

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2015. május 5.

MATEMATIKA

**KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA**

**JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTERIUMA**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon!
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészeire előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszaámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámaát, amelynek az értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$A \cap B = \{3; 4; 5\}$	1 pont	
$B \cup C = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{1; 2\}$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

2.		
14	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
Összesen:	2 pont	

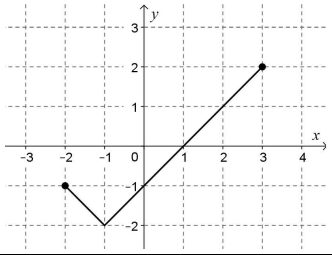
3.		
A) igaz B) hamis C) igaz	2 pont	<i>2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.</i>
Összesen:	2 pont	

4.		
$[-2; 2]$	2 pont	<i>Más helyes jelölés is elfogadható.</i>
Összesen:	2 pont	

5.		
$(a + 9)(a - 1) = a^2 + 9a - a - 9$	1 pont	
$(a - 4)^2 = a^2 - 8a + 16$	1 pont	
Összevonás után: $2a^2 + 7$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

6.		
a) -3	1 pont	
b) -54	1 pont	
Összesen:	2 pont	

7.		
17 éves	2 pont	
Összesen:	2 pont	

8.		
		
Az ábrázolt grafikon az abszolútérték-függvény grafikonjából eltolással származik.	1 pont	
Az ábrázolt függvény minimumhelye -1 , minimuma -2 .	1 pont	
A függvény értelmezési tartománya le van szűkítve a megadott intervallumra.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

9.		
Jó ábra.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.</i>
A kúp magassága (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{41^2 - 9^2} =$	1 pont	
$= 40$ (cm).	1 pont	
Összesen:	3 pont	

10.		
A vizsgázó öt darab pozitív egész számot adott meg.	1 pont	
A megadott számok mediánja 4 ,	1 pont	
átlaga 3 .	1 pont	
Összesen:	3 pont	

Megjegyzés: A két lehetséges megoldás $\{1; 1; 4; 4; 5\}$ és $\{1; 2; 4; 4; 4\}$.

11.		
$x^2 + (y - 3)^2 =$	1 pont	
$= 4$	1 pont	
A kör sugara 2 .	1 pont	
Összesen:	3 pont	

12.		
$\frac{1}{8}$ ($= 0,125$)	2 pont	<i>Százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	2 pont	

18. c) első megoldás		
A 3-as számjegyek helyét $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ -féleképpen tudjuk kiválasztani.	1 pont	
Ezután a 4-es számjegyek helyét $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ -féleképpen tudjuk kiválasztani.	1 pont	
A maradék két különböző számjegyet a fennmaradó két helyre kétféleképpen lehet elhelyezni.	1 pont	
Az összes lehetséges kódok száma ezek szorzata: $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 2 = 180$	1 pont	
A kedvező esetek száma 1 .	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{1}{180} = 0,00\dot{5}$.	1 pont	<i>Más ésszerűen és helyesen kerekített érték, valamint százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	6 pont	

18. c) második megoldás		
Hat különböző számjegy összesen $6!$ -féleképpen sorakozhatna egymás után,	1 pont	<i>Ha a vizsgázó az ismétléses permutáció képletére hivatkozik, akkor ezek a pontok járnak.</i>
de az ismétlődő számjegyek megfelezik a lehetőségek számát,	1 pont	
kétszer is.	1 pont	
Így az összes a feltételeknek megfelelő kódok száma: 180 .	1 pont	
A kedvező esetek száma 1 .	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{1}{180} = 0,00\dot{5}$.	1 pont	<i>Más ésszerűen és helyesen kerekített érték, valamint százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	6 pont	

18. a) első megoldás		
Egy 2-es és négy 9-es számjegyet tartalmazó kód 5 darab van,	1 pont	
egy 9-es és négy 2-es számjegyet tartalmazó kód szintén 5 darab van.	1 pont	
Két 2-es és három 9-es számjegyből álló kódok száma 10,	1 pont	
két 9-es és három 2-es számjegyből álló kódok száma szintén 10.	1 pont	
Ez összesen 30 megfelelő kód.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

