ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. október 17.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$\left(\dfrac{5^2\pi\cdot 9}{3}=\right)75\pi\ \text{cm}^3\approx 235{,}6\ \text{cm}^3$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$A=\{1;2;3;4;6;12\}$	1 pont	
$B=\{2;3;5;7;11;13\}$	1 pont	
$A\setminus B=\{1;4;6;12\}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
$x=21$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
18	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
A számjegyek összege $22+2c$.	1 pont	
Egy szám (pontosan) akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.	1 pont	*$22+2c$ értékének 3-mal oszthatónak kell lennie.*
Így c lehetséges értékei 1; 4; 7.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

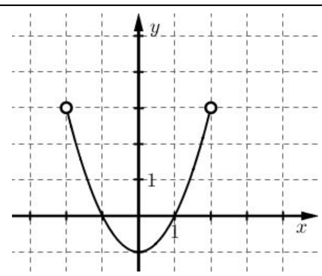
Megjegyzés: Ha a vizsgázó mind a tíz lehetséges számjegy kipróbálása után helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

6.		
$\left(\dfrac{8\cdot 7}{2}=\right)28$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A: igaz B: hamis C: igaz	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

8. első megoldás		
(Tekinthetjük a résztvevőket egy gráf csúcsainak, a koccintásokat a gráf éleinek.) Bármely gráfban a csúcsok fokszámának összege páros.	1 pont	
$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 6 + 6 = 23$	1 pont	
Ilyen gráf nincs, tehát nem lehetséges.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. második megoldás		
(Tekinthetjük a résztvevőket egy egyszerű gráf csúcsainak, a koccintásokat a gráf éleinek.) Mivel két csúcs fokszáma 6 (ezek minden más csúccsal össze vannak kötve), ezért nem lehet olyan csúcs, amelynek a fokszáma 1.	2 pont	
Ilyen gráf nincs, tehát nem lehetséges.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
[–1; 3[	3 pont	 *Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Az intervallum végpontjainak (–1 *és* 3) *helyes megadásáért 1-1 pont, a végpontok típusának helyes megadásáért további 1 pont jár.*

10.		
(Az adatok átlaga 2, szórása $\sqrt{\frac{2^2+1^2+0^2+1^2+2^2}{5}}$ =) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
$\frac{\pi}{3}$ és $\frac{5\pi}{3}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megoldását fokban (helyesen) adja meg, vagy ha nem az adott intervallumon oldja meg (helyesen) a $\cos x = \frac{1}{2}$ *egyenletet, akkor 1 pontot kapjon*

12. első megoldás		
Négyen 4! = 24-féle sorrendben ülhetnek le a padra (összes eset száma).	1 pont	
Az egyik szélső helyre négy személy közül, a mellette lévő helyre (az ellenkező neműek közül) két személy közül választhatunk. (Ezután a többi helyen ülők személye már meghatározott.) A kedvező esetek száma $4 \cdot 2 = 8$.	2 pont*	*ABCD, CBAD, ADCB, CDAB, BADC, DABC, BCDA, DCBA*
A kérdéses valószínűség $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A padon felváltva ülhetnek lányok és fiúk: LFLF vagy FLFL lehetséges.	1 pont	
A lányok és a fiúk is 2-2-féleképpen foglalhatnak helyet mindkét lány-fiú sorrend esetében, tehát a kedvező esetek száma $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.	1 pont	

12. második megoldás		
Csak a nemeket tekintve (például szemből nézve) négyen összesen $\binom{4}{2}$ = 6-féle sorrendben ülhetnek le (összes eset száma).	2 pont	*FFLL, FLFL, FLLF, LLFF, LFLF, LFFL (Ezek bekövetkezésének valószínűsége egyenlő.)*
Ebből kettő kedvező: a fiú-lány-fiú-lány és a lány-fiú-lány-fiú sorrend.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

