18. c) első megoldás		
Molnár úr háromféleképpen tud elsőre rossz kulcsot és másodikra jó kulcsot választani (kedvező esetek száma).	2 pont	
Összesen $4 \cdot 3 = 12$-féleképpen választhatja ki a két kulcsot.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. c) második megoldás		
$\frac{3}{4}$ annak a valószínűsége, hogy az első kulcs nem nyitja a zárat.	1 pont	
$\frac{1}{3}$ annak a valószínűsége, hogy a második kulcs nyitja a zárat.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. c) harmadik megoldás		
A négy kulcs kipróbálása $4! = 24$-féle sorrendben lehetséges (összes eset száma).	1 pont	
Ezek között $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ olyan van, amelyikben a másodiknak próbált kulcs a megfelelő (kedvező esetek száma).	2 pont	
A keresett valószínűség $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó arra hivatkozik, hogy a jó kulcs bármelyik próbálkozásnál ugyanakkora valószínűséggel kerül Molnár úr kezébe, és így (mivel a négy esemény egymást kizáró és egyenlően valószínű) mindegyik valószínűsége $\frac{1}{4}$*, akkor a teljes pontszám jár.*

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. október 16.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

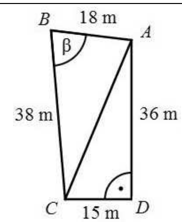
1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

17. d)		
A legmagasabb lehetséges átlagot akkor kapjuk, ha az egyes osztályközök felső határával számolunk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Így a pontszámok átlagának lehetséges maximuma: $\frac{1}{100}\cdot(30\cdot8+40\cdot12+50\cdot8+60\cdot18+70\cdot20+$ $+80\cdot12+90\cdot16+100\cdot6)=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az átlagot számológéppel helyesen határozza meg.*
$=66.$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. a)		
5 évi kamatos kamatot számolva: $8\,115\,000 = 7\,000\,000\cdot x^5$	1 pont	
$x\left(=\sqrt[5]{\frac{8115}{7000}}\right)\approx 1{,}03$	2 pont	
Kb. 3 százalékos kamatot fizetett a bank.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)		
 (Az ACD háromszögben Pitagorasz-tétellel:) $AC=\sqrt{36^2+15^2}=39$ (m).	1 pont	
(Az ABC háromszögben felírva a koszinusztételt:) $39^2=18^2+38^2-2\cdot18\cdot38\cdot\cos\beta$.	1 pont	
Innen $\cos\beta=\frac{13}{72}$ ($\approx 0{,}1806$),	1 pont	
amiből $\beta=79{,}6°$.	1 pont	
Az ACD háromszög területe $\frac{36\cdot15}{2}=270$ (m^2).	1 pont	
Az ABC háromszög területe $\frac{18\cdot38\cdot\sin79{,}6°}{2}\approx 336{,}4$ (m^2).	1 pont	*Héron-képlettel* $\sqrt{47{,}5\cdot8{,}5\cdot9{,}5\cdot29{,}5}\approx$ $\approx 336{,}4$ (m^2).
A vásárolt telek területe (270 + 336,4 =) 606,4 (m^2).	1 pont	
A beépíthető terület $606{,}4\cdot0{,}2\approx$	1 pont	
≈ 121 m^2.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

A folyadék térfogata összesen $49{,}5 + 5{,}9 = 55{,}4\ \text{cm}^3$,	1 pont	
így az üvegben kezdetben 55,4 ml vitaminoldat van.	1 pont	
Ez $55{,}4 \cdot 20 \approx 1108$ csepp,	1 pont	
ami $\frac{1108}{50} \approx 22$ napi adag.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Az utolsó 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó az egy napi vitaminadagnak a b) feladatban meghatározott térfogatával jól számol ($55{,}4 : 2{,}5 \approx 22$).

17. a)		
A kijelző átlója $5{,}4 \cdot 25{,}4 \approx 137{,}2$ mm.	1 pont	
(A kijelző oldalait milliméterben jelölje $16x$ és $9x$. A Pitagorasz-tétellel:) $(16x)^2 + (9x)^2 = 137{,}2^2$,	1 pont	
amiből $x \approx 7{,}47$.	2 pont	
A kijelző két oldala kb. 120 (mm) és 67 (mm).	1 pont	
Hozzáadva a szegélyeket, a telefon előlapjának oldalai 144 mm és 73 mm hosszúak.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**6 pont**	

