

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2015. május 5.

MATEMATIKA

**KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA**

**JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTERIUMA**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott* kipipálás
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

Figyelem! Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

I.

1.		
a^2	2 pont	
Összesen:	2 pont	

2.		
$X = 2$ vagy	1 pont	
$X = 8$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

Megjegyzés: 2 jó és 1 rossz, vagy 1 jó megoldásért 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.

3.		
A	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
Összesen:	2 pont	

4.		
$b^2 + 40 = 49$	1 pont	
$b = 3$ vagy	1 pont	
$b = -3$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

5.		
A) hamis B) hamis C) igaz	2 pont	<i>2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.</i>
Összesen:	2 pont	

6.		
A minimum helye: 2.	1 pont	
A minimum értéke: 0.	1 pont	
Összesen:	2 pont	

7.		
A terjedelem 48.	1 pont	
A medián 9.	2 pont	<i>1 pont jár az adatok monoton sorozattá rendezése esetén.</i>
Összesen:	3 pont	

18. c) első megoldás

Az első tétel biológia vagy kémia is lehet.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha az első tétel biológia, akkor az első tételt 28 tétel közül választhatja ki. Ekkor a második tételt a 30 kémia tétel közül kell kiválasztania.	1 pont	
A harmadik tételt 27 biológia, a negyediket 29 kémia, az ötödik tételt 26 biológia, a hatodik tételt 28 kémia tétel közül választhatja ki.	1 pont	
Ez $28 \cdot 30 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 26 \cdot 28 (= 478\,820\,160)$ lehetőség.	1 pont	
Ha az első tétel kémia, az még egyszer ugyanennyi különböző lehetőséget jelent.	1 pont	
Vagyis Nóri összesen 957 640 320-féleképpen állíthatja össze a tételek sorrendjét.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

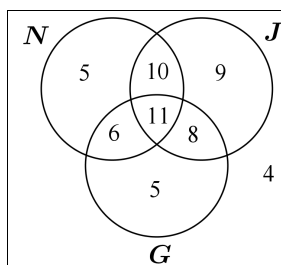
18. c) második megoldás

A három megtanulandó biológia tételt $\binom{28}{3}$,	1 pont	
a kémia tételeket $\binom{30}{3}$ -féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
A kiválasztott tételeket tárgyaként $3! (= 6)$ -féleképpen lehet sorba rendezni.	1 pont	
Az első tétel kétféle tárgyból választható, de a tárgyak sorrendje az első tétel kiválasztása után már adott.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A különböző sorrendek száma: $2 \cdot \binom{28}{3} \cdot 3! \cdot \binom{30}{3} \cdot 3!$.	1 pont	
Vagyis Nóri összesen 957 640 320-féleképpen állíthatja össze a tételek sorrendjét.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

18. a)		
Az öt lehetőség közül kettőt kiválasztani $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen lehet (összes esetek száma).	2 pont	
Ezek közül egy esetben kapunk jó megoldást, így a kérdéses valószínűség 0,1.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

18. b)		
A pontosan két diák által jól megoldott feladatok száma: Nóri-Judit: $(21 - 11 =) 10$, Nóri-Gergő: $(17 - 11 =) 6$, Judit-Gergő: $(19 - 11 =) 8$.	1 pont*	
A feladatok között $(32 - 11 - 10 - 6 =) 5$ olyan volt, amelyet csak Nóri, és $(38 - 11 - 10 - 8 =) 9$ olyan, amelyet csak Judit oldott meg helyesen.	1 pont*	
Azon kérdések száma, amelyre a három tanuló közül legalább egyikük helyes választ adott: $58 - 4 = 54$.	1 pont*	
$(32 + 38 - 21 =) 49$ olyan kérdés volt, amelyre Nóri vagy Judit helyes választ adott,	1 pont*	A Gergő által helyesen megoldott feladatok száma $54 - (5 + 9 + 10) = 30$.
így $(54 - 49 =) 5$ olyan feladat volt, amelyet csak Gergő oldott meg helyesen.	1 pont*	
A Gergő által helyesen megoldott feladatok száma: $(5 + 6 + 8 + 11 =) 30$.	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség $\frac{30}{58} \approx$	1 pont	
$\approx 0,517$.	1 pont	Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.
Összesen:	8 pont	

Megjegyzés: A *-gal jelzett 5 pontot a vizsgázó az alábbi Venn-diagramért is megkaphatja.



