ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.

# MATEMATIKA

# KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

## 2019. május 7. 8:00

## I.

Időtartam: 45 perc

| Pótlapok száma | |
|---|---|
| Tisztázati | |
| Piszkozati | |

**EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA**

# Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 45 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A megoldások sorrendje tetszőleges.

3. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

4. **A feladatok végeredményét az erre a célra szolgáló keretbe írja,** a megoldást csak akkor kell részleteznie, ha erre a feladat szövege utasítást ad!

5. A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

6. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén egyértelműen jelölje, hogy melyiket tartja érvényesnek!

7. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon**!

**1.** Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$x^2 + x - 2 = 0$$

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |

**2.** Egy esküvőn azt kérdeztük egy öttagú asztaltársaság tagjaitól, hogy hány ismerősük ül az asztalnál (az ismeretségek kölcsönösek). Négy személy válasza sorban: 4, 4, 4, 3.
Az ötödik személynek hány ismerőse ül az asztalnál?

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |

**3.** Adja meg $x$ értékét, ha $2^{16} = 16^x$.

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |

**4.** Egy forgáshenger alakú palack térfogata 1 liter, magassága 20 cm.
Számítsa ki a palack alapkörének sugarát! Megoldását részletezze!

| | | |
|---|---|---|
| | 3 pont | |
| | 1 pont | |

**5.** Határozza meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

**A**: Ha egy szám osztható 12-vel, akkor a szám osztható 6-tal.

**B**: Ha egy szám osztható 3-mal, akkor a szám osztható 6-tal.

**C**: Egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal.

| | | |
|---|---|---|
| **A**:<br>**B**:<br>**C**: | 2 pont | |

**6.** Adja meg a $2^3 \cdot 3 \cdot 7^4 \cdot 19$ és a $2^5 \cdot 7^2 \cdot 19$ számok legnagyobb közös osztóját!

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |

**7.** Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 2(x-1)^2+5$ függvény minimumának helyét és értékét!

| | | |
|---|---|---|
| A minimum helye: | 1 pont | |
| A minimum értéke: | 1 pont | |

**8.** Melyik az a szám, amelyik 2-vel kisebb, mint az abszolútértéke?

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |

**9.** Adja meg a $[0; 2\pi]$ zárt intervallumon értelmezett $x \mapsto \sin x$ függvény zérushelyeit!

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |

**10.** Egy mértani sorozat első tagja 2, negyedik tagja 54.
Adja meg a sorozat első öt tagjának összegét! Megoldását részletezze!

| | | |
|---|---|---|
| | 3 pont | |
| | 1 pont | |

**11.** Adja meg az $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$ egyenletű kör középpontjának koordinátáit és sugarát!

| | | |
|---|---|---|
| A kör középpontja: | 2 pont | |
| A kör sugara: | 1 pont | |

**12.** Egy 32 fős osztályban 14 lány van. Az osztály tanulói közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két lányt választunk?
Megoldását részletezze!

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |
| | 1 pont | |

| | | pontszám | |
|---|---|---|---|
| | | maximális | elért |
| I. rész | 1. feladat | 2 | |
| | 2. feladat | 2 | |
| | 3. feladat | 2 | |
| | 4. feladat | 4 | |
| | 5. feladat | 2 | |
| | 6. feladat | 2 | |
| | 7. feladat | 2 | |
| | 8. feladat | 2 | |
| | 9. feladat | 2 | |
| | 10. feladat | 4 | |
| | 11. feladat | 3 | |
| | 12. feladat | 3 | |
| | **ÖSSZESEN** | **30** | |

dátum javító tanár

| | pontszáma **egész számra** kerekítve | |
|---|---|---|
| | elért | programba beírt |
| I. rész | | |

dátum dátum

javító tanár jegyző

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a II. írásbeli összetevő megoldását elkezdte, akkor ez a táblázat és az aláírási rész üresen marad!
2. Ha a vizsga az I. összetevő teljesítése közben megszakad, illetve nem folytatódik a II. összetevővel, akkor ez a táblázat és az aláírási rész kitöltendő!

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.

# MATEMATIKA

## KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

## 2019. május 7. 8:00

## II.

Időtartam: 135 perc

| Pótlapok száma | |
|---|---|
| Tisztázati | |
| Piszkozati | |

**EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA**

# Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 135 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A **B** részben kitűzött három feladat közül csak kettőt kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a $\pi$ és az $e$ szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, *de alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell.*
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

# A

**13.** Két társaság a városi állatkertbe látogat. Az egyik társaság 1 felnőtt- és 4 gyerekjegy után 4300 Ft-ot, a másik társaság 2 felnőtt- és 5 gyerekjegy után 6350 Ft-ot fizet a belépésért.

