ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2016. május 3.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor
a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

Figyelem! Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

I.

1.		
$x_1 = 0$	1 pont	
$x_2 = \frac{5}{2}$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
1. állítás: hamis.	1 pont	
2. állítás: igaz.	1 pont	
3. állítás: igaz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
$x = 25$	2 pont	$\log_3 9 = 2$ *-ért 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
A megadott számjegyek összege (18) osztható 3-mal.	1 pont	
(A 3, 4, 6 számjegyek tetszőleges sorrendben követhetik egymást az első három helyiértéken, így) $3 \cdot 2 \cdot 1 =$	1 pont	
= 6 ilyen számot tudunk képezni.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül felsorolja a 6 megfelelő négyjegyű számot, akkor 2 pontot kap.

5.		
$b_2 = -2$	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
Egy, a feladat feltételeinek megfelelő gráf rajzolása. Lehetőségek: 	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$r^2 = CE^2 = (-2-1)^2 + (3-(-1))^2$	1 pont	
$r^2 = 25$ (vagy $r = 5$)	1 pont	
A kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8.		
$P(A) = \frac{1}{6}$	1 pont	
$P(B) = \frac{4}{36}\left(= \frac{1}{9}\right)$	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Tizedestörtben vagy százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.

9.		
Bármelyik nemnegatív szám felírása.	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem egy számot ír fel, ha nem utal arra, hogy bármilyen nemnegatív (pozitív) szám megfelel válaszként, akkor 2 pontot kapjon.

10.		
$x_1 = -\pi$	1 pont	
$x_2 = \pi$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a válaszait fokban adja meg (–180°, 180°), akkor 1 pontot kapjon. Ha a valós számok halmazán adja meg (jól) a függvény összes zérushelyét ($x = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$), akkor 1 pontot kapjon.

11. első megoldás		
A két négyzet egy-egy oldalának aránya (a hasonlóság aránya) is 1:4.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
A két négyzet területének aránya 1:16.	1 pont	
A nagyobb négyzet területe 400 cm^2.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

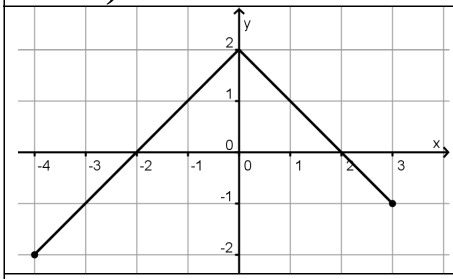
11. második megoldás		
A kisebb négyzet egy oldala 5 cm hosszú.	1 pont	
A nagyobb négyzet egy oldala 20 cm hosszú.	1 pont	
A nagyobb négyzet területe 400 cm^2.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
$1000-240=760$ megkérdezettnek van valamilyen biztosítása.	1 pont	
Az összes biztosítás száma: $470+520=990$.	1 pont	
$990-760=230$ olyan megkérdezett ember van, akinek van mindkét biztosítása.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó jó Venn-diagramról helyesen olvassa le a megoldást, maximális pontszámot kapjon.

II. A

13. a)		
$f(-2{,}85) = 2 - \lvert -2{,}85 \rvert =$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$= -0{,}85$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. b)		
		*A függvény helyes ábrázolásáért összesen 3 pont jár.*
Abszolútérték-függvényt ábrázol, ahol a szárak meredeksége 1 illetve −1.	1 pont	
Az ábrázolt függvény értelmezési tartománya a $[-4;3]$ intervallum.	1 pont	
Az ábrázolt függvénynek a 0 helyen maximuma van, ennek értéke 2.	1 pont	
A függvény értékkészlete a $[-2;2]$ intervallum.	2 pont	*Ha a vizsgázó válasza hibás, de a megoldásból kiderül, hogy ismeri az értékkészlet fogalmát, akkor 1 pont jár.*
Összesen:	**5 pont**	

