ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2014. október 14.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon!
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek az értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$8x + y =$	1 pont	
$= 5$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$	1 pont	
$(x-4)(x+4) = x^2 - 16$	1 pont	
Az összevont alak: $x - 7$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
A helyes válasz: C.	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$x_1 = 0$	1 pont	
$x_2 = 4$	1 pont	
$x_3 = -4$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5.		
a) $x < 3$	1 pont	
b) $x = 2$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
A kérdéses valószínűség: $\frac{20}{100} = 0{,}2$.	2 pont	*20% is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$x = \frac{3}{2}\pi$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: A valós számok halmazán helyesen felírt összes megoldásért vagy az $x = 270°$ *válaszért 1 pont jár.*

8.		
A függvény értékkészlete: [0; 2].	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az intervallum határait jól adja meg, de nyílt vagy félig nyílt intervallumot ad meg válaszként, akkor 1 pont jár.

9.		
A kör sugara $r = 2$,	1 pont	
egyenlete $(x+2)^2 + (y-3)^2 =$	1 pont	
$= 4$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
A kérdéses intervallum:]–1; 2[	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az intervallum határait jól adja meg, de zárt vagy félig zárt intervallumot ad meg válaszként, akkor 1 pont jár.

11. **első megoldás**		
A második egyenletből: $y = 7 - x$	1 pont	
Az első egyenletbe helyettesítve: $5x + 7 - x = 3$.	1 pont	
$x = -1$	1 pont	
$y = 8$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

11. **második megoldás**		
(Az egyenlő együtthatók módszerét használva:) az első egyenletből a másodikat kivonva kapjuk, hogy	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$4x = -4$.	1 pont	
$x = -1$	1 pont	
$y = 8$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
A: hamis B: igaz C: hamis	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

II.A

13. a)		
Az **A** sorozatot a válaszolók $\frac{90}{600}\cdot 100=$	1 pont	
= 15%-a nézte.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. b) **első megoldás**		
A kizárólag az egyik sorozatot nézők számát megkapjuk, ha az adott sorozatot nézők számából kivonjuk a mindhárom sorozatot nézők számát (55),	1 pont	*Ez a 3 pont jár a feladat megértését tükröző, a négy adatot megfelelő helyen tartalmazó Venn-diagram felrajzolásáért.*
ezért csak az **A** sorozatot 35, csak a **B** sorozatot 235, csak a **C** sorozatot 175 válaszadó nézte.	2 pont	
Így a valamelyik sorozatot nézők száma 35 + 235 + 175 + 55 = 500,	1 pont	
ezért egyik sorozatot sem nézte 600 – 500 = 100 fő.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b) **második megoldás**		
Ha összeadjuk az egyes sorozatokat nézők számát, akkor ebben háromszor számoltuk azokat, akik mindhárom sorozatot nézik.	1 pont	
Ha tehát az egyes sorozatokat nézők számának összegéből levonjuk a mindhárom sorozatot nézők számának kétszeresét, akkor megkapjuk a valamelyik sorozatot nézők számát.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Így a valamelyik sorozatot nézők száma $90+290+230-2\cdot 55=500$,	1 pont	
ezért egyik sorozatot sem nézte 600 – 500 = 100 fő.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. c)		
Az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek: (az *A*-val jelölt 55°), a *B*-vel jelölt 135°, a *C*-vel jelölt 170°.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
A kördiagramon 1°-nak $\frac{576}{360}=1{,}6$ „válaszadó” felel meg.	1 pont	$\frac{360}{576}=0{,}625$ *fok felel meg egy válaszadónak.*
Az **A** sorozatra $55\cdot 1{,}6=88$, a **B** sorozatra $135\cdot 1{,}6=216$, a **C** sorozatra $170\cdot 1{,}6=272$ jelölés érkezett.	2 pont	*1 hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**5 pont**	

14. a)		
Egy adott útszakasz megtételéhez szükséges időt megkapjuk, ha az útszakasz hosszát elosztjuk az útszakaszon mért átlagsebességgel.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Az egyes útszakaszok megtételéhez szükséges idő lakott területen belül: 1,125 (óra), országúton: 0,5 (óra), autópályán: 0,875 (óra).	2 pont	*1 hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
Így összesen 1,125 + 0,5 + 0,875 = 2,5 óráig tartott az utazás.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Helyes gondolatmenettel és jó kerekítésekkel kapott egyéb részeredmények és végeredmény is elfogadható.