18. a) második megoldás		
A megfelelő kódok számát megkapjuk, ha az összes lehetséges 2-es és 9-es számjegyet tartalmazó ötjegyű szám számából kivonjuk azok számát, amelyek nem tartalmazzák mindkét számjegyet.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
2-es és 9-es számjegyekből álló ötjegyű számok száma $2^5 =$	1 pont	
$= 32$.	1 pont	
Ebből 2 olyan van, amelyik nem tartalmazza mindkét számjegyet.	1 pont	
A megfelelő kódok száma 30.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

18. b)		
Béla kódjának számjegyei lehetnek: 2, 3, 5 vagy 7.	1 pont	
A hattal való oszthatósághoz 2-vel és 3-mal is oszthatónak kell lennie a kódnak.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Mivel kettővel osztható, ezért biztosan 2-re végződik.	1 pont	
Hárommal akkor lesz osztható, ha mellette a 3 és a 7 szerepel,	1 pont	
nagyság szerint csökkenő sorrendben.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Így a kérdéses kód a 732.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

II. A

13. a)		
$3 \cdot (-7) + 7p = 21$	1 pont	
$p = 6$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

13. b)		
Az e egyenes egy normálvektora az $\mathbf{n}_e(3; 7)$ vektor.	1 pont	
Így a rá merőleges f egyenes egy normálvektora az $\mathbf{n}_f(-7; 3)$ vektor.	1 pont	
$-7x + 3y = (-7) \cdot 1 + 3 \cdot (-2)$	1 pont	
Az f egyenes egyenlete $-7x + 3y = -13$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

13. c) első megoldás		
A g egyenes meredeksége $m_g = -\frac{3}{7}$.	1 pont	
Az e egyenes egyenlete átrendezve $y = -\frac{3}{7}x + 3$.	1 pont	
Az e egyenes meredeksége $m_e = -\frac{3}{7}$.	1 pont	
Mivel a két egyenes meredeksége megegyezik, ezért párhuzamosak.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

13. c) második megoldás		
A g egyenes egyenletéből y -t behelyettesítjük az e egyenes egyenletébe.	1 pont	
$3x - 3x + 35 = 21$	1 pont	
Ennek az egyenletnek nincs megoldása,	1 pont	
vagyis a két egyenesnek nincs közös pontja, így párhuzamosak.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a két egyenest helyesen ábrázolja közös koordinátarendszerben, akkor ezért 1 pontot kapjon. Ha az ábra alapján indoklás nélkül megállapítja, hogy a két egyenes párhuzamos, akkor ezért még 1 pont jár. Ha ezeken felül az ábráról – indoklásként – jól olvassa le mindkét egyenes meredekségét, akkor ezért a teljes pontszám jár.

14. a)		
(A kérdéses szöveget α -val jelölve) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{6}{4}$	1 pont	
$\alpha \approx 56,3^\circ$	1 pont	
A kérdéses szög nagysága kb. $123,7^\circ$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

14. b)		
Az összes eset száma: $\binom{28}{3} (= 3276)$.	1 pont	
A kedvező esetek száma: $\binom{8}{1} \cdot \binom{20}{2} (= 1520)$.	2 pont	
A kért valószínűség $\frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{28}{3}} \approx 0,464$.	1 pont	Más ésszerűen (legalább két tizedesjegyre) és helyesen kerekített érték, továbbá százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
Összesen:	4 pont	

14. c)		
A keletkező forgástest egy hengerből és annak kör-lapjaira illeszkedő két egybevágó csonkakúp-ból áll.	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.
A henger alapkörének sugara és magassága egyaránt 6 cm.	1 pont	
Térfogata $V_h = 216\pi (\approx 678,58) (\text{cm}^3)$.	1 pont	
A csonkakúp alapkörének sugara és magassága egyaránt 6 cm, fedőkörének sugara 2 cm.	1 pont	
Térfogata $V_{\text{csk}} = \frac{\pi \cdot 6}{3} \cdot (6^2 + 6 \cdot 2 + 2^2) = 104\pi (\approx 326,73) (\text{cm}^3)$.	1 pont	
A kérdéses térfogat: $V_h + 2V_{\text{csk}} = 424\pi \approx 1332 \text{ cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