13. c)		
$\frac{1}{5} = 5^{-1}$	1 pont	
(Az 5 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért) $2 - \lvert x \rvert = -1$.	1 pont	
$\lvert x \rvert = 3$	1 pont	
$x_1 = 3$; $x_2 = -3$	1 pont	*Ha a vizsgázó csak az egyik gyököt találja meg, és azt ellenőrzi, akkor 1 pont jár.*
Ellenőrzés (mindkét gyökre).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a c) feladatot grafikus úton próbálja megoldani, de hibás grafikonból indul ki, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

14. a)

	Vércsoport			
	0	A	B	AB
Relatív gyakoriság	0,31	0,45	0,16	0,08

(táblázat fent)	3 pont	*0-1 helyes válasz 0 pont. 2 helyes válasz 1 pont. 3 helyes válasz 2 pont. 3-nál kevesebb helyes válasz esetén további 1 pont jár a vizsgázónak, ha a táblázatba írt négy szám összege 1.*
Összesen:	**3 pont**	

14. b) első megoldás

A 125 nullás vércsoportú közül $\binom{125}{2}(=7750)$ különböző módon választható ki kettő.	1 pont	
Két különböző Rh-faktorú nullás vércsoportú véradó $100\cdot 25\,(=2500)$ különböző módon választható ki.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $\dfrac{100\cdot 25}{\binom{125}{2}}\left(=\dfrac{2500}{7750}=\dfrac{10}{31}\right)$,	1 pont	
ennek két tizedesjegyre kerekített értéke 0,32.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. b) második megoldás

Annak a valószínűsége, hogy elsőre Rh-pozitív mintát és másodikra Rh-negatív mintát választunk: $\dfrac{100\cdot 25}{125\cdot 124}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy elsőre Rh-negatív mintát és másodikra Rh-pozitív mintát választunk: $\dfrac{25\cdot 100}{125\cdot 124}$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség ezek összege,	1 pont	
amelynek két tizedes jegyre kerekített értéke 0,32.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

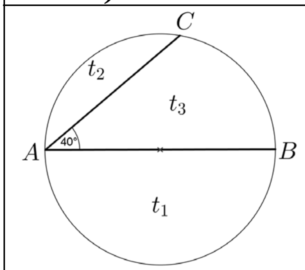
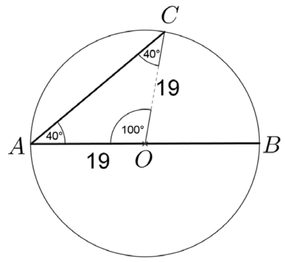
Megjegyzés: Ha a tanuló visszatevéses mintavétellel számol, és a választott modellben jól dolgozik $\left(p=\dfrac{2\cdot 100\cdot 25}{125\cdot 125}=0{,}32\right)$*, akkor 2 pontot kapjon.*

14. c)

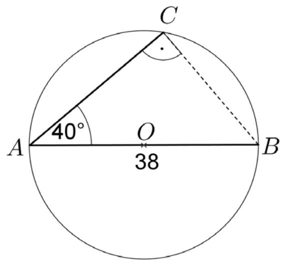
	Helyes-e a diagramon megadott érték? (igen-nem)	Ha a diagramon megadott érték nem helyes, akkor a helyes érték ennyi
Az Rh-pozitív vércsoportúak százalékos aránya	nem	81,25 %
Az Rh-negatív vércsoportúak százalékos aránya	igen	–
Az Rh-pozitív vércsoportúakat szemléltető körcikk középponti szöge	igen	
Az Rh-negatív vércsoportúakat szemléltető körcikk középponti szöge	nem	67,5°

(táblázat fent)	1-1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. a)

