ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2014. május 6.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon!
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek az értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

18. d) **első megoldás**		
Az összes lehetséges csata száma ezekkel a lapokkal $3!\cdot 3! =$	1 pont	*Ez a 2 pont jár az összes lehetséges eset felsorolásáért is.*
$= 36$.	1 pont	
András akkor nyer pontosan kettőt, ha (valamilyen sorrendben) a 3-1, 6-5, 4-6 csaták,	1 pont	*Ez a 3 pont jár az összes kedvező eset felsorolásáért is.*
vagy a 4-1, 6-5, 3-6 csaták zajlanak le.	1 pont	
Ezek $2\cdot 3! = 12$-féleképpen valósulhatnak meg (kedvező esetek száma).	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

18. d) **második megoldás**		
Feltehetjük, hogy András a 3, 4, 6 sorrendben játssza ki a lapjait.	1 pont	
Ekkor Péter $3! = 6$-féleképpen teheti le a számkártyáit (összes eset):	1 pont	
1, 5, 6 1, 6, 5 5, 1, 6 5, 6, 1 6, 1, 5 6, 5, 1	1 pont	
András az 1, 6, 5 és a 6, 1, 5 esetben nyer kétszer.	1 pont	
A kedvező esetek száma 2.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

18. a)

Péter megnyert három csatát (kettőt elvesztett), egy csata pedig döntetlenre végződött,	1 pont	
így Péter előtt összesen hét kártya van az első mérkőzés után.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

18. b)

Péter úgy vihetett el két lapot, ha egy csatát nyert és ötöt elveszített, vagy két csatában döntetlent ért el, és négyet elveszített.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
András lapjainak (egyetlen lehetséges) sorrendje: 2, 3, 4, 5, 6, 1.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. c)

Péter az első két lapot $6 \cdot 5 = 30$-féleképpen tudja letenni (összes eset száma).	1 pont	
Ezek közül a következő esetekben viszi el András első két lapját: (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 5), (4; 6), (5; 4), (5; 6), (6; 4), (6; 5).	3 pont*	
A kedvező esetek száma 9.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{9}{30} = 0{,}3$.	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a kedvező esetek felsorolásánál egy hibát követ el, akkor a csillaggal jelölt 3 pontból 2 pontot, ha két hibát követ el, akkor 1 pontot kapjon. Három vagy annál több hiba elkövetése esetén nem jár pont. Hibának számít valamelyik megfelelő eset kihagyása, kétszeri felsorolása, vagy nem megfelelő eset megadása.

I.

1.

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$	1 pont	
$B = \{3; 6; 9\}$	1 pont	
$A \cap B = \{3; 6\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2.

660 (gramm)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: A konzervdoboz tömegének megállapításáért (90 gramm) 1 pont jár.

3.

$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$	1 pont	
(Az egyenlet rendezve:) $x^2 - 4x - 5 = 0$.	1 pont	
$x_1 = 5$, $x_2 = -1$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4.

D	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egynél több választ ad meg, akkor 0 pontot kap.

5.

12	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.

Egy 20%-os áremelés 1,2-szeresére,	1 pont	
a kétszeri áremelés $1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44$-szeresére változtatja az eredeti árat.	1 pont	
Ez 44%-os áremelésnek felel meg.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

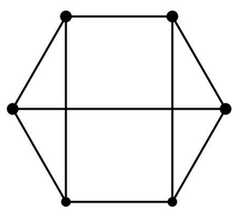
7.		
Egy szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$2 + 5 + 8 + 2 = 17$	1 pont	
Így X lehetséges értékei: 1; 4; 7.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó mind a tíz lehetséges számjegy kipróbálásával adja meg válaszát, akkor a teljes pontszám jár.