14. b) **első megoldás**		
Az egyes útszakaszokon az autó fogyasztása lakott területen belül: $\frac{45}{100} \cdot 8{,}3 = 3{,}735$ (liter), országúton: $\frac{35}{100} \cdot 5{,}1 = 1{,}785$ (liter), autópályán: $\frac{105}{100} \cdot 5{,}9 = 6{,}195$ (liter).	2 pont	*1 hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
Az összes fogyasztás 185 km-en 11,715 liter.	1 pont	
100 km-en az átlagfogyasztás: $\frac{11{,}715}{185} \cdot 100$ (liter).	1 pont	
Az autó átlagfogyasztása 100 km-en kb. 6,3 liter.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b) **második megoldás**		
(Az átlagfogyasztás az egyes szakaszok fogyasztásának a megtett úttal súlyozott átlaga, azaz) $\frac{45 \cdot 8{,}3 + 35 \cdot 5{,}1 + 105 \cdot 5{,}9}{185} \approx$	3 pont	
$\approx 6{,}332$ (liter).	1 pont	
Az autó átlagfogyasztása 100 km-en kb. 6,3 liter.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. c)		
A két test hasonló, a hasonlóság aránya 1 : 2,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
így a térfogatok aránya 1 : 8.	2 pont	
A kisebb kanna térfogata $\frac{20}{8} = 2{,}5$ liter.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. a)		
$V = 30 \cdot 40 \cdot 50 = 60\ 000\ (\text{cm}^3)$	1 pont	
$V = 60\ \text{dm}^3$	1 pont	
Az akvárium térfogata 60 liter.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

.

15. b)		
Az egyes lapátlók hossza: $\sqrt{50^2+40^2} = \sqrt{4100}$ ($\approx 64{,}03$) (cm), $\sqrt{50^2+30^2} = \sqrt{3400}$ ($\approx 58{,}31$) (cm), $\sqrt{30^2+40^2} = 50$ (cm).	2 pont	*1 hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
A legkisebb szög a legrövidebb oldallal van szemben.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a másik két szöget is jól kiszámítja. ($\beta \approx 60°$, $\gamma \approx 72°$)*
(A legrövidebb oldallal szemközti szöget α-val jelölve, koszinusztétellel:) $2500 = 4100 + 3400 - 2 \cdot \sqrt{4100} \cdot \sqrt{3400} \cdot \cos\alpha$.	2 pont	
Ebből $\cos\alpha \approx 0{,}6696$.	2 pont	
A háromszög legkisebb szöge: $\alpha \approx 48°$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

II.B

16. a)		
(A számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján:) $S_{25} = \frac{2\cdot 56 + 24\cdot(-4)}{2}\cdot 25 =$	1 pont	
$= 200$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. b)		
(A számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján:) $408 = \frac{2\cdot 56 + (n-1)\cdot(-4)}{2}\cdot n$.	1 pont	
A műveleteket elvégezve: $816 = 112n - 4n^2 + 4n$.	2 pont	
A másodfokú egyenlet: $4n^2 - 116n + 816 = 0$,	1 pont	
ennek gyökei, vagyis n lehetséges értékei: 12 és 17.	2 pont	
Ha n = 12, akkor $a_{12} = 56 + 11\cdot(-4) = 12$.	1 pont	
Ha n = 17, akkor $a_{17} = 56 + 16\cdot(-4) = -8$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat tagjainak felsorolásával oldja meg a feladatot, akkor a feladat helyes értelmezéséért 2 pontot kapjon. További 3 pont jár, ha a sorozat első 12 tagjának helyes összeadásával eljut az n = 12 eredményre. További 1-1 pont jár az a_{12}, az n = 17 és az a_{17} meghatározásáért.

16. c)		
(A mértani sorozat n-edik tagjának kiszámítására vonatkozó képlet alapján:) $100\,000 = 10^{25}\cdot 0{,}01^{n-1}$.	1 pont	
Ebből $10^5 = 10^{25}\cdot\left(10^{-2}\right)^{n-1}$.	2 pont	
(A hatványozás azonosságainak felhasználásával:) $10^{-20} = 10^{-2n+2}$.	2 pont	
(Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:) $-20 = -2n + 2$.	1 pont	
n = 11 (tehát a sorozatnak a 11. tagja a 100 000).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

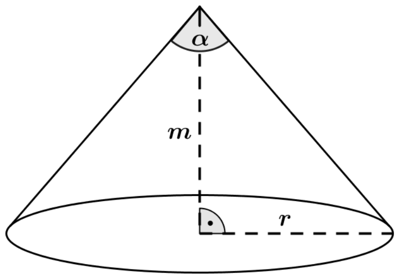
Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat tagjainak felsorolásával oldja meg a feladatot, akkor a feladat helyes értelmezéséért 2 pontot kapjon. További 5 pont jár a helyes válasz megadásáért.

