*Százalékban megadott helyes válaszért is jár ez a 2 pont.*
Összesen:	**6 pont**	

18. a) **első megoldás**		
Két lapot kiválasztunk a 30-ból, ezt $\binom{30}{2}=\frac{30\cdot 29}{2}$ (= 435)-féleképpen lehet megtenni (összes eset száma).	2 pont	
A kedvező esetek száma (amikor a két lapon szereplő számok megegyeznek) 15.	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{15}{435}\left(=\frac{1}{29}\approx 0{,}0345\right)$.	1 pont	*Százalékban megadott helyes válaszért is jár ez a pont.*
Összesen:	**5 pont**	

18. a) **második megoldás**		
Az elsőre kiválasztott lap tetszőleges lehet.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
A második lap esetében 29-ből (összes eset száma) kell kiválasztanunk	1 pont	
az elsőnek választott lap egyetlen párját.	1 pont	
Ennek valószínűsége $\frac{1}{29}$ (≈ 0,0345).	1 pont	*Százalékban megadott helyes válaszért is jár ez a pont.*
Összesen:	**5 pont**	

18. b) **első megoldás**		
Összesen 7 olyan kő van, amelyen a két részben azonos a pöttyök száma.	2 pont	
A kő két részén (a két részt megkülönböztetve) különböző számú pöttyöt $7\cdot 6=42$-féleképpen lehetne elhelyezni,	2 pont	
de így minden ilyen követ kétszer számolnánk, ezért ezek száma 21.	1 pont	
Összesen 28 kő van a teljes készletben.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

I.

1.		
$A\setminus B=\{-4;-3;-2;-1;0\}$	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, egynél több hiba esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$x_1=-2$, $x_2=10$	1-1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
$x_1=\frac{\pi}{3}$, $x_2=-\frac{\pi}{3}$	1-1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó válasza −60° és 60°, akkor 1 pontot kapjon. Ha a vizsgázó valós számként adja meg a válaszát, de nem veszi figyelembe a megadott intervallumot, akkor legfeljebb 1 pontot kapjon.

4.		
A) hamis B) igaz C) hamis	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

5. **első megoldás**		
A szavazókorú népesség számát jelölje *x*, ekkor a feladat szövege alapján $x\cdot 0{,}635\cdot 0{,}436=4\,152\,900$.	2 pont	
A szavazókorú népesség: $x=15\,000\,000$ fő.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. **második megoldás**		
A választáson $\frac{4\,152\,900}{0{,}436}=$	1 pont	
= 9 525 000 fő vett részt.	1 pont	
A szavazókorú népesség: $\frac{9\,525\,000}{0{,}635}=15\,000\,000$ fő.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
$b=140$	1 pont	
$m=-20$	2 pont	*m = 20 esetén 1 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

7.		
B) és D)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: 1 jó válasz, illetve 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.

8.		
A számtani sorozat különbségét d-vel jelölve $3d=-15$,	1 pont	*Ez a pont jár az* $\left.\begin{matrix} a_1+5d=15 \\ a_1+8d=0 \end{matrix}\right\}$ *egyenletrendszer felírásáért is.*
amiből $d=-5$.	1 pont	
A sorozat első tagja 40.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat első kilenc tagjának felsorolásával adja meg válaszát, akkor is 3 pontot kapjon.

9.		
A feltételeknek megfelelő gráf.	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: A gráf tartalmazhat többszörös éleket és/vagy hurokéleket is.

10.		
Az f értékkészlete [0,5; 4].	1 pont	
$a=0{,}5$	2 pont	*Egy jó egyenlet felírásáért (pl. $a^1 = 0{,}5$) 1 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