8.		
	2 pont	Nem egyszerű gráf is elfogadható.
Összesen:	2 pont	

9.		
6000	2 pont	$6 \cdot 10^3$ is elfogadható.
Összesen:	2 pont	

10.		
A kör középpontja $(-3; 4)$.	1 pont	
A kör átmérője 10.	2 pont	A sugár hosszának megállapításáért 1 pont jár.
Összesen:	3 pont	

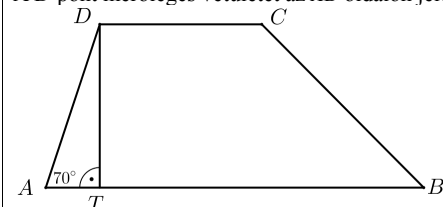
11.		
$\vec{GC} = -\mathbf{r}$	1 pont	
$\vec{AG} = \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}$	1 pont	
$\vec{FH} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

12.		
Az összes eset száma 36.	1 pont	
Akkor lesz prímszám a szorzat, ha az egyik kockával 1-et és a másikkal 2-t, 3-t vagy 5-öt dobunk.	1 pont	Ha a vizsgázó az 1-et is prímszámnak tekinti, akkor ezért 1 pontot veszít sen.
Ezt összesen $2 \cdot 3 = 6$ -féleképpen tehetjük meg (kedvező esetek száma).	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

II. A

13. a)

A D pont merőleges vetületét az AB oldalon jelölje T .



Meghatározandó a DT szakasz hossza.

Az ATD derékszögű háromszögben: $\sin 70^\circ = \frac{DT}{7}$.

$DT = 7 \cdot \sin 70^\circ \approx 6,58$ cm.

Összesen: 3 pont

13. b) első megoldás

A trapéz D csúcsánál lévő belső szöge 110° .

Írjuk fel az ACD háromszögben a koszinusztételt:

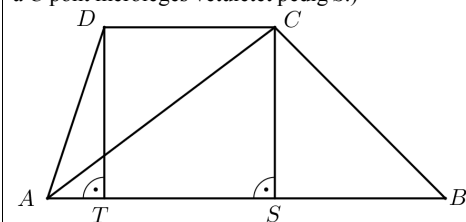
$$AC^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 110^\circ.$$

Kb. 10,66 cm az AC átló hossza.

Összesen: 4 pont

13. b) második megoldás

(A D pont merőleges vetületét az AB oldalon jelölje T , a C pont merőleges vetületét pedig S .)



Ekkor $AT = 7 \cdot \cos 70^\circ \approx 2,39$ (cm).

$AS = AT + TS = AT + CD \approx 8,39$ (cm).

Az ASC derékszögű háromszögben
 $(AC = \sqrt{AS^2 + SC^2} = \sqrt{AS^2 + DT^2}$ miatt)
 $AC \approx \sqrt{8,39^2 + 6,58^2} \approx$

$\approx 10,66$ cm.

Összesen: 4 pont

17. c) első megoldás

(Az 55 év feletti vásárlók számát jelölje x , ekkor a 28 év alattiak száma $2x$.)

Az 55 év feletti átlagosan $\frac{17\,543\,550}{x}$,

1 pont

(Az 55 év feletti átlagos költsége y , a 28 év alattiaké $y - 2410$.)
 Az 55 év feletti száma $\frac{17\,543\,550}{y}$,

a 28 év alattiak átlagosan $\frac{19\,325\,700}{2x}$ Ft-ot költöttek.

1 pont

a 28 év alattiaké $\frac{19\,325\,700}{y - 2410}$.

A feladat szövege alapján felírható:

$$\frac{17\,543\,550}{x} - 2410 = \frac{19\,325\,700}{2x}.$$

1 pont

$$\frac{17\,543\,550}{y} \cdot 2 = \frac{19\,325\,700}{y - 2410}$$

Ebből $2410x = 7\,880\,700$,

1 pont

Az egyenlet rendezése.

azaz $x = 3270$.

