

## MATEMATIKA

# KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

# JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**ERETTSÉGI VIZSGA · 2019. május 7.**

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől eltérő **színű tollal, olvas-hatón** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellett levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet latta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy a **hiba jelzése** mellett az egyes **részPont-számokat** is írja a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvészett részPontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során alkalmazza az alábbi jelöléseket.
  - helyes lépés: *kijelölés*
  - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
  - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
  - rossz kiinduló adattal végezett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kijelölés*
  - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
  - nem érthető rész: *kérdezje el/vagy hullámvonal*
6. Az ábrán kívül ceruzával írt részleteket ne értekelje.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladataknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól eltérő **megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutatót egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **honthatók, ha csak az útmutatót más képp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredmények helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegeben nem változik meg, akkor a következő részPontszámokat meg kell adni.
4. Elvi **hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredményt – mint kiinduló adattal – helyesen számlol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérészekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegeben nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés vagy mértékégyseg**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többfélre megoldási próbálkozás közül a **vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik választot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért nem jár pontlevonás, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejeése során a **zeszszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás,  $n!$ ,  $\binom{n}{k}$**  kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tg$ ,  $\log$  és ezek inverzei), a  $\pi$  és az e szám közeli értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeitnek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az errel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az ábrák bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a szálléltérben megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerektísi kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadott előíró, **észzerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a céira szolgáló négyzetben – feltételesen – megjölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jeölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

**I.****18. c)**

<b>1.</b>	$x_1 = 1, x_2 = -2$	2 pont	
		<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>
<b>2.</b>			
$_3$		2 pont	
		<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>
<b>3.</b>			
$x=4$		2 pont	
		<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>
<b>4.</b>			
$V = 1000 \text{ cm}^3$		1 pont	$V = 1 \text{ dm}^3$
$r^2 \cdot 20 = 1000 (r > 0)$		1 pont	$r^2 \pi \cdot 2 = 1$
$r^2 \approx 15,9$		1 pont	$r^2 \approx 0,159$
$r \approx 4 \text{ cm}$		1 pont	$r \approx 0,4 \text{ dm}$
		<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>
<b>5.</b>			
A: igaz		2 pont	2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jar.
B: hamis			
C: igaz			
		<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>
<b>6.</b>			
$2^3 \cdot 7^2 \cdot 19 (= 7448)$		2 pont	
		<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>
<b>7.</b>			
A minimum helye 1,		1 pont	
a minimum értéke 5.		1 pont	
		<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>
<b>8.</b>			
$-1$		2 pont	
		<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül (pl. próbálegattal) helyes választ ad, akkor ezért 2 pontot kapjon.*

**18. d)**

$\lg \frac{777232917}{2349424,7} = 77,232917 \cdot \lg 2 \approx$	1 pont
$\approx 23,249424,7$	1 pont
A kérdéses szám számjegyeinek a száma tehát valóban 23 249 425.	1 pont
	<b>Összesen:</b>
	<b>3 pont</b>

<b>18. a)</b>	Hat különböző számjegyből $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$	2 pont
Ennyi jelszót az alkalmazás $\frac{151200}{1,5 \cdot 10^7} \approx$	1 pont	
$\approx 0,01$ másodperc alatt próbál ki.	1 pont	

**18. b) első megoldás**

Az összes <b>B</b> típusú jelszó száma: $26^8$ .	1 pont	Az összes ílyen jelszó ki-próbálásához kb. 3,867 óra,
Az összes <b>C</b> típusú jelszó száma: $26^{10} \cdot \binom{10}{2}$ .	1 pont	az összes ílyen jelszó ki-próbálásához pedig kb. 117 639 óra (kb. 13,5 év) szükséges.
$26^{10} \cdot \binom{10}{2}$	1 pont	Ezek aránya $\frac{26^{10}}{26^8} =$

**18. b) második megoldás**

A <b>C</b> típusú jelszök két karakterrel hosszabbak a <b>B</b> típusú jelszavaknál, és minden plusz karakter 26-féle lehet,	1 pont	A <b>C</b> típusú jelszók minden karaktere 26-féle lehet,	1 pont
ami $26^2 (= 676)$ -szorannyi lehetőséget jelent.	1 pont	amit $26^2 (= 676)$ -szorannyi lehetőséget jelent.	1 pont
Ezen tul $\binom{10}{2} (= 45)$ -féleképpen választható neg az,	1 pont	Ezen tul $\binom{10}{2} (= 45)$ -féleképpen választható neg az,	1 pont

hogy a tíz karakter közül melyik kető legyen a nagybetű.