11.		
A szabályos dobókockán szereplő számok mindegyike osztója a 60-nak,	2 pont	
így a kérdezett esemény (a biztos esemény, melynek) valószínűsége 1.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
A jonatán alma mennyisége 36 (kg).	1 pont	
Az idared almák arányát jelölő körcikk középponti szöge 150 (fok),	1 pont	
így az idared alma mennyisége 60 (kg).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b)		
$1^2+(-3)^2-6\cdot 1-2\cdot(-3)=10$, (tehát az A pont illeszkedik a k körre.)	1 pont	
$7^2+(-1)^2-6\cdot 7-2\cdot(-1)=10$, (tehát a B pont is illeszkedik a k körre.)	1 pont	
Az AB húr hossza $\sqrt{(7-1)^2+(-1+3)^2}=$	1 pont	
$=\sqrt{40}\,(\approx 6{,}32)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. c) **első megoldás**		
Az f egyenes egy normálvektora: $\overrightarrow{AB}(6;2)$	1 pont	
Az f egyenes egyenlete $3x+y=0$.	2 pont	
A metszéspont koordinátáit a k kör és az f egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával kapjuk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Az f egyenes egyenletéből $y=-3x$.	1 pont	
Ezt a kör egyenletébe helyettesítve: $x^2+9x^2-6x-2\cdot(-3x)=10$.	1 pont	
$x^2=1$	1 pont	
Ennek (az 1-től különböző) megoldása $x=-1$.	1 pont	
Így a keresett pont a $C(-1; 3)$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

17. c) **második megoldás**		
Az A-tól különböző metszéspontot C-vel jelölve, a Thalész-tétel megfordításának felhasználásával tudjuk, hogy a BC húr a k kör átmérője.	3 pont	
A k kör egyenletét átalakítva: $(x-3)^2+(y-1)^2=20$.	2 pont	
Így a kör középpontja a $K(3; 1)$ pont.	1 pont	
A K pont felezi az BC szakaszt, így a $C(x_C; y_C)$ pont koordinátáira: $\frac{x_C+7}{2}=3$ és $\frac{y_C-1}{2}=1$,	2 pont	
amiből $C(-1; 3)$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a kör egyenletét átalakítva a kör középpontjának koordinátáit jól megállapítja és koordinátarendszerben a körvonalat ábrázolja, akkor ezért 3 pontot kapjon. Ha az ábrába berajzolja a kérdéses f egyenest, és indoklás és ellenőrzés nélkül megállapítja a C metszéspont koordinátáit, akkor ezekért további 2 pontot kapjon.
A vizsgázó még 2 pontot kapjon, ha indokolja, hogy az általa rajzolt egyenes miért merőleges az AB szakaszra, és további 2 pontot akkor, ha a kapott C pont koordinátáit a kör egyenletébe helyettesítve ellenőrzi, hogy az valóban illeszkedik a körvonalra.

II. B

16. a)		
A henger alapkörének sugara $2{,}5\cdot10^{-7}$ (m),	1 pont	
térfogata $V=\left(2{,}5\cdot10^{-7}\right)^2\cdot\pi\cdot2\cdot10^{-6}$,	1 pont	
normálalakban $V\approx3{,}9\cdot10^{-19}\,(\mathrm{m}^3)$.	1 pont	
A henger felszíne $A=2\cdot\left(2{,}5\cdot10^{-7}\right)^2\cdot\pi+5\cdot10^{-7}\cdot\pi\cdot2\cdot10^{-6}$,	1 pont	
normálalakban $A\approx3{,}5\cdot10^{-12}\,(\mathrm{m}^2)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. b)		
A kólibaktériumok száma 1,5 óra alatt 6-szor duplázódott,	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
ezért 1,5 óra után $3\,000\,000\cdot2^6=$	1 pont	
= 192 millió lesz a baktériumok száma.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. c)		
(A baktériumok száma x perc múlva lesz 600 millió.) Meg kell oldanunk a $3\cdot2^{\frac{x}{15}}=600$ egyenletet.	2 pont	
$2^{\frac{x}{15}}=200$	1 pont	
$\frac{x}{15}=\log_2 200$	2 pont	$\frac{x}{15}\cdot\lg2=\lg200$
$x=15\cdot\frac{\lg200}{\lg2}$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
amiből $x\approx115$ adódik, tehát	1 pont	
115 perc múlva lesz a baktériumok száma 600 millió.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

17. a)		
$\overrightarrow{AB}(6;2)$	1 pont	
Az e egyenes egy normálvektora: $\mathbf{n}(1;-3)$,	1 pont	
egyenlete: $x-3y=7-3\cdot(-1)$,	1 pont	
$x-3y=10$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. A

13. a)		
$(4x+21\ge0$ és $x+4\ge0)$ Négyzetre emelve mindkét oldalt: $x^2+8x+16=4x+21$.	2 pont	
Rendezve: $x^2+4x-5=0$.	1 pont	
$x_1=-5$, $x_2=1$	1 pont	
A –5 nem megfelelő gyök,	1 pont	*Kikötés vagy ellenőrzés*
az 1 megfelelő gyök.	1 pont	*alapján.*
Összesen:	**6 pont**	