 A félkör (a t_1 jelű rész) területe: $\frac{19^2\pi}{2} \approx$	1 pont	*Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.*
$\approx 567\ \text{m}^2$.	1 pont	
 (Az *AOC* háromszög egyenlőszárú, így) az *AC* szakaszhoz tartozó középponti szög 100°.	1 pont	
A 100º-os középponti szögű *AOC* körcikk területe: $\frac{19^2\pi\cdot 100°}{360°}$ ($\approx 315\ \text{m}^2$).	1 pont	*A 80º-os középponti szögű BOC körcikk területe:* $\frac{19^2\pi\cdot 80°}{360°}$ *($\approx 252\ m^2$).*
Az *AOC* háromszög területe: $\frac{19^2\cdot\sin 100°}{2}$ ($\approx 178\ \text{m}^2$).	1 pont	*Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.*

A körszelet területe a körcikk és a háromszög területének a különbsége.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Így a t_2-vel jelölt területrész: (315 − 178 =) 137 m^2,	1 pont	$t_3 = 252 + 178 = 430\ m^2$
a t_3-mal jelölt területrész: 567 − 137 = 430 m^2 területű.	1 pont	$t_2 = 567 - 430 = 137\ m^2$
Összesen:	**8 pont**	

15. b)		
 (A Thalész-tétel miatt) az ABC háromszög derékszögű.	1 pont	
$\sin 40° = \frac{BC}{38}$	1 pont	
$BC = 38 \cdot \sin 40°$	1 pont	
$BC \approx 24{,}4$ m.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az egész feladat megoldása során valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

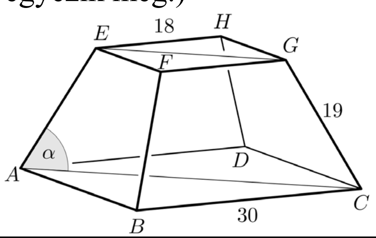
II. B

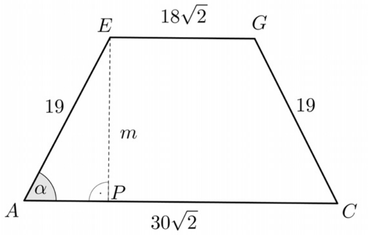
16. a)		
Az egymás mögött lévő sorokban található ülőhelyek száma egy olyan számtani sorozat szomszédos tagjai, melynek első tagja $a_1 = 60$ és különbsége $d = 6$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
A sorozat 17. tagja $a_{17} = a_1 + 16d =$	1 pont	
$= 156$. (A 17. sorban 156 ülőhely van.)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b)		
$6786 = \dfrac{2 \cdot 60 + (n-1) \cdot 6}{2} \cdot n$	1 pont	*Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.*
$6n^2 + 114n - 13572 = 0$	2 pont	*Nem bontható.*
$n_1 = 39$	1 pont	
$n_2 (= -58) < 0$, ez nem felel meg a feladat szövegének.	1 pont	
39 sor van a színház nézőterén.	1 pont	
Ellenőrzés: $S_{39} = 6786$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

16. c)		
$6786 = \dfrac{60 \cdot (1{,}1^n - 1)}{1{,}1 - 1}$	1 pont	*Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.*
$1{,}1^n = 12{,}31$	2 pont	*Nem bontható.*
$n = \dfrac{\lg 12{,}31}{\lg 1{,}1}$	2 pont	$n = \log_{1,1} 12{,}31$
$n \approx 26{,}34$	1 pont	
(Mivel a sorozat minden tagja pozitív, ezért) legalább az első 27 tagot kell összeadni, hogy elérjük a 6786-ot.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megoldása során egyenlőtlenséggel számol egyenlet (egyenlőség) helyett, akkor a megfelelő pontok járnak.
Ha a vizsgázó kiszámolja a sorozat első 27 tagját és ez alapján jó választ ad, akkor jár a 7 pont.

