ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2015. május 5.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

Figyelem! Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

I.

1.		
a^2	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$X = 2$ vagy	1 pont	
$X = 8$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: 2 jó és 1 rossz, vagy 1 jó megoldásért 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.

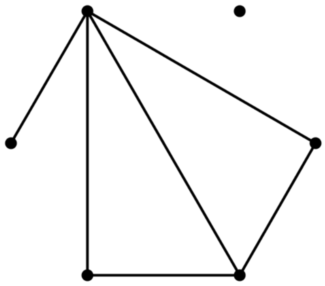
3.		
A	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$b^2 + 40 = 49$	1 pont	
$b = 3$ vagy	1 pont	
$b = -3$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5.		
A) hamis B) hamis C) igaz	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
A minimum helye: 2.	1 pont	
A minimum értéke: 0.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A terjedelem 48.	1 pont	
A medián 9.	2 pont	*1 pont jár az adatok monoton sorozattá rendezése esetén.*
Összesen:	**3 pont**	

8.		
	2 pont	*Nem egyszerű gráf is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

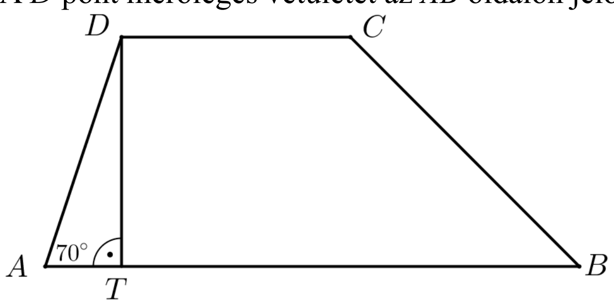
9.		
6000	2 pont	$6 \cdot 10^3$ *is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
A kör középpontja (–3; 4).	1 pont	
A kör átmérője 10.	2 pont	*A sugár hosszának megállapításáért 1 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

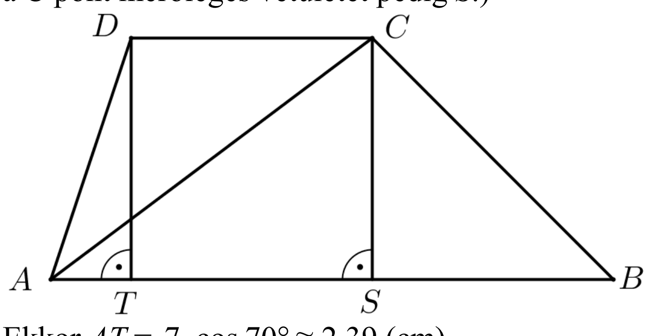
11.		
$\overrightarrow{GC} = -\mathbf{r}$	1 pont	
$\overrightarrow{AG} = \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}$	1 pont	
$\overrightarrow{FH} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
Az összes eset száma 36.	1 pont	
Akkor lesz prímszám a szorzat, ha az egyik kockával 1-et és a másikkal 2-t, 3-t vagy 5-öt dobunk.	1 pont	*Ha a vizsgázó az 1-et is prímszámnak tekinti, akkor ezért 1 pontot veszítsen.*
Ezt összesen $2 \cdot 3 = 6$-féleképpen tehetjük meg (kedvező esetek száma).	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. A