17. b)		
Annak a valószínűsége, hogy valaki kikapcsolja a telefonját $(1 - 0{,}02 =)\,0{,}98$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy mindenki kikapcsolja a telefonját $0{,}98^{12}$ ($\approx 0{,}785$).	1 pont	
Így annak a valószínűsége, hogy legalább egy diák bekapcsolva felejti a telefonját $1 - 0{,}98^{12} \approx 0{,}215$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. c)		
Ha a két lány az első sorban ül le, akkor 3-féleképpen választhatnak két egymás melletti padot.	1 pont	
Ha a második vagy a harmadik sort választják, ott szintén 3-3-féleképpen választhatnak két padot. Ez összesen 9 lehetőség.	1 pont	
Mind a 9 esetben Tercsi és Julcsi kétféleképpen tud leülni a két székre, ez 18 lehetőség.	1 pont	
A többi 10 vizsgázó $10!(= 3\,628\,800)$-féleképpen tudja elfoglalni a maradék 10 széket.	1 pont	
Így összesen $(18 \cdot 10! =)$ 65 318 400-féleképpen tudnak leülni a vizsgázók úgy, hogy Julcsi és Tercsi két egymás melletti padban üljön.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

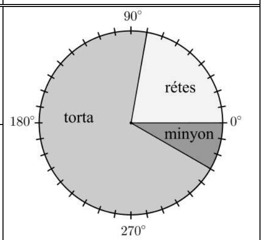
1.		
17	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$\frac{1}{4}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
12	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
Az x tengelyt 3-nál,	1 pont	*a (3; 0) pontban*
az y tengelyt 6-nál metszi a grafikon.	1 pont	*a (0; 6) pontban*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
A) hamis B) igaz C) igaz	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

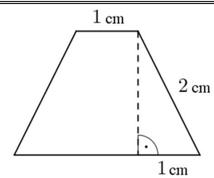
6.		
Összesen 144 sütemény van nyitáskor.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A diagramon egy süteményt $\frac{360}{144} = 2{,}5°$ nagyságú középponti szög jelöl.	1 pont	
Az egyes süteménytípusokhoz tartozó középponti szögek nagysága: rétes: 80°; torta: 250°; minyon: 30°.	1 pont	
Egyértelmű jelmagyarázat.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. B

16. a)		
A Cili által naponta megtett távolságok mértani sorozatot alkotnak, melynek első tagja $a_1 = 20$, hányadosa $q = 1{,}15$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha a Cili által megtett táv az n-edik napon érte el először az 1000 métert, akkor $a_n = 20 \cdot 1{,}15^{n-1} = 1000$.	1 pont	
(Mindkét oldalt 20-szal elosztva, és az oldalak logaritmusát véve) $\lg 1{,}15^{n-1} = \lg 50$.	1 pont	$n-1 = \log_{1,15} 50$
$(n-1) \cdot \lg 1{,}15 = \lg 50$	1 pont	
$n-1 = \frac{\lg 50}{\lg 1{,}15} \approx 27{,}99$, azaz $n \approx 29$.	1 pont	
A Cili a 29. napon mondhatta először, hogy aznap már 1000 métert sétált.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó észszerű és helyes kerekítésekkel felsorolja a sorozat tagjait, majd ezek alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár (például minden napi távolságot egészre kerekítve a helyes válasz a 30. nap).
2. Ha a vizsgázó egyenlet helyett egyenlőtlenséggel dolgozik, akkor a megfelelő pontok járnak.

16. b)		
Ha 20 csepp folyadék 1 ml, akkor a napi 50 csepp vitaminoldat térfogata 2,5 ml.	1 pont	
Ennek hatóanyag-tartalma $2{,}5 \cdot 100 = 250$ (mg).	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. c)		
A henger térfogata $1{,}5^2 \cdot \pi \cdot 7 \approx 49{,}5$ (cm³).	1 pont	
A csonkakúp magassága (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ (cm). 	2 pont	
A csonkakúp térfogata $\frac{1{,}73 \cdot (1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5 \cdot 0{,}5) \cdot \pi}{3} \approx$	1 pont	
$\approx 5{,}9$ (cm³).	1 pont	

15. a)		
$x \neq -2, x \neq 2$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
Közös nevezőre hozva: $\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{8}{(x+2)(x-2)}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az egyenlet mindkét oldalát megszorozza a közös nevezővel.*
$x(x-2) = 8$	1 pont	
Rendezve az egyenletet: $x^2 - 2x - 8 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet gyökei $x = 4$ és $x = -2$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az egyenlet értelmezési tartományán ekvivalenciára való hivatkozással: $x = -2$ nem megoldás, $x = 4$ megoldás.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

15. b)		
Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x > 0$ és $x + 2 < 0$,	1 pont	
vagy $x < 0$ és $x + 2 > 0$.	1 pont	
Az első feltételnek megfelelő valós szám nincs,	1 pont	
a második feltételből az egyenlőtlenség megoldása: $-2 < x < 0$ ($x \in \mathbf{R}$).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a 0*-t és/vagy a* (–2)*-t is elfogadja megoldásnak, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

15. c)		
Teljes négyzetté alakítással: $f(x) = (x-3)^2 - 4$.	2 pont*	*Az $x^2 - 6x + 5 = 0$ másodfokú egyenletet megoldva f zérushelyei: $x = 1$ és $x = 5$.*
A minimum helye: 3.	1 pont	*A minimum helye ezek számtani közepe:* 3.
A minimum értéke: –4.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó arra hivatkozik, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ másodfokú függvény minimuma az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen van.*

