

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. május 9.

MATEMATIKA

**KÖZÉPSZINTŰ
ÍRÁSBELI VIZSGA**

**JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ**

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott* kipipálás
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, ha csak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

18. c) első megoldás		
Ha az első részgolyót az első helyen töltjük a csőbe, akkor a második részgolyó 8 helyre kerülhet.	1 pont	
Hasonlóan, ha az első részgolyót a 2., 3., ..., 8. helyen töltjük a csőbe, akkor a második részgolyó rendre 7, 6, ..., 1 különböző helyre kerülhet.	2 pont	
A lehetséges elrendezések száma ezek összege,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
vagyis $(8 + 7 + \dots + 1 =) 36$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

18. c) második megoldás		
A megfelelő sorrendek száma egyenlő a lehetséges, illetve a nem megfelelő sorrendek számának különbségével.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A lehetséges különböző sorrendek száma (ahányféleképpen a két részgolyó helyét kiválaszthatjuk a 10 helyből): $\binom{10}{2} =$	1 pont	
$= 45$.	1 pont	
Ha a két részgolyót egymás mellé tesszük, akkor 9 „helyre” kerülhetnek a csőben.	1 pont	
$45 - 9 = 36$ esetben nincs a két részgolyó egymás mellett.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

18. c) harmadik megoldás		
A 8 részgolyó 9 lehetséges, nem szomszédos helyet jelöl ki a részgolyóknak.	2 pont	
Ebből a 9 helyből kettőt kell kiválasztanunk.	1 pont	
Ezt $\binom{9}{2} =$	1 pont	
$= 36$ -féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

18. d)		
Annak a valószínűsége, hogy egy mérés sikeres lesz: $1 - 0,06 = 0,94$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
(A mérések függetlenek, így) annak a valószínűsége, hogy mind a 40 mérés sikeres lesz: $0,94^{40} \approx$	1 pont	
$\approx 0,084$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
- Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytablázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ($\sin$, $\cos$, $\lg$, $\log$ és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
- Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
- Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százlékban megadott helyes válasz is elfogadható.
- Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
- A **vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$x_1 = -2$	1 pont	
$x_2 = 0$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

2.		
$(23 + 19 - 29 =)$ 13 diák menne szívesen mindkét fesztiválra.	2 pont	
Összesen:	2 pont	

3.		
10111	2 pont	
Összesen:	2 pont	

4.		
Összesen $2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 14$ kézfogást jegyeztünk fel,	1 pont	<i>Ez a 2 pont jár egy megfelelő gráf felrajzolásáért is.</i>
de így minden kézfogást kétszer számoltunk.	1 pont	
Tehát a kézfogások száma 7.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

5.		
$x = 16$	2 pont	
Összesen:	2 pont	

6.		
$x = -1$	2 pont	
Összesen:	2 pont	

7.		
C	2 pont	
Összesen:	2 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a helyes válasz mellett egy rosszat is megjelöl, akkor 1 pontot kapjon.

18. a)		
(Minden értéket $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ -ben mérve) a nyolc érték átlaga 9,85,	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó közvetlenül a szórás számolási számológéppel.</i>
szórása $\sqrt{\frac{0,05^2 + 0,1^2 + 0,15^2 + 0^2 + 0,05^2 + 0,1^2 + 0,1^2 + 0,05^2}{8}} =$ $= \sqrt{\frac{0,06}{8}} = \sqrt{0,0075} \approx$ $\approx 0,087,$	1 pont	
ami kisebb 0,1-nél, tehát a mérés jónak számít.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

18. b)		
Az átlagot súlyozott számtani középpel számoljuk.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$\frac{2 \cdot 9,7 + 7 \cdot 9,75 + 10 \cdot 9,8 + 8 \cdot 9,85 + 7 \cdot 9,9 + 6 \cdot 9,95}{40} \approx$	1 pont	
$\approx 9,84 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$	1 pont	
Nagyság szerinti sorrendben a 20. és 21. mérési eredmény $9,85 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,	1 pont	
így a medián $9,85 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