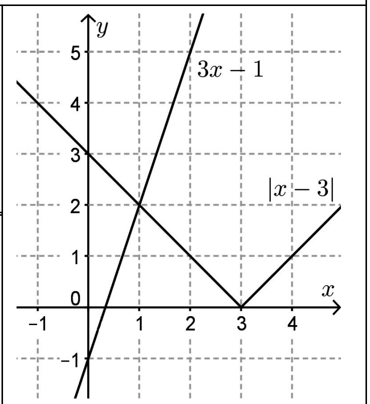
13. a)		
A D pont merőleges vetületét az AB oldalon jelölje T.  Meghatározandó a DT szakasz hossza.	1 pont	
Az ATD derékszögű háromszögben: $\sin 70° = \frac{DT}{7}$.	1 pont	
$DT = 7 \cdot \sin 70° \approx 6{,}58$ cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. b) első megoldás		
A trapéz D csúcsnál lévő belső szöge 110°.	1 pont	
Írjuk fel az ACD háromszögben a koszinusztételt:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$AC^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 110°$.	1 pont	
Kb. 10,66 cm az AC átló hossza.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. b) második megoldás		
(A D pont merőleges vetületét az AB oldalon jelölje T, a C pont merőleges vetületét pedig S.)  Ekkor $AT = 7 \cdot \cos 70° \approx 2{,}39$ (cm).	1 pont	
$AS = AT + TS = AT + CD \approx 8{,}39$ (cm).	1 pont	
Az ASC derékszögű háromszögben ($AC = \sqrt{AS^2 + SC^2} = \sqrt{AS^2 + DT^2}$ miatt) $AC \approx \sqrt{8{,}39^2 + 6{,}58^2} \approx$	1 pont	
$\approx 10{,}66$ cm.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. c)		
Az *AB* szakasz párhuzamos a *CD* szakasszal, így az *EDC* és *EAB* háromszögek hasonlósága miatt (a kérdéses szakasz hosszát *x*-szel jelölve):	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
$\frac{x}{6} = \frac{x+7}{10}$	1 pont	
Ebből $10x = 6x + 42$,	1 pont	
azaz $x = 10{,}5$ cm.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. a) első megoldás		
Az egyenlet alakja $x \geq 3$ esetén: $x - 3 = 3x - 1$,	1 pont	
amiből $x = -1$,	1 pont	
ami nem megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Az egyenlet alakja $x < 3$ esetén: $-(x - 3) = 3x - 1$,	1 pont	
amiből $x = 1$.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy (az $x < 3$ alaphalmazon) ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

14. a) második megoldás		
Az $x \mapsto \lvert x-3 \rvert$ függvény ábrázolása koordinátarendszerben.	2 pont	
Az $x \mapsto 3x-1$ függvény ábrázolása ugyanabban a koordinátarendszerben.	2 pont	
A grafikonok metszéspontjának első koordinátája $x = 1$.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

14. b) első megoldás		
A (–4; 0) és a (4; 6) pont ábrázolása koordinátarendszerben.	2 pont	
A rájuk illeszkedő egyenes megrajzolása.	1 pont	
Az egyenes az *y* tengelyt $b = 3$-ban metszi.	1 pont	
Az egyenes meredeksége: $a = \frac{6}{8}\left(= \frac{3}{4}\right)$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. b) **második megoldás**		
A megadott feltételek szerint $a \cdot (-4) + b = 0$,	2 pont	
továbbá $a \cdot 4 + b = 6$.	1 pont	
Az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve és a másik egyenletbe helyettesítve vagy a két egyenletet összeadva kapjuk, hogy	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$b = 3$,	1 pont	
$a = 0{,}75$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

15. a)		
Az egyes hónapokban félretett pénzösszegek egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja (Ft-ban) a_1,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
differenciája pedig 200.	1 pont	
A sorozat első 18 tagjának összege: $\frac{2a_1 + 17 \cdot 200}{2} \cdot 18 = 90\,000$,	2 pont	*A sorozat 18. tagjának felírása* $(a_1 + 17 \cdot 200)$ *1 pontot ér.*
amiből $a_1 = 3300$.	1 pont	
A 18. tag $3300 + 17 \cdot 200 = 6700$.	1 pont	
Így az első alkalommal 3300 Ft-ot, az utolsó alkalommal 6700 Ft-ot tettek félre.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. b)		
(Zsuzsa fiatalabb testvérének életkorát jelölje x, ekkor másik testvére $x + 7$ éves.) A feladat szövege alapján: $\sqrt{(x+7) \cdot x} = 12$.	1 pont	$(x+7) \cdot x = 144$
Ebből $x^2 + 7x - 144 = 0$,	1 pont	
amiből vagy $x = -16$, de ez az érték nem megoldása a feladatnak,	1 pont	
vagy $x = 9$.	1 pont	
Zsuzsa egyik testvére 9, a másik 16 éves.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: A helyes válasz indoklás nélküli megadásáért 2 pont jár.

II. B

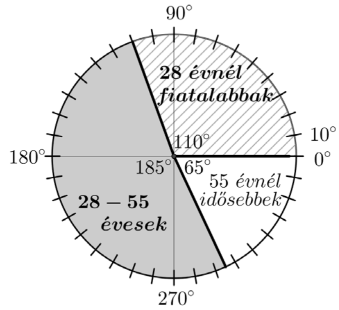
16. a)		
A kereslet minden évben várhatóan az előző évi kereslet 1,06-szorosára változik,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így 5 év múlva az idei $1{,}06^5 \approx 1{,}34$-szorosára nő.	1 pont	
Ez kb. 34%-kal magasabb, mint az idei kereslet.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b)		
Az ár minden évben várhatóan az előző évi ár 0,94-szorosára változik,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így megoldandó a $0{,}94^n = 0{,}65$ egyenlet, (ahol n az eltelt évek számát jelenti.)	1 pont	
Ebből $n = \frac{\lg 0{,}65}{\lg 0{,}94}$ $(\approx 6{,}96)$.	2 pont	$n = \log_{0{,}94} 0{,}65$
Azaz várhatóan 7 év múlva lesz az ár a jelenlegi ár 65%-a.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az ár változását évről évre felírja, és így helyes eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár.