13. b) első megoldás		
(Behelyettesítő módszerrel:) $y=16-3x$	1 pont	
$5x-32+6x=45$	1 pont	
$11x=77$	1 pont	
$x=7$	1 pont	
$y=-5$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. b) második megoldás		
(Az egyenlő együtthatók módszerével, az első egyenlet mindkét oldalát 2-vel szorozva:) $\left.\begin{array}{l}6x+2y=32\\5x-2y=45\end{array}\right\}$	2 pont	
$11x=77$	1 pont	
$x=7$	1 pont	
$y=-5$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. a) első megoldás		
Az ADC háromszög C csúcsához tartozó magasság hossza: $41\cdot\sin47°\approx$	1 pont	
≈30 (mm).	1 pont	
Ez ugyanakkora, mint az ABC háromszög C csúcsához tartozó magassága,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
így a kérdezett terület $T\approx\frac{48\cdot30}{2}=$	1 pont	
$=720$ mm^2.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. a) második megoldás		
Az ADC háromszög területe: $\frac{24\cdot 41\cdot \sin 47°}{2}\approx$	1 pont	
$\approx 360\ (\text{mm}^2)$.	1 pont	
A CD súlyvonal felezi az ABC háromszög területét,	2 pont	*Ez a 2 pont jár a BCD háromszög területének kiszámításáért is, illetve akkor is, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így a kérdezett terület 720 mm^2.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b)		
A CDB szög 133°.	1 pont	
$BC=\sqrt{24^2+41^2-2\cdot 24\cdot 41\cdot \cos 133°}$	2 pont	*Annak felismerése, hogy a BC oldal koszinusztétellel kiszámítható: 1 pont.*
Így a BC oldal hossza a kért kerekítéssel valóban 60 mm.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. c) első megoldás		
Az ABC szög legyen β, ekkor a szinusztételt felírva a BCD háromszögben: $\frac{\sin\beta}{\sin 133°}=\frac{41}{60}$.	1 pont	
$\sin\beta\approx 0{,}4998$,	1 pont	
amiből (mivel a BCD háromszög D csúcsánál lévő belső szöge tompaszög) $\beta\approx 30°$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. c) második megoldás		
Az ABC szög legyen β, ekkor a koszinusztételt felírva a BCD háromszögben: $41^2=24^2+60^2-2\cdot 24\cdot 60\cdot\cos\beta$	1 pont	
$\cos\beta=\frac{24^2+60^2-41^2}{2\cdot 24\cdot 60}$ $(\approx 0{,}8663)$,	1 pont	
amiből $\beta\approx 30°$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. a) első megoldás		
A mosogatógéppel rendelkezők számát jelölje x, a mikrohullámú sütővel rendelkezők száma ekkor $2x$.	1 pont	
Valamelyik géppel 141-en rendelkeznek: $2x+x-63=141$,	2 pont	
amiből $x=68$.	1 pont	
Nincs mikrohullámú sütője $(150-2\cdot 68=)$ 14 megkérdezettnek,	1 pont	
ők az összes megkérdezett kb. 9,3%-át jelentik.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

15. a) második megoldás		
Azok számát, akik mosogatógéppel rendelkeznek, de mikrohullámú sütővel nem, jelölje y. Ekkor összesen $y+63$ azok száma, akik mosogatógéppel rendelkeznek.	1 pont	
A mikrohullámú sütővel rendelkező, de mosogatógéppel nem rendelkezők száma: $2(y+63)-63=2y+63$.	1 pont	
Az összes megkérdezett száma: $y+(2y+63)+63+9=150$,	1 pont	
amiből $y=5$.	1 pont	
Nincs mikrohullámú sütője $(5+9=)$ 14 megkérdezettnek,	1 pont	
ők az összes megkérdezett kb. 9,3%-át jelentik.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

15. b)		
Az egy háztartásban található számítógépek számának átlaga $\frac{3\cdot 0+94\cdot 1+89\cdot 2+14\cdot 3}{200}=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$=1{,}57$.	1 pont	*1,6 is elfogadható.*
A medián 2,	1 pont	
a módusz 1.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. c)		
Az állítás tagadásai: C és D.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: 1 jó válasz, illetve 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.