Igy az összes **C** típusú jelszó kipróbálásához  $26^2 \cdot \binom{10}{2} = 30\ 420$ -szor annyi időre van szüksége az alkalmazásnak, mint az összes **B** típusú jelszó kipróbálásához.

**Összesen:** 4 pont

<b>9.</b>	$0, \pi, 2\pi$	2 pont
		<b>Összesen:</b> 2 pont
<b>10.</b>		
A sorozat $q$ hányadosára $q^3 = 27$ .	1 pont	
Ebből $q = 3$ .	1 pont	
Az első öt tag összege $2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} =$	1 pont	$2 + 6 + 18 + 54 + 162$
$= 242$ .	1 pont	
		<b>Összesen:</b> 4 pont
<b>11.</b>		
$K(0; 3)$	2 pont	
$r = 5$	1 pont	
		<b>Összesen:</b> 3 pont
<b>12. első megoldás</b>		
(Ha nem vesszük figyelembe a kválasztás sorrendjét) 32 tanulóból kettőt kiválasztani $\binom{32}{2} (= 496)$ -féléképpen lehet (összes eset száma).	1 pont	(A sorrendet is figyelembe véve) az összes lehetséges kiválasztás száma $32 \cdot 31 (= 992)$ .
A 14 lányból kettőt $\binom{14}{2} (= 91)$ -féléképpen lehet kválasztani (kedvező esetek száma).	1 pont	<i>Ebből kedvező 14 · 13 (= 182),</i>
A kérdéses valószínűség $\frac{\binom{14}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{91}{496} \approx 0,183$ .	1 pont	$\frac{182}{992}$
		<b>Összesen:</b> 3 pont
<b>12. második megoldás</b>		
Annak a valószínűsége, hogy elsőre lányt választunk: $\frac{14}{32}$ .	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy ezután másodikra is lányt választunk: $\frac{13}{31}$ .	1 pont	
A kérdéses valószínűség ezek szorzata, vagyis kb. $0,183$ .	1 pont	
		<b>Összesen:</b> 3 pont

**II. A****13. a) első megoldás**

(Jelölje a fehnőtjegy árát forintban  $x$ , a gyerekjegy árát pedig  $y$ .) A szöveg alapján:

$$\begin{cases} x + 4y = 4300 \\ 2x + 5y = 6350 \end{cases}$$

Az első egyenletből kifejezve  $x$ -et:  
 $x = 4300 - 4y$ .

$$\begin{aligned} & \text{Az első egyenlet mindenket} \\ & \text{oldalai szoroza 2-vel:} \\ & \begin{cases} 2x + 8y = 8600 \\ 2x + 5y = 6350. \end{cases} \end{aligned}$$

Behelyettesítve a második egyenletbe:  
 $2 \cdot (4300 - 4y) + 5y = 6350$ .

$$\begin{aligned} & \text{Az első egyenletből ki-} \\ & \text{vonva a másodikat:} \\ & 3y = 2250. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Rendezve és megoldva:} \\ & y = 750 \text{ Ft egy gyerekjegy ára.} \end{aligned}$$

$x = 1300$  Ft egy fehnőtjegy ára.  
 Ellenőrzés a szöveg alapján: Egy fehnőtjegy és négy gyerekjegy ára ( $1300 + 4 \cdot 750 = 4300$  Ft, két fehnőtjegy és öt gyerekjegy ára pedig  $(2 \cdot 1300 + 5 \cdot 750 =)$

$6350$  Ft.

**Összesen: 6 pont**

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem ad szöveges választ (és az ismertetének jelentését sem azonosítja), akkor ezért összesen 1 pontot veszíten.*

**13. a) második megoldás**

Egy fehnőt- és egy gyerekjegy ára  $6350 - 4300 = 2050$  Ft.  
 $\begin{aligned} & 2 \text{ fehnőt- és } 8 \text{ gyerekjegy} \\ & \text{ára } 2 \cdot 4300 = 8600 \text{ Ft.} \\ & 2 \text{ fehnőt- és } 5 \text{ gyerekjegy} \\ & \text{ára } 6350 \text{ Ft, tehát } 3 \text{ gyerekjegy ára } 8600 - 6350 = \\ & = 2250 \text{ Ft.} \end{aligned}$

Egy gyerekjegy 750 Ft-ba kerül.  
 Egy fehnőtjegy 1300 Ft-ba kerül.