16. c)		
A bevételt a kereslet és az ár szorzatából kapjuk,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így 8 év múlva a jelenlegi bevétel $(1{,}06 \cdot 0{,}94)^8 \approx$	2 pont	
$\approx 0{,}972$-szerese várható.	1 pont	
Azaz 8 év múlva a bevétel az ideinél kb. 2,8%-kal lesz alacsonyabb.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. d)		
Ábra az adatok feltüntetésével.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
A kúp magasságát M-mel jelölve a Pitagorasz-tétel alapján: $M = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$ $(\approx 5{,}2$ cm$)$.	1 pont	
A kúp térfogata $V \approx \frac{1}{3} \cdot 3^2 \pi \cdot 5{,}2 \approx$	1 pont	
≈ 49 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a)		
A 28 évesnél fiatalabbakat ábrázoló körcikk középponti szöge $\frac{7810}{25\,560}\cdot 360° = 110°$.	1 pont	
Az 55 évesnél idősebbeket ábrázoló körcikk középponti szöge $\frac{4615}{25\,560}\cdot 360° = 65°$.	1 pont	
A 28 és 55 év közöttieket ábrázoló körcikk középponti szöge $360° - (110° + 65°) = 185°$.	1 pont	
Az egyes körcikkek megjelenítése a megfelelő méretben. (A középponti szögek nagyságának feltüntetése nélkül is jár ez a pont.)	1 pont	
Egyértelmű jelmagyarázat.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. b) első megoldás		
(A 28 év alattiak közül egyet 7810-féleképpen, az 55 évesnél idősebbek közül egyet 4615-féleképpen tudunk kiválasztani, így) a kedvező esetek száma $7810\cdot 4615$ (= 36 043 150).	1 pont	
Az összes esetek száma: $\binom{25\,560}{2}$ (= 326 644 020).	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{7810\cdot 4615}{\binom{25\,560}{2}} \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}11$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b) második megoldás		
Annak valószínűsége, hogy elsőre 28 évesnél fiatalabbat, másodikra pedig 55 évesnél idősebbet választunk: $\frac{7810}{25\,560}\cdot\frac{4615}{25\,559}$ ($\approx 0{,}055$).	2 pont	
(A szimmetria miatt) ugyanennyi annak valószínűsége, hogy elsőre 55 évesnél idősebbet, másodikra pedig 28 évesnél fiatalabbat választunk.	1 pont	
A kérdéses valószínűség így kb. ($2\cdot 0{,}055 =$) 0,11.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

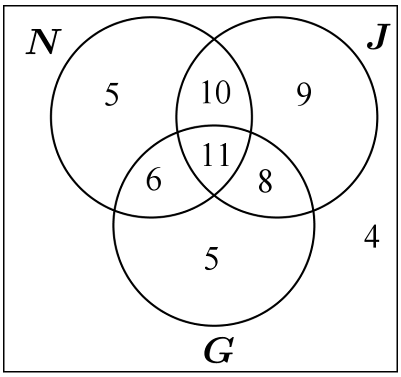
17. c) első megoldás		
(Az 55 év feletti vásárlók számát jelölje x, ekkor a 28 év alattiak száma $2x$.) Az 55 év felettiek átlagosan $\frac{17\,543\,550}{x}$,	1 pont	(*Az 55 év felettiek átlagos költése y, a 28 év alattiaké y* – 2410.) *Az 55 év felettiek száma* $\frac{17\,543\,550}{y}$,
a 28 év alattiak átlagosan $\frac{19\,325\,700}{2x}$ Ft-ot költöttek.	1 pont	*a 28 év alattiaké* $\frac{19\,325\,700}{y-2410}$.
A feladat szövege alapján felírható: $\frac{17\,543\,550}{x}-2410=\frac{19\,325\,700}{2x}$.	1 pont	$\frac{17\,543\,550}{y}\cdot 2=\frac{19\,325\,700}{y-2410}$
Ebből $2410x = 7\,880\,700$,	1 pont	*Az egyenlet rendezése.*
azaz $x = 3270$.	1 pont	$y = 5365$ (Ft)
$\frac{17\,543\,550}{3270}=5365$	1 pont	$\frac{17\,543\,550}{5365}=3270$
A webáruháznak 3270 olyan vásárlója volt, aki 55 évnél idősebb, és ők átlagosan 5365 Ft-ot költöttek.	1 pont	
Ellenőrzés (a szövegbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