17. c) második megoldás		
(Az út megtételéhez szükséges időt t -vel jelölve a feladat szövege alapján felírható egyenlet:) $\frac{396}{t} + 16 = \frac{396}{t-1}$.	2 pont*	
$396(t-1) + 16t(t-1) = 396t$	2 pont*	
$16t^2 - 16t - 396 = 0$	1 pont	$4t^2 - 4t - 99 = 0$
$t_1 = -4,5, t_2 = 5,5$	1 pont	
(A negatív gyök nem megoldása a feladatnak, ezért) az átlagsebesség $\frac{396}{5,5} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

(Az út megtételéhez szükséges időt t -vel, az átlagsebességet v -vel jelölve a feladat szövege alapján felírható egyenletrendszer:) $\left. \begin{aligned} v \cdot t &= 396 \\ (v+16)(t-1) &= 396 \end{aligned} \right\}$	2 pont	
A második egyenletben a zárójeleket felbontva és $v \cdot t$ helyére 396-ot helyettesítve: $16t - v - 16 = 0$.	1 pont	
Ebből valamelyik ismeretlent kifejezve és a $v \cdot t = 396$ egyenletbe helyettesítve:	1 pont	

17. a) első megoldás		
(Ha a rövidebb útvonal hossza x km, akkor a másik útvonal $(x + 140)$ km hosszú. A feladat szövege alapján felírható egyenlet:) $\frac{x}{71} = \frac{x+140}{106}$.	2 pont	
$106x = 71x + 9940$	1 pont	
$x = 284$	1 pont	
A rövidebb útvonal hossza 284 km.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

17. a) második megoldás		
(Az út megtételéhez szükséges időt órában jelölje y . A feladat szövege alapján felírható egyenlet:) $71y + 140 = 106y$	2 pont	
$y = 4$	1 pont	
$71 \cdot 4 = 284$	1 pont	
A rövidebb útvonal hossza 284 km.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

17. b)		
Az autó benzinfogyasztása az úton $\frac{396}{100} \cdot 6,5 =$	1 pont	
$= 25,74$ liter.	1 pont	25,7 vagy 26 liter is elfogadható.
Ennek költsége kb. 11 000 Ft.	1 pont	Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.
Összesen:	3 pont	

17. c) első megoldás		
(Az átlagsebességet v -vel jelölve a feladat szövege alapján felírható egyenlet:) $\frac{396}{v} = \frac{396}{v+16} + 1$.	2 pont*	
$396(v+16) = 396v + v(v+16)$	2 pont*	
$v^2 + 16v - 6336 = 0$	1 pont	
$v_1 = -88, v_2 = 72$	1 pont	
(A negatív gyök nem megoldása a feladatnak, ezért) az átlagsebesség $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

15. a)		
$f(6) = 3 \cdot 2^{6-1} =$	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.
$= 96$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

15. b)		
$2^{x-1} = 0,125$	1 pont	
$2^{x-1} = \frac{1}{8}$	1 pont	$\lg 2^{x-1} = \lg 0,125$
$2^{x-1} = 2^{-3}$	1 pont	$(x-1) \cdot \lg 2 = \lg 0,125$
(Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $x-1 = -3$.	1 pont	$x = \frac{\lg 0,125}{\lg 2} + 1$
$x = -2$	1 pont	
Ellenőrzés: behelyettesítés vagy ekvivalenciára hivatkozás.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

15. c)		
A sorozat első tagja $a_1 = 3$,	1 pont	
hányadosa $q = 2$.	1 pont	
Az első 10 tag összege $S_{10} = 3 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} =$	1 pont	
$= 3\,069$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó kiszámítja a sorozat első 10 tagját, és ezeket jól összeadja, akkor 4 pontot kapjon. Egy hiba (egy tag értékének hibás megadása vagy hibás összeadás) esetén 2 pont jár, egyénél több hiba esetén nem jár pont.