17. b) második megoldás		
Az autó ($25 \cdot 1,6 =$) 40 kilométert tesz meg 3,8 liter benzinnel.	1 pont	
A 100 km a 40 km-nek a 2,5-szerese,	1 pont	
így az átlagos fogyasztás $2,5 \cdot 3,8 = 9,5$ liter 100 kilométeren.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

17. c)		
(Ha az első nap megtett út x mérföld, akkor) $186 = x \cdot 0,9^6$.	2 pont	
$x = \frac{186}{0,9^6} \approx 350$ mérföldet tett meg Kovács úr az első napon.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó minden napra (megfelelő kerekítéssel) felírja a megtett út hosszát, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

17. d)		
A rendszámok 10^4 -féle számnégyesre végződhetnek.	1 pont	
A számjegyek $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 (= 5040)$ esetben lesznek különbözők.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott rendszámotlán a számjegyek különbözők: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0,504$.	1 pont	
Az azonos számjegyeket tartalmazó rendszám kiválasztásának valószínűsége $1 - 0,504 = 0,496$.	1 pont	$0,504 > 0,5$
Tehát nagyobb annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott rendszámotlán különböző számjegyekből áll, mint annak a valószínűsége, hogy tartalmaz azonos számjegyeket.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

8.		
A hasáb alaplappja egy szabályos háromszög, melynek területe $\frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} (= 4 \cdot \sqrt{3} \approx 6,93 \text{ cm}^2)$.	2 pont	
A hasáb térfogata $4 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \approx$	1 pont	
$\approx 27,7 \text{ cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

9.		
$x \geq -1,6$	2 pont	
Összesen:	2 pont	

10.		
A: igaz B: hamis C: igaz	2 pont	Két jó válasz esetén 1, egy jó válasz esetén 0 pont jár.
Összesen:	2 pont	

11.		
$A \cap B \cap C = \{d; e; f\}$	2 pont	
$(A \cup B) \setminus C = \{a; b; h\}$	2 pont	
Összesen:	4 pont	

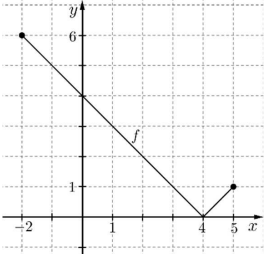
12.		
Két kockával dobva a lehetséges kimenetek száma 36 (összes eset).	1 pont	
A dobott számok szorzata egyféleképpen lehet 9 ($3 \cdot 3$).	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{1}{36} (= 0,02\bar{7})$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

II. A

13. a) első megoldás		
Az első egyenletből $y = 1 - 3x$,	1 pont	A második egyenletből $x = 12 - 2y$.
ezt a második egyenletbe helyettesítve: $x + 2 - 6x = 12$.	1 pont	$36 - 6y + y = 1$
Ebből $x = -2$,	1 pont	
és $y = 7$.	1 pont	
Ellenőrzés (például mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	5 pont	

13. a) második megoldás		
Az első egyenlet kétszereséből a második egyenletet kivonva: $5x = -10$.	2 pont	Az első egyenletből a második egyenlet háromszorosát kivonva: $-5y = -35$.
Ebből $x = -2$,	1 pont	
és $y = 7$.	1 pont	
Ellenőrzés (például mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	5 pont	

13. b)		
$2 \cdot 5^x + 3 \cdot 5 \cdot 5^x = 425$	1 pont	
Összevonás után $17 \cdot 5^x = 425$,	1 pont	
amiből $5^x = 25$.	1 pont	
(Az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $x = 2$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

14. a)		
A függvény grafikonja az abszolútérték-függvény grafikonjából származik,	1 pont	
minimuma az $x = 4$ helyen 0,	1 pont	
és a megadott halmazra van szűkítve.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