17. a)		
(Az oldaléleknek az alaplappal bezárt szöge az $ACGE$ húrtrapéz hosszabbik alapján fekvő szögével egyezik meg.) 	2 pont	*Ez a 2 pont a kérdéses szög ismeretéért (akár ábra nélkül is) jár.*

Az *ACGE* húrtrapéz alapjainak hossza $30\sqrt{2}$, illetve $18\sqrt{2}$.	2 pont	
A trapéz magasságát az *E* csúcsból megrajzolva kapjuk az *APE* derékszögű háromszöget. 	1 pont	
Ebben a háromszögben $AP = 6\sqrt{2}$.	1 pont	
Tehát $\cos\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{19}$ (≈ 0,4466).	1 pont	
Az oldalél és az alaplap szöge: $\alpha \approx 63{,}5°$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

17. b)		
A csonkagúla magassága Pitagorasz-tétellel vagy szögfüggvénnyel számítható ki.	1 pont	*Ez a pont a megfelelő egyenlet felírásáért jár.*
$m = 17$ (cm).	1 pont	
$V = \frac{17}{3} \cdot (30^2 + 30 \cdot 18 + 18^2) =$	1 pont	*Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó a megfelelő képletbe jól helyettesít.*
= 9996 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Helyes gondolatmenettel és jó kerekítésekkel kapott egyéb részeredmények és végeredmény is elfogadható.

17. c)		
Az eredeti gráfban minden csúcsot még négy másikkal kell összekötni.	1 pont	
Ez összesen 32 behúzandó élt jelentene,	1 pont	
de így minden élt kétszer számolunk.	2 pont	
Tehát még 16 élt kell berajzolni.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó berajzolja az ábrába a hiányzó éleket, és azokat megszámolva eredményül 16-ot kap, akkor jár az 5 pont. Ha a vizsgázó ábra alapján válaszol, akkor minden hiányzó vagy feleslegesen berajzolt élért 1 pont levonás jár.
Ha a vizsgázó ábra alapján válaszol, és a válasz nincs összhangban az ábrával, akkor (további) 1 pontot veszítsen.
(A megoldásra adott összpontszám nem lehet negatív.)

18. a)

A vizsgázó tudja, hogy egy mennyiség 2,4%-kal megnövelt értékét 1,024-del való szorzással kapjuk.	1 pont	
A vizsgázó tudja, hogy egy mennyiség 3,8%-kal (4,7%-kal) csökkentett értékét 0,962-del (0,953-del) való szorzással kapjuk.	1 pont	
Győr-Moson-Sopron megye népessége 2001-ben: $449:1{,}024\approx 438$ (ezer fő). Vas megye népessége 2001-ben: $258:0{,}962\approx 268$ (ezer fő). Zala megye népessége 2001-ben $283:0{,}953\approx 297$ (ezer fő).	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, kettő vagy több hiba esetén 0 pont jár.*
2001-ben a teljes régió népessége: 1003 ezer fő, 2011-ben a teljes régió népessége: 990 ezer fő.	1 pont	
$\frac{990}{1003}\cdot 100\approx 98{,}7$	1 pont	
A régió népessége 2001 és 2011 között 1,3%-kal csökkent.	2 pont	*Ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.*
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Helyes gondolatmenettel és jó kerekítésekkel kapott egyéb részeredmények és végeredmény is elfogadható.

18. b)

Ha x ezer férfi él Budapesten, akkor $1{,}21x$ ezer nő, és ha y ezer férfi él Pest megyében, akkor $1{,}084y$ ezer nő.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Így a táblázat adatai alapján $x+1{,}21x=1737$.	1 pont	
Ebből $x\approx 786$ (ezer férfi).	1 pont	
A nők száma Budapesten körülbelül $1737-786=951$ (ezer fő).	1 pont	
A Pest megyei adatok alapján: $y+1{,}084y=1223$.	1 pont	
Ebből $y\approx 587$ (ezer férfi).	1 pont	
A nők száma Pest megyében körülbelül $1223-587=636$ (ezer fő).	1 pont	
A nők és férfiak számának aránya a régióban: $\frac{951+636}{786+587}\approx 1{,}156$,	1 pont	
tehát 1000 férfira körülbelül 1156 nő jut a teljes régiót tekintve.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	