II. B

16. a)		
Meg kell határozni a gyermektelen családok számát 1990-ben és 2011-ben.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A gyermektelen családok száma 1990-ben $2896 \cdot 0,48 \approx 1\,390$ (ezer),	1 pont	
2011-ben $2713 \cdot 0,52 \approx 1\,411$ (ezer) volt.	1 pont	
$\frac{1411}{1390} \approx 1,015$	1 pont	
A gyermektelen családok száma 1990-ről 2011-re kb. 1,5%-kal nőtt.	1 pont	<i>Más, legalább egy tizedesjegyre helyesen kerekített érték is elfogadható.</i>
Összesen:	5 pont	

16. b) első megoldás		
$\frac{0 \cdot 52 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2}{100} =$	2 pont	
$= 0,8$ (eltartott gyermek jutott átlagosan egy családra 2011-ben.)	1 pont	<i>Egészre kerekített érték nem fogadható el.</i>
Összesen:	3 pont	

16. b) második megoldás															
<table><tr><td>Az eltartott gyermekek száma</td><td>A családok száma 2011-ben (ezer)</td></tr><tr><td>0</td><td>1411</td></tr><tr><td>1</td><td>678</td></tr><tr><td>2</td><td>434</td></tr><tr><td>3</td><td>136</td></tr><tr><td>4 vagy több</td><td>54</td></tr></table>		Az eltartott gyermekek száma	A családok száma 2011-ben (ezer)	0	1411	1	678	2	434	3	136	4 vagy több	54	1 pont	
Az eltartott gyermekek száma	A családok száma 2011-ben (ezer)														
0	1411														
1	678														
2	434														
3	136														
4 vagy több	54														
$\frac{0 \cdot 1411 + 1 \cdot 678 + 2 \cdot 434 + 3 \cdot 136 + 4 \cdot 54}{2713} \approx$		1 pont													
$\approx 0,8$ (eltartott gyermek jutott átlagosan egy családra 2011-ben.)		1 pont	Más, legalább egy tizedesjegyre helyesen kerekített érték is elfogadható.												
Összesen:		3 pont													

Megjegyzés: Ha a vizsgázó tévesen a 2011-es helyett az 1990-es adatot számolja ki helyesen (0,84), akkor ezért 2 pontot kapjon.

16. c) első megoldás		
Egy mennyiség 0,7%-kal történő csökkentése a mennyiség 0,993-dal való szorzását jelenti.	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
Egy mennyiség 6,3%-kal történő növelése a mennyiség 1,063-dal való szorzását jelenti.	1 pont	
A háztartások számát (ezerben) 1990-ben jelölje x , ekkor felírható: $x \cdot 0,993 \cdot 1,063 = 4106$.	1 pont	
$x \approx 3890$,	1 pont	
tehát kb. 3 890 ezer háztartás volt az országban 1990-ben.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.</i>
Összesen:	5 pont	

16. c) második megoldás		
2001-ben a háztartások száma (ezerben) $\frac{4106}{1,063} \approx$	1 pont	
$\approx 3862,65$.	1 pont	
1990-ben $\frac{3862,65}{0,993} \approx$	1 pont	
$x \approx 3890$,	1 pont	
tehát kb. 3 890 ezer háztartás volt az országban 1990-ben.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.</i>
Összesen:	5 pont	

16. d) első megoldás		
A két körlap területének aránya $\lambda^2 = \frac{1317}{946} (\approx 1,39)$.	2 pont	
vagyis $\lambda \approx 1,18$.	1 pont	
A kérdezett sugár nagysága $(4,5 \cdot \lambda \approx) 5,3$ cm.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

16. d) második megoldás		
Az 1990-es év adatát ábrázoló kör területe $t_1 = 4,5^2 \pi (\approx 63,62) \text{ (cm}^2\text{)}$.	1 pont	
Így a másik kör területe $t_2 = t_1 \cdot \frac{1317}{946} (\approx 88,57) \text{ (cm}^2\text{)}$.	1 pont	
Ebből a kérdezett sugár nagysága $= \sqrt{\frac{t_2}{\pi}} \approx$	1 pont	
$\approx 5,3$ cm.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Más ésszerűen és helyesen kerekített eredmény is elfogadható.