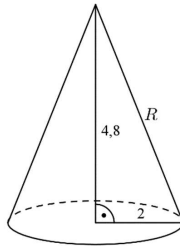
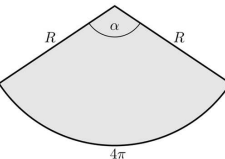
16. c)		
A szemek mérete 6-féle lehet.	1 pont	
(Jelöljük a gombokat a legkisebttől a legnagyobbig az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal.) Ha a 4-es számú van felül, akkor egyetlen lehetőség van (4-5-6). Ha a 3-as számú van felül, akkor 3 lehetőség van (3-4-5; 3-4-6; 3-5-6). Ezekhez hasonlóan, ha a 2-es számú gomb van felül, akkor 6 lehetőség van. Ha a legkisebb gomb van felül, az további 10 lehetőséget jelent.	1 pont	A három kabátgomb mérete $\binom{6}{3} (= 20)$ -féleképpen választható ki.
Összesen: $1 + 3 + 6 + 10 = 20$ különböző lehetőség van a gombok felvarrására.	1 pont	
Édesanya $6 \cdot 20 = 120$ -féle különböző tervet készíthet.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

17. a)		
Az első órában 70, a második órában 120 km-t tett meg az autó,	1 pont	
ehhez összesen $\frac{70}{100} \cdot 6 + \frac{120}{100} \cdot 8,5 =$	1 pont	
$= 4,2 + 10,2$ liter benzint fogyasztott.	1 pont	
Összesen tehát 190 km-t tett meg, amihez összesen 14,4 liter benzint fogyasztott.	1 pont	
Így a teljes úton az átlagfogyasztás $\frac{14,4}{190} \cdot 100 \approx$	1 pont	
$\approx 7,6$ liter (100 kilométerenként).	1 pont	Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.
Összesen:	6 pont	

17. b) első megoldás		
Az autó $(25 \cdot 1,6 =)$ 40 kilométert tesz meg 3,8 liter benzinnel.	1 pont	
Az átlagos fogyasztás $\frac{3,8}{40} \cdot 100 =$	1 pont	
$= 9,5$ liter 100 kilométeren.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

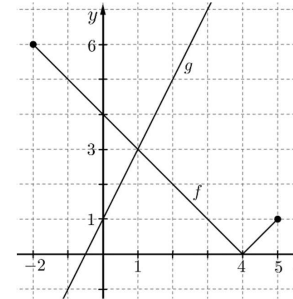
II. B

16. a)		
Az egyik gömb sugara 10 cm, a másiké 8 cm.	1 pont	
A gömbök térfogata $\frac{4}{3} \cdot 10^3 \cdot \pi \approx 4189 \text{ (cm}^3\text{)},$ illetve $\frac{4}{3} \cdot 8^3 \cdot \pi \approx 2145 \text{ (cm}^3\text{)},$ összesen kb. 6334 (cm ³).	1 pont	
Ez a tömörítetlen töltőanyag térfogatának 80%-a,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
így a tömörítetlen térfogat $\frac{6334}{80} \cdot 100 \approx 7918 \text{ (cm}^3\text{)},$ ami kb. 7,9 liter.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

16. b)		
 A körcikk R sugara a kúp alkotójával egyezik meg,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
aminek hossza $R = \sqrt{2^2 + 4,8^2} = 5,2 \text{ (cm)}.$	1 pont	
A körcikk ívének hossza a kúp alapkörének kerületével egyenlő, ami $2 \cdot 2 \cdot \pi (\approx 12,57 \text{ cm}).$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
 A körcikk középponti szögét fokban mérve jelölje α, ekkor $4\pi = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2R\pi$,	1 pont	$\alpha = \frac{4\pi}{5,2} \text{ radián} =$
amiből $\alpha = \frac{2 \cdot 360^\circ}{5,2} \approx 138,5^\circ.$	1 pont	$\frac{4}{5,2} \cdot 180^\circ \approx 138,5^\circ$
Összesen:	6 pont	

14. b) első megoldás

Ábrázolva a g függvényt ugyanabban a koordináta-rendszerben:



A metszéspont első koordinátája az ábráról leolvastva $x = 1.$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel: $f(1) = g(1) = 3.$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

14. b) második megoldás

(Megoldandó az $ x - 4 = 2x + 1$ egyenlet.) ($-2 \leq x < 4$ esetén:) $-x + 4 = 2x + 1$,	1 pont	
amiből $x = 1$, és ez (például behelyettesítéssel ellenőrizve) valóban megoldás.	1 pont	
($4 \leq x \leq 5$ esetén:) $x - 4 = 2x + 1$,	1 pont	
amiből $x = -5$, de ez nem megoldása a feladatnak.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