1 pont

$y = 5365$ (Ft)

$$\frac{17\,543\,550}{3270} = 5365$$

1 pont

$$\frac{17\,543\,550}{5365} = 3270$$

A webáruháznak 3270 olyan vásárlója volt, aki 55 évnél idősebb, és ők átlagosan 5365 Ft-ot költöttek.

1 pont

Ellenőrzés (a szövegbe történő behelyettesítéssel).

1 pont

Összesen: 8 pont

17. c) második megoldás

(Az 55 év feletti vásárlók számát jelölje x , átlagos költségüket pedig y . A 28 év alattiak száma ekkor $2x$, ők átlagosan $y - 2410$ Ft-ot költöttek.)

Így megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} xy = 17\,543\,550 \\ 2x(y - 2410) = 19\,325\,700 \end{cases}$$

2 pont

A második egyenletben a zárójelet felbontva és az első egyenletből xy értékét behelyettesítve:
 $2 \cdot 17\,543\,550 - 4820x = 19\,325\,700$.

1 pont

Ebből $4820x = 15\,761\,400$,

1 pont

azaz $x = 3270$.

1 pont

$$y = \frac{17\,543\,550}{3270} = 5365$$

1 pont

A webáruháznak 3270 olyan vásárlója volt, aki 55 évnél idősebb, és ők átlagosan 5365 Ft-ot költöttek.

1 pont

Ellenőrzés (a szövegbe történő behelyettesítéssel).

1 pont

Összesen: 8 pont

17. a)		
A 28 évesnél fiatalabbakat ábrázoló körcikk közép-ponti szöge $\frac{7810}{25\,560} \cdot 360^\circ = 110^\circ$.	1 pont	
Az 55 évesnél idősebbeket ábrázoló körcikk közép-ponti szöge $\frac{4615}{25\,560} \cdot 360^\circ = 65^\circ$.	1 pont	
A 28 és 55 év közöttieket ábrázoló körcikk közép-ponti szöge $360^\circ - (110^\circ + 65^\circ) = 185^\circ$.	1 pont	
Az egyes körcikk megjelenítése a megfelelő mé-retben. (A középponti szögek nagyságának feltün-te nélkül is jár ez a pont.)	1 pont	
Egyértelmű jelmagyarázat.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

17. b) első megoldás		
(A 28 év alattiak közül egyet 7810-féleképpen, az 55 évesnél idősebbek közül egyet 4615-féleképpen tudunk kiválasztani, így) a kedvező esetek száma $7810 \cdot 4615 (= 36\,043\,150)$.	1 pont	
Az összes esetek száma: $\binom{25\,560}{2} (= 326\,644\,020)$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{7810 \cdot 4615}{\binom{25\,560}{2}} \approx$	1 pont	
$\approx 0,11$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

17. b) második megoldás		
Annak valószínűsége, hogy elsőre 28 évesnél fiatalabbat, másodikkra pedig 55 évesnél idősebbet választunk: $\frac{7810}{25\,560} \cdot \frac{4615}{25\,559} (\approx 0,055)$.	2 pont	
(A szimmetria miatt) ugyanennyi annak valószínűsége, hogy elsőre 55 évesnél idősebbet, másodikkra pedig 28 évesnél fiatalabbat választunk.	1 pont	
A kérdéses valószínűség így kb. $(2 \cdot 0,055 =) 0,11$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

13. c)		
Az AB szakasz párhuzamos a CD szakasszal, így az EDC és EAB háromszögek hasonlósága miatt (a kérdéses szakasz hosszát x -szel jelölve):	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
$\frac{x}{6} = \frac{x+7}{10}$	1 pont	
Ebből $10x = 6x + 42$,	1 pont	
azaz $x = 10,5$ cm.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

14. a) első megoldás		
Az egyenlet alakja $x \geq 3$ esetén: $x - 3 = 3x - 1$,	1 pont	
amiből $x = -1$,	1 pont	
ami nem megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Az egyenlet alakja $x < 3$ esetén: $-(x - 3) = 3x - 1$,	1 pont	
amiből $x = 1$.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy (az $x < 3$ alaphal-mazon) ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