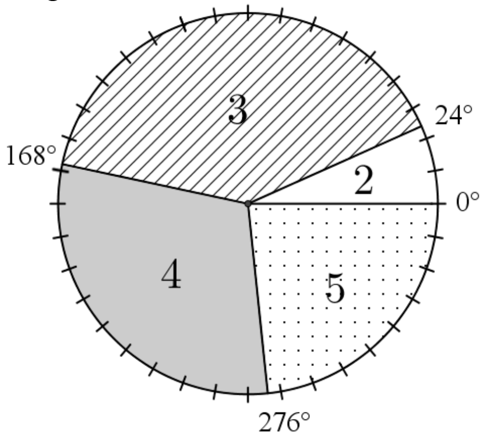
II. A

13. a) első megoldás		
A zárójelet felbontva: $4x^2 - 12x + 9 = x^2$.	1 pont	
Az egyenletet rendezve: $3x^2 - 12x + 9 = 0$.	1 pont	$x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_1 = 1$, $x_2 = 3$	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. a) második megoldás		
(Két esetre bontjuk az egyenlet megoldását.) Az első eset, amikor a két alap egyenlő: $2x - 3 = x$.	1 pont	
Ekkor $x = 3$.	1 pont	
A második eset, amikor a két alap egymás ellentettje: $2x - 3 = -x$.	1 pont	
Ekkor $x = 1$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	*Ez a pont csak akkor jár, ha a vizsgázó két gyököt kapott, és mindkettőt ellenőrzi.*
Összesen:	**5 pont**	

13. b)		
A kérdéses számok utolsó számjegye ötféle lehet (1, 3, 5, 7 vagy 9).	1 pont	
Az első számjegy nem lehet 0,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(és különböznie kell az utolsótól) így (az utolsó számjegy rögzítése után) nyolcféle lehet.	1 pont	
A második számjegy (amelynek különböznie kell az elsőtől és az utolsótól, azok rögzítése után) nyolcféle lehet.	1 pont	
A lehetőségek száma ezek szorzata, azaz $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. a)		
A jegyek átlaga $\frac{2 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 5}{30} =$	1 pont	
$= 3{,}7$.	1 pont	
A jegyek mediánja 4.	1 pont	
A jegyek módusza 3.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. b)		
1 főnek 12°-os középponti szög felel meg az ábrán. Az egyes osztályzatokhoz tartozó középponti szögek: 2-es: 24°; 3-as: 144°; 4-es: 108°; 5-ös: 84°.	2 pont	
Egy lehetséges ábrázolás: 	2 pont	*1 pont jár a megfelelő középponti szögű körcikkek berajzolásáért, és 1 pont jár az egyértelmű jelmagyarázatért.*
Összesen:	**4 pont**	

14. c) első megoldás		
A kedvező esetek száma $\binom{12}{2}$ (= 66).	1 pont	*A sorrendet is figyelembe véve:* $12 \cdot 11$
Az összes eset száma $\binom{30}{2}$ (= 435).	1 pont	$30 \cdot 29$
A kérdéses valószínűség ezek hányadosa: $\frac{66}{435}$,	1 pont	$\frac{132}{870}$
ami a kért kerekítéssel 0,152.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**4 pont**	

14. c) második megoldás		
Annak valószínűsége, hogy az elsőre kiválasztott dolgozat hármas: $\frac{12}{30}$.	1 pont	
(Ha az elsőre kiválasztott dolgozat hármas, akkor) annak valószínűsége, hogy a másodiknak kiválasztott dolgozat is hármas: $\frac{11}{29}$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség ezek szorzata: $\frac{132}{870}$,	1 pont	
ami a kért kerekítéssel 0,152.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**4 pont**	