8.		
C	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egynél több választ ad meg, akkor 0 pontot kap.

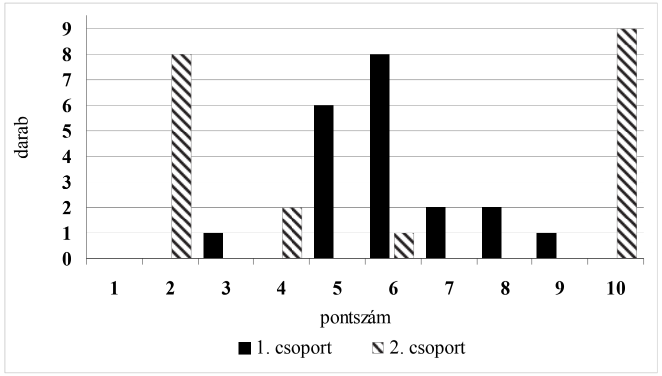
9.		
$x = 31$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
Egy megfelelő gráf, például: 	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

11.		
A téglalap körülírt körének átmérője a téglalap átlója.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A téglalap átlójának hossza $\sqrt{4{,}2^2 + 5{,}6^2}\,(= 7)$ (cm).	1 pont	
A kör sugara 3,5 (cm).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
$\frac{9}{12} = 0{,}75$	2 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

17. a)		
Az 1. csoporthoz tartozó diagram helyes.	1 pont	
A 2. csoporthoz tartozó diagram helyes.	1 pont	
A vizsgázó a két csoport adatait megfelelően megkülönböztette egymástól.	1 pont	
Az első csoporthoz tartozó diagramon a nagy magasságú oszlopok (az átlaghoz közel) középen vannak, a másodikon pedig a két szélen;	1 pont	*Megfigyelés megfogalmazása.*
ez azt jelenti, hogy a második esetben nagyobb lehet a szórás.	1 pont	*Következtetés a megfigyelés alapján.*
Összesen:	**5 pont**	



17. b)		
Az 1. csoport pontszámainak átlaga 6,	1 pont	*Ezek a pontok járnak a szórás értékének számológéppel történő helyes kiszámolásáért is.*
szórása $\sqrt{1{,}7} \approx 1{,}30$.	1 pont	
A 2. csoport pontszámainak átlaga 6,	1 pont	
szórása $\sqrt{14} \approx 3{,}74$.	1 pont	
A 2. csoport pontszámainak szórása nagyobb.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. c)		
Az olcsóbb fajtából x kg-ot, a másikból $(14 - x)$ kg-ot veszünk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A feladat szövege alapján felírható egyenlet:) $x \cdot 4500 + (14 - x) \cdot 5000 = 14 \cdot 4600$	2 pont	
$4500x - 5000x + 70\,000 = 64\,400$	1 pont	
$x = 11{,}2$	1 pont	
Az olcsóbb fajtából 11,2 kg, a drágább fajtából 2,8 kg szükséges a keverékhez.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II. B

16. a)		
Ha naponta x-szeresére nőtt az algás terület, akkor $1{,}5 \cdot x^7 = 27$.	1 pont	
$x = \sqrt[7]{18} \approx$	1 pont	
$\approx 1{,}5$	1 pont	
Az algás terület naponta körülbelül az 1,5-szeresére növekedett.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. b)		
A medence alaplapja egy 2,4 m oldalhosszúságú szabályos hatszög, ennek területe $T_{alaplap} = 6 \cdot \frac{2{,}4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$	2 pont	
$\approx 14{,}96$ (m^2).	1 pont	
A medence oldalfalainak összterülete $T_{oldalfal} = 6 \cdot 2{,}4 \cdot 0{,}4 = 5{,}76$ (m^2).	1 pont	
Így összesen körülbelül 20,7 m^2 felületet burkoltak csempével.	1 pont	*Más helyesen kerekített jó válasz is elfogadható.*
A medence térfogata $V = T_{alaplap} \cdot m = 6 \cdot \frac{2{,}4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 0{,}4 \approx$	1 pont	
$\approx 5{,}986$ (m^3).	1 pont	
Körülbelül 5986 liter víz fér el a medencében.	1 pont	*Más helyesen kerekített jó válasz is elfogadható (pl. 6000 l vagy 5990 l).*
Összesen:	**8 pont**	