17. c) második megoldás		
(Az 55 év feletti vásárlók számát jelölje x, átlagos költésüket pedig y. A 28 év alattiak száma ekkor $2x$, ők átlagosan y – 2410 Ft-ot költöttek.) Így megoldandó a következő egyenletrendszer: $\left.\begin{aligned} xy &= 17\,543\,550 \\ 2x(y-2410) &= 19\,325\,700 \end{aligned}\right\}$	2 pont	
A második egyenletben a zárójelet felbontva és az első egyenletből xy értékét behelyettesítve: $2\cdot 17\,543\,550-4820x=19\,325\,700$.	1 pont	
Ebből $4820x = 15\,761\,400$,	1 pont	
azaz $x = 3270$.	1 pont	
$y=\frac{17\,543\,550}{3270}=5365$	1 pont	
A webáruháznak 3270 olyan vásárlója volt, aki 55 évnél idősebb, és ők átlagosan 5365 Ft-ot költöttek.	1 pont	
Ellenőrzés (a szövegbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. a)		
Az öt lehetőség közül kettőt kiválasztani $\binom{5}{2}$ = 10-féleképpen lehet (összes esetek száma).	2 pont	
Ezek közül egy esetben kapunk jó megoldást, így a kérdéses valószínűség 0,1.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. b)		
A pontosan két diák által jól megoldott feladatok száma: Nóri-Judit: (21 – 11 =) 10, Nóri-Gergő: (17 – 11 =) 6, Judit-Gergő: (19 – 11 =) 8.	1 pont*	
A feladatok között (32 – 11 – 10 – 6 =) 5 olyan volt, amelyet csak Nóri, és (38 – 11 – 10 – 8 =) 9 olyan, amelyet csak Judit oldott meg helyesen.	1 pont*	
Azon kérdések száma, amelyre a három tanuló közül legalább egyikük helyes választ adott: 58 – 4 = 54.	1 pont*	
(32 + 38 – 21 =) 49 olyan kérdés volt, amelyre Nóri vagy Judit helyes választ adott,	1 pont*	*A Gergő által helyesen megoldott feladatok száma* 54 – (5 + 9 + 10) = = 30.
így (54 – 49 =) 5 olyan feladat volt, amelyet csak Gergő oldott meg helyesen.	1 pont*	
A Gergő által helyesen megoldott feladatok száma: (5 + 6 + 8 + 11 =) 30.	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség $\frac{30}{58} \approx$	1 pont	
≈ 0,517.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelzett 5 pontot a vizsgázó az alábbi Venn-diagramért is megkaphatja.*



18. c) **első megoldás**		
Az első tétel biológia vagy kémia is lehet.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha az első tétel biológia, akkor az első tételt 28 tétel közül választhatja ki. Ekkor a második tételt a 30 kémia tétel közül kell kiválasztania.	1 pont	
A harmadik tételt 27 biológia, a negyediket 29 kémia, az ötödik tételt 26 biológia, a hatodik tételt 28 kémia tétel közül választhatja ki.	1 pont	
Ez $28 \cdot 30 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 26 \cdot 28\,(= 478\,820\,160)$ lehetőség.	1 pont	
Ha az első tétel kémia, az még egyszer ugyanennyi különböző lehetőséget jelent.	1 pont	
Vagyis Nóri összesen 957 640 320-féleképpen állíthatja össze a tételek sorrendjét.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. c) **második megoldás**		
A három megtanulandó biológia tételt $\binom{28}{3}$,	1 pont	
a kémia tételeket $\binom{30}{3}$-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
A kiválasztott tételeket tárgyanként 3!(= 6)-féleképpen lehet sorba rendezni.	1 pont	
Az első tétel kétféle tárgyból választható, de a tárgyak sorrendje az első tétel kiválasztása után már adott.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A különböző sorrendek száma: $2 \cdot \binom{28}{3} \cdot 3! \cdot \binom{30}{3} \cdot 3!$.	1 pont	
Vagyis Nóri összesen 957 640 320-féleképpen állíthatja össze a tételek sorrendjét.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	