15. a)		
Legyen $BAC\angle = \alpha$, ekkor $ACB\angle = 90° - \alpha$.	1 pont	*$BAC\angle$ és $ACD\angle$ váltószögek, tehát egyenlők.*
Mivel $BCD\angle = 90°$, ezért $ACD\angle = \alpha$ (és $ADC\angle = 90° - \alpha$).	1 pont	
A két háromszög szögei páronként egyenlők, így a két háromszög valóban hasonló.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. b) első megoldás		
$BAC\angle = \alpha$, ekkor $\cos\alpha = \frac{9}{15}$,	1 pont	
amiből $\alpha \approx 53{,}1°$,	1 pont	
így a trapéz A csúcsnál lévő szöge $\alpha + 90° \approx 143{,}1°$,	1 pont	
a D csúcsnál lévő szög pedig kb. $180° - 143{,}1° = 36{,}9°$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. b) második megoldás		
(Az ABC és a CAD háromszögek hasonlósága miatt) $ADC\angle = ACB\angle = \gamma$.	1 pont	
Ekkor $\sin\gamma = \frac{9}{15}$,	1 pont	
amiből a trapéz D csúcsnál lévő szöge $\gamma \approx 36{,}9°$,	1 pont	
az A csúcsnál lévő szög pedig kb. $180° - 36{,}9° = 143{,}1°$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. c) első megoldás		
A trapéz területének meghatározásához kiszámítjuk a CD alap és a BC oldal (a trapéz magassága) hosszát.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az ABC és CAD háromszögek hasonlósága miatt $\frac{CD}{15} = \frac{15}{9}$,	1 pont	
amiből $CD = 25$ (cm).	1 pont	
Az ABC derékszögű háromszögből (Pitagorasz-tétellel) $BC = \sqrt{15^2 - 9^2} =$	1 pont	
$= 12$ (cm).	1 pont	
Az $ABCD$ trapéz területe $\frac{25+9}{2} \cdot 12 =$	1 pont	
$= 204\ \text{cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. c) második megoldás		
Az ABC derékszögű háromszögből (Pitagorasz-tétellel) $BC = \sqrt{15^2 - 9^2} =$	1 pont	
$= 12$ (cm).	1 pont	
Az ABC háromszög területe $\frac{9 \cdot 12}{2} = 54$ (cm^2).	1 pont	
Az ABC és CAD háromszögek hasonlósága miatt $\frac{AD}{15} = \frac{12}{9}$,	1 pont*	
amiből $AD = 20$ (cm).	1 pont*	
Így az ACD háromszög területe $\frac{20 \cdot 15}{2} = 150$ (cm^2).	1 pont*	
A trapéz területe a két háromszög területének összege, vagyis 204 cm^2.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt* 3 *pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A CAD és ABC háromszögek hasonlóságának aránya (a megfelelő oldalak hosszának aránya) $15:9 = 5:3$.	1 pont	
A két háromszög területének aránya ennek négyzete, azaz $25:9$.	1 pont	
Így az ACD háromszög területe $\frac{25}{9} \cdot 54 = 150$ (cm^2).	1 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a b) feladatban kiszámolt szögekkel (kerekített értékekkel) helyesen számol, akkor teljes pontszámot kapjon.

II. B

16. a)		
$\frac{12000000}{7000000} \approx 1{,}714$	1 pont	
Kb. 71%-kal nőtt az előfizetések száma.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. b)		
Az eltelt évek száma: $x = 8$.	1 pont	
$51 \cdot 1{,}667^8 \approx$	1 pont	
$\approx$ 3 millió 41 ezer mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. c) első megoldás		
A hívások száma egyik hónapról a másikra 1,065-szeresére nőtt.	1 pont	
(Az 1991 januárja óta eltelt hónapok számát jelölje *n*.) $350000 \cdot 1{,}065^n = 100000000$	1 pont	
$n = \log_{1,065} \frac{100000000}{350000}$,	1 pont	$n = \frac{\lg \frac{100000000}{350000}}{\lg 1{,}065}$
amiből $n \approx 90$.	1 pont	
Az eltelt évek száma: $\frac{90}{12} = 7{,}5$.	1 pont	
Tehát 1998-ban lehetett az a hónap, amikor a mobilhívások száma először elérte az 100 milliót.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. c) második megoldás		
A hívások száma egyik hónapról a másikra 1,065-szeresére,	1 pont	
így egy év alatt $1{,}065^{12} \approx 2{,}13$-szorosára nőtt.	1 pont	
(Az 1991 januárja óta eltelt évek számát jelölje *m*.) $350000 \cdot 2{,}13^m = 100000000$	1 pont	
$m = \log_{2,13} \frac{100000000}{350000}$,	1 pont	$m = \frac{\lg \frac{100000000}{350000}}{\lg 2{,}13}$
amiből $m \approx 7{,}5$.	1 pont	
Tehát 1998-ban lehetett az a hónap, amikor a mobilhívások száma először elérte az 100 milliót.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések: 1. Ha a vizsgázó sorra helyesen felírja a havi mobilhívások számát az egyes évek végén, és ez alapján jól válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.
2. Ha a vizsgázó egyenlet helyett egyenlőtlenséggel dolgozik, akkor a megfelelő pontok járnak.