14. a) második megoldás		
Az $x \mapsto x - 3 $ függvény ábrázolása koordináta-rend-szerben.	2 pont	
Az $x \mapsto 3x - 1$ függvény ábrázolása ugyanabban a koordináta-rendszerben.	2 pont	
A grafikonok metszéspontjának első koordinátája $x = 1$.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

14. b) első megoldás		
A $(-4; 0)$ és a $(4; 6)$ pont ábrázolása koordináta-rend-szerben.	2 pont	
A rájuk illeszkedő egyenes megrajzolása.	1 pont	
Az egyenes az y tengelyt $b = 3$ -ban metszi.	1 pont	
Az egyenes meredeksége: $a = \frac{6}{8} \left(= \frac{3}{4} \right)$.	2 pont	
Összesen:	6 pont	

14. b) második megoldás		
A megadott feltételek szerint $a \cdot (-4) + b = 0$,	2 pont	
továbbá $a \cdot 4 + b = 6$.	1 pont	
Az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve és a másik egyenletbe helyettesítve vagy a két egyenletet összeadva kapjuk, hogy	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$b = 3$,	1 pont	
$a = 0,75$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

15. a)		
Az egyes hónapokban félretett pénzösszegek egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja (Ft-ban) a_1 ,	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
differeenciája pedig 200.	1 pont	
A sorozat első 18 tagjának összege: $\frac{2a_1 + 17 \cdot 200}{2} \cdot 18 = 90\,000$,	2 pont	<i>A sorozat 18. tagjának felírása ($a_1 + 17 \cdot 200$) 1 pontot ér.</i>
amiből $a_1 = 3300$.	1 pont	
A 18. tag $3300 + 17 \cdot 200 = 6700$.	1 pont	
Így az első alkalommal 3300 Ft-ot, az utolsó alkalommal 6700 Ft-ot tettek félre.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

15. b)		
(Zsuzsa fiatalabb testvérének életkorát jelölje x , ekkor másik testvére $x + 7$ éves.) A feladat szövege alapján: $\sqrt{(x+7) \cdot x} = 12$.	1 pont	$(x+7) \cdot x = 144$
Ebből $x^2 + 7x - 144 = 0$,	1 pont	
amiből vagy $x = -16$, de ez az érték nem megoldása a feladatnak,	1 pont	
vagy $x = 9$.	1 pont	
Zsuzsa egyik testvére 9, a másik 16 éves.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: A helyes válasz indoklás nélküli megadásáért 2 pont jár.

II. B

16. a)		
A kereslet minden évben várhatóan az előző évi kereslet 1,06-szorosára változik,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
így 5 év múlva az idei $1,06^5 \approx 1,34$ -szorosára nő.	1 pont	
Ez kb. 34%-kal magasabb, mint az idei kereslet.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

16. b)		
Az ár minden évben várhatóan az előző évi ár 0,94-szorosára változik,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
így megoldandó a $0,94^n = 0,65$ egyenlet, (ahol n az eltelt évek számát jelenti.)	1 pont	
Ebből $n = \frac{\lg 0,65}{\lg 0,94} (\approx 6,96)$.	2 pont	$n = \log_{0,94} 0,65$
Azaz várhatóan 7 év múlva lesz az ár a jelenlegi ár 65%-a.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az ár változását évről évre felírja, és így helyes eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár.

16. c)		
A bevételt a kereslet és az ár szorzatából kapjuk,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
így 8 év múlva a jelenlegi bevétel $(1,06 \cdot 0,94)^8 \approx \approx 0,972$ -szerese várható.	2 pont	
	1 pont	
Azaz 8 év múlva a bevétel az ideinél kb. 2,8%-kal lesz alacsonyabb.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

16. d)		
Ábra az adatok feltüntetésével.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.</i>
A kúp magasságát M -mel jelölve a Pitagorasz-tétel alapján: $M = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} (\approx 5,2 \text{ cm})$.	1 pont	
A kúp térfogata $V \approx \frac{1}{3} \cdot 3^2 \pi \cdot 5,2 \approx \approx 49 \text{ cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	