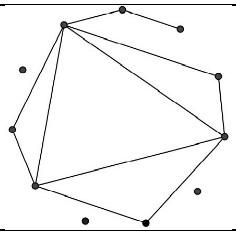
17. a)		
15 golyóból az első sorba kerülő 5-öt $\binom{15}{5}=$	2 pont	
= 3003-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b) első megoldás		
A lehetséges különböző kirakások száma: $15\cdot 14\cdot \ldots \cdot 8\cdot 7=$	2 pont	
= 1 816 214 400.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b) második megoldás		
Az első sor kiválasztása és sorba rakása $\binom{15}{5}\cdot 5!$ -féleképpen történhet.	1 pont	
A második sor kiválasztása és sorba rakása: $\binom{10}{4}\cdot 4!$ -féleképpen történhet.	1 pont	
(Az összes különböző lehetőség számának meghatározásához ezek szorzatát kell venni), vagyis az összes lehetőség száma: 1 816 214 400.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha csak a $\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{4}$ *szorzat szerepel, akkor 1 pont jár a megoldásra.*

17. c)		
 Ábra, melyen a lámpa fénykúpjának nyílásszöge $\alpha = 100°$, a kúp magassága m = 85 cm, az alapkör sugara r.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
(Szögfüggvény alkalmazása a derékszögű háromszögben:) tg 50º =	1 pont	*Ez a pont valamelyik hegyesszög jó megállapításáért,*
$= \frac{r}{m}$.	1 pont	*ez pedig a szögfüggvény helyes alkalmazásáért jár.*
Ebből az alapkör sugara: $r \approx 101{,}3$ (cm).	1 pont	
A kérdés megválaszolásához az asztallap két legtávolabbi pontjának a távolságát kell vizsgálni, vagyis meg kell határozni a téglalap átlóinak (e) a hosszát.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$e^2 = 194^2 + 97^2$	1 pont	
$e \approx 216{,}9$ (cm)	1 pont	
Mivel $e > 2r$,	1 pont	
ezért a lámpa nem világítja be az asztallap minden pontját.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

18. a)		
Több lehetőség is van, ezek közül egy példa: 	3 pont	*Egy hiba esetén 2 pont, két hiba esetén 1 pont, kettőnél több hiba esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

18. b)		
Annyi kézfogás történt, ahány éle van a gráfnak,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
összesen 11.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

18. c)		
A vizsgázó által megadott számok egyetlen módusza 2,	1 pont	*Ezek a pontok járnak, ha a megoldás hiányos vagy részben hibás, de a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó a kérdéses fogalmat jól értelmezte.*
mediánja 3,	1 pont	
átlaga 4,	1 pont	
terjedelme 5.	1 pont	
A vizsgázó 11 olyan nemnegatív egész számot sorolt fel, amely valamennyi feltételt teljesít.	1 pont	*Egy lehetséges megoldás pl.: 2, 2, 2, 2, 2, 3, 6, 6, 6, 6, 7.*
Összesen:	**5 pont**	

18. d) első megoldás		
Annak valószínűsége, hogy a játékos nem lő be egy tizenegyest: (1 – 0,9 =) 0,1.	1 pont	
Összesen három lehetőséget kell figyelembe venni.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Pontosan egyszer talál be, és kétszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{1}\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1^2$ (= 0,027).	1 pont	
Pontosan kétszer talál be, és egyszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{2}\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1$ (= 0,243).	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy mindháromszor betalál: $0{,}9^3$ (= 0,729).	1 pont	
A keresett valószínűség ezek összege,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
azaz 0,999.	1 pont	*99,9% is elfogadható.*
Összesen:	**7 pont**	

18. d) második megoldás		
Annak valószínűsége, hogy a játékos nem lő be egy tizenegyest: (1 – 0,9 =) 0,1.	1 pont	
A keresett valószínűséget megkapjuk, ha a biztos esemény valószínűségéből kivonjuk annak valószínűségét, hogy egyszer sem talál be.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Annak valószínűsége, hogy egyszer sem talál be $0{,}1^3$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer betalál $1 - 0{,}1^3 =$	2 pont	
= 0,999.	1 pont	*99,9% is elfogadható.*
Összesen:	**7 pont**	