16. d)		
A megadott időszakban a vezetékes hívások száma mértani sorozatot alkot, melynek első tagja 4200 (millió darab),	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
hányadosa pedig $q = 0{,}92$.	1 pont	
$4200 \cdot 0{,}92^9 \approx$	1 pont	
≈ 1983 millió vezetékes hívást indítottak 2009-ben.	1 pont	
2000 eleje és 2009 vége között összesen $4200 \cdot \frac{0{,}92^{10} - 1}{0{,}92 - 1} \approx$	1 pont	
≈ 29 695 millió vezetékes hívást indítottak.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó mindkét válaszát „millió” nélkül adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

17. a) első megoldás		
Az ATC háromszög oldalainak hossza (a két pont távolságára vonatkozó képlet alapján): $AT=\sqrt{17}$, $CT=\sqrt{68}$, $AC=\sqrt{85}$.	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, kettő vagy több hiba esetén 0 pont jár.*
Mivel $(\sqrt{17})^2+(\sqrt{68})^2=(\sqrt{85})^2$ teljesül,	1 pont	
így (a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) a kérdéses szög valóban derékszög.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a) második megoldás		
$\overrightarrow{AT}(4;\ 1)$	1 pont	
$\overrightarrow{CT}(2;\ -8)$	1 pont	
A két vektor skaláris szorzata $4\cdot 2+1\cdot(-8)=0$,	1 pont	*$\overrightarrow{CT}$ az $\overrightarrow{AT}$ $-90°$-os elforgatottjának kétszerese.*
így a kérdéses szög valóban derékszög.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a) harmadik megoldás		
$\overrightarrow{AT}(4;\ 1)$	1 pont	
Ez a vektor az e egyenes egyik normálvektora,	2 pont	
így a kérdéses szög valóban derékszög.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

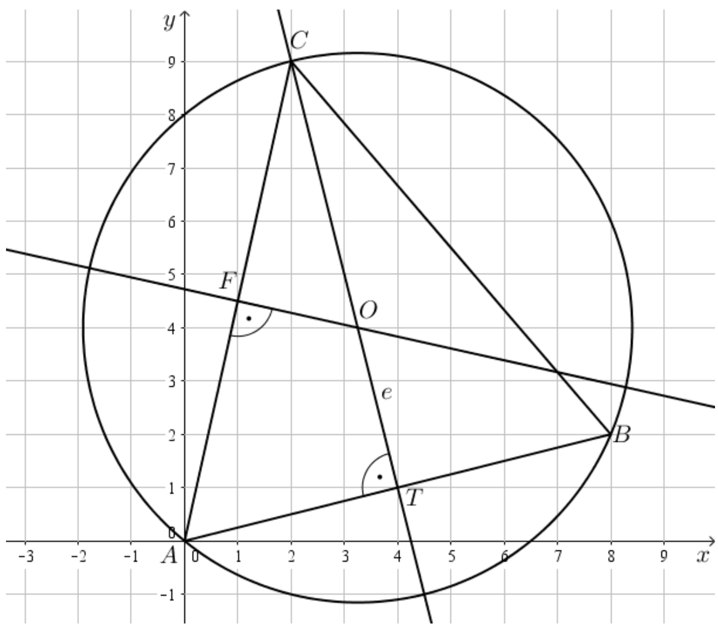
17. a) negyedik megoldás		
Az AC szakasz felezőpontja $F(1;\ 4,5)$.	1 pont	
Az F pont távolsága az A (illetve a C) ponttól $\sqrt{21,25}$,	1 pont	
ami megegyezik az F pont T ponttól mért távolságával,	1 pont	
így a Thalész-tétel miatt a kérdéses szög valóban derékszög.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b)		
Mivel az ATC szög derékszög, ezért az A pontból az e egyenesre bocsátott merőleges talppontja a T pont,	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
ezért a T pont felezi az AB szakaszt.	1 pont	
Így $B(b_1;\ b_2)$ koordinátáira $\frac{0+b_1}{2}=4$ és $\frac{0+b_2}{2}=1$, azaz $b_1=8$ és $b_2=2$. (Tehát $B(8;\ 2)$.)	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó egy ábra alapján helyesen leolvassa a B pont koordinátáit, akkor ezért 2 pontot kapjon. Ha igazolja, hogy az AB szakasz felezőpontja a T pont, akkor ezért további 2 pont jár.
2. Az AT egyenes egyenletének ($x = 4y$) felírásáért 1 pont, a T középpontú, AT sugarú kör egyenletének felírásáért ($(x-4)^2+(y-1)^2=17$) 1 pont, az egyenes és a kör A-tól különböző metszéspontjának meghatározásáért pedig további 2 pont jár.