16. c)		
Ha például a kék és a sárga színt választották ki, akkor $\binom{6}{3}$ (= 20) különböző módon választható ki az a három vízsugár, amelyet a kék színnel világítanak meg (a másik három fénysugarat ugyanekkor sárga színnel világítják meg).	2 pont	
A megvilágításhoz két színt háromféleképpen választhatnak ki (kék-sárga, kék-piros, piros-sárga).	1 pont	
$3 \cdot \binom{6}{3} =$	1 pont	
= 60 különböző megvilágítás lehetséges.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

II.A

13. a)		
$5 - 2 \cdot 2 = 1$ (igaz)	1 pont	
$(-3) - 2 \cdot (-2) = 1$ (igaz)	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. b)		
A kör középpontja az AB szakasz C felezőpontja,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ennek koordinátái (1; 0).	1 pont	
A kör sugara az AC szakasz,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ennek hossza $\sqrt{20}$.	1 pont	*Legalább egy tizedesjegyre helyesen kerekített érték elfogadható.*
A kör egyenlete: $(x-1)^2 + y^2 = 20$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. c)		
Az f merőleges az AB szakaszra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az f egy normálvektora a $\overrightarrow{BA}$ vektor,	1 pont	*Az f egyenes (2; 1) normálvektora az e egyenes egyenletéből is kiolvasható.*
ennek koordinátái (8; 4).	1 pont	
Az f egyenlete: $8x + 4y = 8 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2)$,	1 pont	
azaz $8x + 4y = -32$.	1 pont	$2x + y = -8$
Összesen:	**5 pont**	

14. a)		
(A kérdezett szöget α-val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos\alpha$.	1 pont	
Ebből $\cos\alpha = \frac{1}{2}$,	1 pont	
azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = 60°$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. b)		
Ha $\cos x = \frac{1}{2}$,	1 pont	
akkor (a megadott intervallumon) $x = \frac{\pi}{3}$,	1 pont	
vagy $x = \frac{5\pi}{3}$.	1 pont	
Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$,	1 pont	
akkor (a megadott intervallumon) $x = \frac{2\pi}{3}$,	1 pont	
vagy $x = \frac{4\pi}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megoldását fokban (helyesen) adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen. Ha a vizsgázó periódussal együtt vagy a [–π; π] intervallumon adja meg az egyenlet megoldásait, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

14. c)		
I) igaz II) hamis III) hamis	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

15. a)		
(A szöveg alapján felírható egyenlet:) $440 = \frac{2\cdot 5 + (n-1)\cdot 3}{2}\cdot n$.	1 pont	
Ebből $3n^2 + 7n - 880 = 0$.	2 pont	
A negatív gyök $\left(-\frac{55}{3}\right)$ a feladatnak nem megoldása.	1 pont	
$n = 16$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat tagjait egyenként kiszámolva vizsgálja a kívánt összeg elérését, és jó eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár.

15. b)		
(Keressük a következő egyenlet megoldását:) $500 = 5\cdot\frac{1{,}2^n - 1}{1{,}2 - 1}$.	1 pont	
$21 = 1{,}2^n$	2 pont	
(Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve) $\lg 21 = \lg 1{,}2^n$	1 pont	$\log_{1,2} 21 = n$
$\lg 21 = n\cdot\lg 1{,}2$	1 pont	
$n \approx 16{,}7$	1 pont	
Ez azt jelenti, hogy a sorozatnak legalább 17 tagját kell összeadni, hogy az összeg elérje az 500-at.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések: Ha a vizsgázó a sorozat tagjait egyenként kiszámolva vizsgálja a kívánt összeg elérését, és jó eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár. Ha a vizsgázó egyenlet helyett egyenlőtlenséggel dolgozik, akkor a megfelelő pontok járnak.