7.		
$A \cap B = [2; 8]$	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

8.		
C	2 pont	*Nem bontható.*
	2 pont	

9.		
[2; 4]	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
$\left(\binom{31}{2} =\right) 465$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
A sorozat differenciája ($d = a_5 - a_4 = 11 - 8 =$) 3.	1 pont	
Az első tag ($a_1 = a_4 - 3d = 8 - 3 \cdot 3 =$) –1.	1 pont	
Az első tíz tag összege $\left(\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n =\right) \frac{2 \cdot (-1) + 9 \cdot 3}{2} \cdot 10 =$	1 pont	$-1 + 2 + 5 + \ldots + 26 =$
= 125.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
Terjedelem: 0,6 (gramm).	1 pont	
Átlag: 15 (gramm).	1 pont	
Szórás: 0,2 (gramm).	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. A

13. a) első megoldás		
(A törtet $\frac{x}{y}$ alakban keressük.) A szöveg alapján: $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{11} \\ x = y - 119. \end{cases}$	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása (például a második egyenletet az elsőbe helyettesítve): $y = 187$, $x = 68$.	2 pont	
A keresett tört: $\frac{68}{187}$.	1 pont	
Ellenőrzés a szövegbe való behelyettesítéssel: a tört számlálója 119-cel kisebb a nevezőjénél, a tört értéke pedig valóban $\frac{4}{11}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. a) második megoldás		
A $\frac{4}{11}$ esetében a számláló 7-tel kisebb a nevezőnél.	1 pont	*Egyszerűsítés előtt a tört* $\frac{4n}{11n}$ $(n \neq 0)$.
Úgy kell bővítenünk a törtet, hogy a különbség 119 legyen. Tehát $\left(\frac{119}{7} = \right)$ 17-tel bővítünk.	2 pont	$11n - 4n = 119$, *amiből* $n = 17$.
Így a keresett tört: $\frac{68}{187}$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a $\frac{4}{11}$-et egész számokkal bővítve találja meg a helyes választ a vizsgázó, de nem indokolja, hogy más megoldás nincs, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

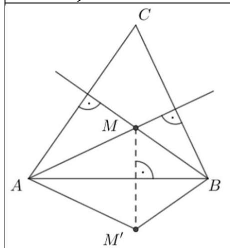
13. b)		
Összesen 100-féle számot írhatunk a nevezőbe (összes eset száma).	1 pont	
A tört értéke akkor lesz egész szám, ha n osztója 100-nak.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 100 (pozitív) osztói: 1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100.	1 pont*	*Egy vagy két hiba esetén 1 pont, kettőnél több hiba esetén 0 pont jár.*
Összesen tehát 9 kedvező eset van.	1 pont	

A kérdéses valószínűség $\frac{9}{100} = 0{,}09$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

*A *-gal jelölt pont a következő gondolatért is jár:*
$100 = 2^2 \cdot 5^2$, *így (pozitív) osztóinak száma* $(2 + 1)\cdot(2 + 1)$.

14. a)		
A P pont tükörképét jelölje P'. A tükrözés miatt K pont a PP' szakasz felezőpontja, tehát $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KP'}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\overrightarrow{PK} = (5;\ 12)$	1 pont	*A* $P'(p_1;\ p_2)$ *koordinátáira* $\frac{-2+p_1}{2} = 3$, $\frac{3+p_2}{2} = 15$.
(A $\overrightarrow{PK}$ koordinátáit a K pont koordinátáihoz hozzáadva kapjuk a P' pont koordinátáit:) $P'(8;\ 27)$.	2 pont	$p_1 = 8$; $p_2 = 27$, *tehát* $P'(8;\ 27)$.
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy ábráról leolvasva helyes választ ad, akkor ezért 2 pontot kapjon. Ha ellenőrzi is a válasz helyességét, akkor a teljes pontszám jár.

14. b)		
 Jó ábra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
A háromszög belső szögeinek összege 180°, így $ACB\angle = 60°$.	1 pont	
(A derékszögű háromszögek miatt) $MAB\angle = (90° - 65° =)\ 25°$ és $MBA\angle = (90° - 55° =)\ 35°$,	2 pont	$CAM\angle = CBM\angle = 30°$, $MAB\angle = (55° - 30° =)\ 25°$, $MBA\angle = (65° - 30° =)\ 35°$.
így (a tükrözés miatt) $CAM'\angle = (55° + 25° =)\ 80°$, és $CBM'\angle = (65° + 35° =)\ 100°$.	2 pont	
$AM'B\angle = 360° - (60° + 80° + 100°) =$	1 pont	$AMB\angle = 180° - (25° + 35°) = 120°$.
$= 120°$.	1 pont	*A tükrözés miatt* $AM'B\angle = 120°$.
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a magasságpont helyett a háromszög valamely más nevezetes pontját tükrözve oldja meg a feladatot, akkor megoldására legfeljebb 5 pontot kaphat.