17. c)		
Az ABC háromszög körülírt körének középpontja az e egyenesnek és az AC szakasz f felezőmerőlegesének metszéspontja.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Jelölje F az AC szakasz felezőpontját. Ekkor $F(1; 4{,}5)$.	1 pont	*BC felezőpontja $G(5; 5{,}5)$.*
Az f egyenes egy normálvektora: $\overrightarrow{AC}(2; 9)$.	1 pont	$\overrightarrow{BC}(-6; 7)$
f egyenlete: $2x + 9y = 42{,}5$.	2 pont	*BC felezőmerőlegese:* $-6x + 7y = 8{,}5$.
A kör középpontjának (x, y) koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldása adja: $\begin{cases} 2x+9y=42{,}5 \\ 4x+y=17 \end{cases}$.	1 pont	
Az első egyenlet 2-szereséből kivonva a második egyenletet: $17y = 68$,	1 pont	
amiből $y = 4$, majd $x = 3{,}25$. (Tehát a körülírt kör középpontja: $O(3{,}25; 4)$.)	2 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a keresett kör egyenletét egy háromismeretlenes másodfokú egyenletrendszer megoldásaként keresi, akkor az egyenletrendszer helyes felírásáért 2 pontot kapjon. Az ebből kapható lineáris egyenletrendszer helyes felírásáért további 4 pont jár.



18. a)		
A terv szerint az egyes feladatokra szánt időtartamok olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1 (perc), és az első 25 tagjának összege 75 (perc).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A sorozat különbségét d-vel jelölve az adatok alapján felírható: $\frac{2\cdot 1+24d}{2}\cdot 25=75$.	1 pont	
Ebből $d=\frac{1}{6}$ (perc).	2 pont	
A számtani sorozat első 21 tagjának összege: $\frac{2\cdot 1+20\cdot\frac{1}{6}}{2}\cdot 21=$	1 pont*	
$=56$.	1 pont*	
Így az utolsó 4 feladatra összesen (75 – 56 =) 19 percet szán Vera a terv szerint.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó helyesen kiszámítja, hogy a terv szerint mennyi idő jut a 22., 23., 24. és 25. feladatra (ezek rendre* $4\frac{3}{6}$, $4\frac{4}{6}$, $4\frac{5}{6}$ *és* 5 *perc).*

18. b) első megoldás		
Vera esetében $F=25$, $H+R=22$.	1 pont	
A helyes válaszok számát x-szel jelölve felírható a következő egyenlet: $4x-(22-x)+25=93$.	2 pont	
Ebből $x=18$, tehát Vera 18 helyes választ adott.	1 pont	
Ellenőrzés: $4\cdot 18-4+25=93$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b) második megoldás		
Ha minden feladat esetében az adható pontszámot 1-gyel megnöveljük, akkor a helyes válaszokért 5 pont, a rossz válaszokért 0 pont, a kihagyott feladatokért pedig 1 pont jár.	2 pont	
Így a szerzett pontokra alkalmazható az $5H+K$ képlet, ahol K a kihagyott feladatok számát jelöli.	1 pont	
Mivel Vera esetében $K=3$, azaz $5H=90$,	1 pont	
így Vera 18 helyes választ adott.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. c) **első megoldás**		
Jelölje x azoknak a diákoknak a számát, akik megoldották a 24-es illetve a 25-ös feladatot, illetve azok számát, akik egyik feladatot sem tudták megoldani.	1 pont	*Jelölje y azok számát, akik csak a 24-es, illetve csak a 25-ös feladatot oldották meg.*
Csak a 24-es feladatot $x - 1$, csak a 25-ös feladatot szintén $x - 1$ tanuló oldotta meg.	1 pont	$y + 1$ *tanuló nem oldotta meg egyik feladatot sem.*
A feladat szövege alapján $2(x - 1) + 1 + x = 11$,	1 pont	$2y + (y + 1) + 1 = 11$
amiből $x = 4$.	1 pont	$y = 3$
$(4 - 1 =)$ 3 olyan tanuló volt, aki a 24-es feladatot megoldotta, de a 25-öst nem.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. c) **második megoldás**		
Adjuk össze azok számát, akik a 24-es feladatot megoldották, akik a 25-ös feladatot megoldották, és akik egyiket sem oldották meg. Ekkor azt az egy diákot, aki mindkét feladatot megoldotta, kétszer számoljuk, vagyis a három szám összege 12.	2 pont	
Mivel a három összeadott szám egyenlő, így mindegyik 4.	2 pont	
$(4 - 1 =)$ 3 olyan tanuló volt, aki a 24-es feladatot megoldotta, de a 25-öst nem.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó módszeres próbálgatás után helyes választ ad, és megmutatja, hogy más megoldás nincs, akkor teljes pontszámot kapjon.