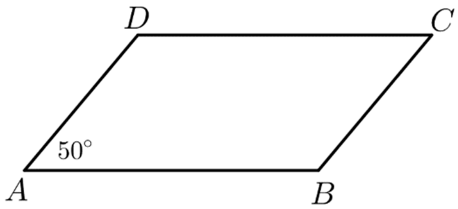
**a)** Számítsa ki a felnőtt- és a gyerekjegy árát!

A jegyekért fizetendő bruttó ár a nettó árnak és az általános forgalmi adónak (áfa) az összege. Az áfa a nettó ár 27%-ával egyenlő.

**b)** Hány forint a 6350 Ft-os bruttó ár áfatartalma, és a bruttó árnak hány százaléka az áfa összege?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 6 pont | |
| **b)** | 5 pont | |
| **Ö.:** | 11 pont | |

**14.** Az $ABCD$ paralelogramma $AB$ oldala 5 cm, $AD$ oldala 3 cm hosszú.
A paralelogramma $A$ csúcsánál lévő szöge 50°.




**a)** Számítsa ki a paralelogramma $AB$ oldalhoz tartozó magasságának hosszát és a paralelogramma területét!

**b)** Számítsa ki a paralelogramma $AC$ átlójának hosszát!

**c)** Jelölje az $\overrightarrow{AD}$ vektort **a**, a $\overrightarrow{DB}$ vektort **b**. Fejezze ki az $\overrightarrow{AC}$ és a $\overrightarrow{CD}$ vektort az **a** és **b** vektorok segítségével!

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 4 pont | |
| **b)** | 4 pont | |
| **c)** | 4 pont | |
| **Ö.:** | 12 pont | |

**15.** Egy véletlen kísérlet során két szabályos dobókockával dobunk egyszerre. Ezt a kísérletet többször egymás után elvégezzük. Egy-egy dobás után mindig feljegyezzük a két dobott szám összegét, és ezt az összeget tekintjük a kísérlet kimenetelének.
Az első kilenc kísérlet után ezeket az összegeket jegyeztük fel: 9, 3, 5, 4, 11, 6, 9, 6, 10.

**a)** Számítsa ki a kilenc számból álló adatsokaság terjedelmét, mediánját, átlagát és szórását!

Legyen az *A* esemény az, hogy a kísérlet kimenetele 4-nél nagyobb, de 9-nél kisebb.

**b)** Adja meg az *A* esemény relatív gyakoriságát az első kilenc kísérlet után!

**c)** Számítsa ki az *A* esemény valószínűségét!

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 5 pont | |
| **b)** | 2 pont | |
| **c)** | 6 pont | |
| **Ö.:** | 13 pont | |

# B

## A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!

**16.** Egy strandon egy nyári héten minden nap feljegyezték az adott nap legmagasabb hőmérsékletét és az adott napon eladott belépőjegyek számát. Az alábbi táblázat mutatja a feljegyzett adatokat.

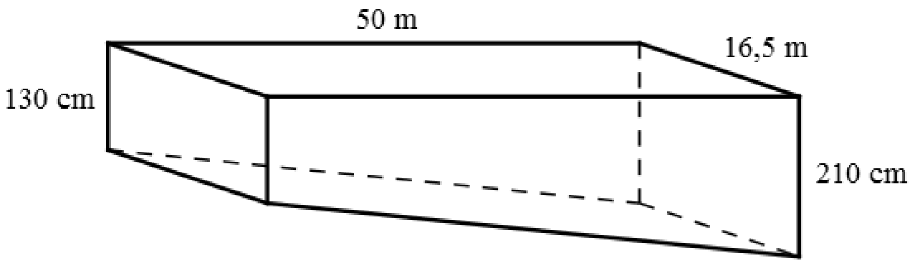
| | hétfő | kedd | szerda | csütörtök | péntek | szombat | vasárnap |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| legmagasabb napi hőmérséklet (°C) | 31 | 28 | 27 | 31 | 32 | 33 | 28 |
| eladott belépőjegyek száma | 1246 | 1315 | 1167 | 1275 | 1358 | 2617 | 1786 |

Tekintsük a táblázatban megadott értékekre vonatkozó következő állítást: *Ha a legmagasabb napi hőmérséklet* 30 °C-*nál magasabb, akkor az aznap eladott belépőjegyek száma* 1200-*nál több.*

**a)** Határozza meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

**b)** Írja fel az állítás megfordítását, és határozza meg az állítás megfordításának logikai értékét! Válaszát indokolja!

A strandon lévő egyik úszómedence 50 méter hosszú és 16,5 méter széles, az egyik végén 130 centiméter, a másik végén 210 centiméter mély. A medence egyenletesen mélyül az egyik végétől a másikig.