14. c) első megoldás

Az összeadott számok egy olyan számtani sorozat első 46 tagját képezik,	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
melynek első tagja az eredeti sorozat 5. tagjával egyenlő, és differenciája 2.	1 pont	
Az eredeti sorozat 5. tagja: $(3 + 4 \cdot 2 =) 11.$	1 pont	
A kérdéses összeg: $\frac{2 \cdot 11 + 45 \cdot 2}{2} \cdot 46 =$	1 pont	
$= 2576.$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

14. c) második megoldás		
A sorozat első 50 tagjának összege: $\frac{2 \cdot 3 + 49 \cdot 2}{2} \cdot 50 =$	1 pont	
$= 2600.$	1 pont	
Az első négy tag összege: ($3 + 5 + 7 + 9 =$) 24.	1 pont	
A kérdéses összeg e két összeg különbsége, azaz $2600 - 24 =$	1 pont	
$= 2576.$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat tagjainak felsorolásával és összeadásával adja meg jól a választ, akkor teljes pontszámot kapjon.

15. a) első megoldás		
AC oldal felezőpontja (3,5; -6),	1 pont	
BC oldal felezőpontja (8,5; 6).	1 pont	
A kérdéses középvonal hossza $\sqrt{(8,5 - 3,5)^2 + (6 - (-6))^2} =$	1 pont	
$= 13.$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

15. a) második megoldás		
Az AB oldal hossza $\sqrt{(6 - (-4))^2 + (14 - (-10))^2} =$	1 pont	
$= 26.$	1 pont	
A középvonal hossza a vele párhuzamos oldal hosszának felével egyenlő,	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.
azaz 13.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

15. b)		
Az AB oldalhoz tartozó magasságvonal illeszkedik a C csúcsra, és merőleges az AB oldalra,	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.
így egy normálvektora az $\overrightarrow{AB}$ (10; 24).	2 pont	$\mathbf{n}(5; 12)$
A kérdéses egyenes (egyik) egyenlete $10x + 24y =$	1 pont	$5x + 12y =$
$= 62.$	1 pont	$= 31$
Összesen:	5 pont	

15. c) első megoldás		
$AB = \sqrt{(6 - (-4))^2 + (14 - (-10))^2} = 26$ $AC = \sqrt{(11 - (-4))^2 + (-2 - (-10))^2} = 17$ $BC = \sqrt{(11 - 6)^2 + (-2 - 14)^2} = \sqrt{281} (\approx 16,76)$	2 pont	
A kért szöget α -val jelölve, majd az ABC háromszög BC oldalára a koszinusztételt felírva: $281 = 289 + 676 - 2 \cdot 17 \cdot 26 \cdot \cos \alpha$	1 pont	
Ebből $\cos \alpha \approx 0,7738,$	1 pont	
így $\alpha \approx 39,3^\circ.$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. c) második megoldás		
Az A csúcsnál lévő belső szög az AB és az AC oldal-egyenesek irányszögének különbsége.	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.
(Az AB oldalegyenes irányszögét δ -val jelölve) $\text{tg } \delta = 2,4.$	1 pont	
(Az AC oldalegyenes irányszögét ε -nal jelölve) $\text{tg } \varepsilon = \frac{8}{15}.$	1 pont	
$\delta \approx 67,38^\circ, \varepsilon \approx 28,07^\circ$	1 pont	
Így $\alpha = \delta - \varepsilon \approx 39,3^\circ.$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. c) harmadik megoldás		
A kért szöget bezáró két oldalvektor: $\overrightarrow{AB}(10; 24)$ és $\overrightarrow{AC}(15; 8).$	1 pont	
A két vektor skaláris szorzata egyrészt $10 \cdot 15 + 24 \cdot 8 = 342,$	1 pont	
másképpen $26 \cdot 17 \cdot \cos \alpha.$	1 pont	
Ebből $\cos \alpha \approx 0,7738,$	1 pont	
így $\alpha \approx 39,3^\circ.$	1 pont	
Összesen:	5 pont	