**c)** Legfeljebb mennyi víz fér el a medencében?
Válaszát tíz köbméterre kerekítve adja meg!

Az úszómedencében versenyt rendeznek egy úszótábor 8 résztvevője számára. A versenyzőket véletlenszerűen osztják be a medencében lévő 8 sávba.

**d)** Mekkora annak a valószínűsége, hogy két versenyző, Matyi és Sári, két egymás melletti sávban fog úszni?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 2 pont | |
| **b)** | 3 pont | |
| **c)** | 6 pont | |
| **d)** | 6 pont | |
| **Ö.:** | 17 pont | |

**A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.**
**A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!**

**17.** **a)** Egy sorozat tagjai azok a pozitív egész számok (növekvő sorrendben), amelyek 3-mal osztva 1 maradékot adnak. Adja meg a sorozat 56. tagját, és határozza meg, hogy hányadik tagja a sorozatnak az 1456.

**b)** Írja fel az $A(14; 56)$ ponton átmenő, az $y = 3x + 1$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenletét!

**c)** Adja meg a $[-14; 56]$ zárt intervallumon értelmezett $x \mapsto 3 \cdot |x+1|$ függvény értékkészletét!

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 6 pont | |
| **b)** | 5 pont | |
| **c)** | 6 pont | |
| **Ö.:** | 17 pont | |

**A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!**

**18.** Egy számítógépes jelszó annál biztonságosabb, minél több karakterből áll, és az alábbi háromféle karakterből minél többfélét tartalmaz:

- nagybetű (az angol ábécé betűi: 26 különböző lehetőség),
- kisbetű (szintén 26 különböző lehetőség),
- számjegy (0, 1, …, 9).

A Nyers Erő nevű számítógépes alkalmazás másodpercenként kb. 15 millió jelszót tud kipróbálni.

András jelszava nem kellően biztonságos, **A** típusú: ezek a jelszavak hat különböző számjegyből állnak.

**a)** Mennyi idő alatt próbálja ki a Nyers Erő alkalmazás az összes lehetséges **A** típusú jelszót?

Balázs jelszava közepesen biztonságos, **B** típusú: ezek a jelszavak nyolc kisbetűből állnak. Cili jelszava kellően biztonságos, **C** típusú: ezek a jelszavak tíz betűből állnak, melyek közül valamelyik kettő nagybetű, a többi nyolc pedig kisbetű. (A **B** és a **C** típusú jelszóban is előfordulhatnak azonos karakterek.)

**b)** Hányszor több időbe telik a Nyers Erő alkalmazásnak az összes különböző **C** típusú jelszó kipróbálása, mint az összes **B** típusúé?

Egy számítógépes program megadott jelszavak biztonsági szintjét hasonlítja össze. Ennek során minden megadott jelszó biztonsági szintjét összehasonlítja az összes többi megadott jelszóéval. (Két jelszó összehasonlítását pontosan egyszer végzi el a program.) Egy alkalommal ez a program valahány jelszó vizsgálata során 900-nál kevesebb összehasonlítást végzett.

**c)** Legfeljebb hány jelszót hasonlított össze a program?

A titkosítási algoritmusok sokszor használnak nagy prímszámokat. 2018 elején jelent meg a hír, hogy megtalálták az addig ismert legnagyobb prímszámot: ez a $2^{77\,232\,917} - 1$. Egy matematikai témákkal foglalkozó internetes oldalon ez olvasható: „*Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám számjegyei számának a meghatározásához először vegyük annak* 10-*es alapú logaritmusát. Az így kapott számnál nagyobb egész számok közül a legkisebb lesz a kérdéses szám számjegyeinek a száma.*”

**d)** Mutassa meg a leírt módszerrel, hogy a $2^{77\,232\,917}$ (tízes számrendszerben felírva) 23 249 425 számjegyből áll!

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 4 pont | |
| **b)** | 4 pont | |
| **c)** | 6 pont | |
| **d)** | 3 pont | |
| **Ö.:** | 17 pont | |

| | a feladat sorszáma | pontszám | | |
|---|---|---|---|---|
| | | maximális | elért | összesen |
| II. A rész | 13. | 11 | | |
| | 14. | 12 | | |
| | 15. | 13 | | |
| II. B rész | | 17 | | |
| | | 17 | | |
| | | ← nem választott feladat | | |
| | **ÖSSZESEN** | **70** | | |

| | pontszám | |
|---|---|---|
| | maximális | elért |
| I. rész | 30 | |
| II. rész | 70 | |
| **Az írásbeli vizsgarész pontszáma** | **100** | |

dátum | javító tanár

---

| | pontszáma **egész számra** kerekítve | |
|---|---|---|
| | elért | programba beírt |
| I. rész | | |
| II. rész | | |

dátum | dátum

javító tanár | jegyző