**Összesen: 6 pont**

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyik válaszban sem ad meg mérlegésgéget, akkor ezért összesen 1 pontot veszíten.*

**17. a)**

Az addott számok olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek differenciája 3, és első tagja 1.

$$\begin{aligned} a_{36} &= a_1 + 55d = \\ &= 166 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Megoldandó az } 1456 &= 1 + (n-1) \cdot 3 \text{ egyenlet.} \\ n-1 &= 485 \\ \text{A sorozat } 486. \text{ tagja az } 1456. & \quad \text{Összesen: 6 pont} \end{aligned}$$

**17. b) első megoldás**

Az addott egyenes egyenletét átalakítva:  $-3x + y = 1$ .

Az egyenes egyik normálvektora  $(1; 3)$ ,

a rá merőleges egyenes egyik normálvektora  $(1; 3)$ .

A merőleges egyenes egyenlete:  
 $x + 3y = (1 \cdot 14 + 3 \cdot 56) = 182$ .

**Összesen: 5 pont**

**17. b) második megoldás**

Az addott egyenes meredeksége 3,

az erre merőleges egyenes meredeksége  $-\frac{1}{3}$ .

(A kérdéses egyenes egyenletét  $y = -\frac{1}{3}x + b$  alakban keresve)  $56 = -\frac{1}{3} \cdot 14 + b$

$$\begin{aligned} b &= \frac{182}{3} \\ \text{A kérdéses egyenes egyenlete: } y &= -\frac{1}{3}x + \frac{182}{3}. \end{aligned}$$

**Összesen: 5 pont**

**17. c)**

Az addott függvény  $x < -1$  esetén szigorúan monoton csökken,  $x > -1$  esetén szigorúan monoton növekszik.  
 A függvény legkisebb értéke az  $x = -1$  helyen 0.

$$\begin{aligned} \text{A } -14 \text{-hez } 39 \text{-et,} \\ \text{az } 56 \text{-hoz } 171 \text{-et rendel a függvény.} \\ \text{Az értékkészlet } [0; 171]. & \quad \text{Összesen: 6 pont} \end{aligned}$$

**16. c) első megoldás**

Egy (derékszögű) trapéz alapú egyenes hasáb térfogatát kell kiszámolni.

A trapéz alapjainak hossza 2,1 m és 1,3 m, egyik szára (a trapéz magassága) 50 m hosszu.

A trapéz területe  $T = (2,1 + 1,3) \cdot 50 \cdot 2 = 85 \text{ (m}^2)$

A hasáb magassága 16,5 m, térfogata  $V = 85 \cdot 16,5 = 1402,5 \text{ (m}^3)$ ,

a kért kerékíttessel 1400 m<sup>3</sup>.

**Összesen:** **6 pont**

**13. b)**

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

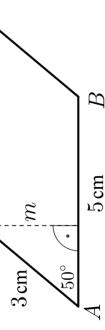
A nettó ár 1,27-szorosa a bruttó ár.

$6350 : 1,27 = 5000 \text{ (Ft)}$  a nettó ár.

A 6350 Ft áfatartalmára:  $6350 - 5000 = 1350 \text{ Ft}$ .

Az áfa a bruttó ármak  $\frac{1350}{6350} \cdot 100 \approx 21,26\%$ -a.

**Összesen:** **5 pont**

**14. a) első megoldás**

Az  $AB$  oldalhoz tartozó magasság  $m = 3 \cdot \sin 30^\circ \approx 1,5 \text{ cm}$ .

$\approx 2,3 \text{ cm}$ .

A parallelogramma területe  $T \approx 5 \cdot 2,3 =$

$= 11,5 \text{ cm}^2$ .

**Összesen:** **4 pont**

**14. a) második megoldás**

A parallelogramma területe  $T = 3 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ \approx 11,5 \text{ cm}^2$ .

Az  $AB$  oldalhoz tartozó magasság  $m \approx \frac{11,5}{5} =$

$= 2,3 \text{ cm}$ .

**Összesen:** **4 pont**

**16. c) második megoldás**

(Egy téglalétes és egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb térfogatának összegét kell kiszámolni.)

A téglalétes térfogata  $1,3 \cdot 50 \cdot 16,5 = 1072,5 \text{ (m}^3)$ .

A derékszögű háromszög területe  $(2,1 - 1,3) \cdot 50 : 2 = 20 \text{ (m}^2)$ .

A hasáb magassága 16,5 m, térfogata  $20 \cdot 16,5 = 330 \text{ (m}^3)$ ,

A kérdéses térfogat a fentiek összege, azaz  $1402,5 \text{ (m}^3)$ ,

a kért kerékíttessel 1400 m<sup>3</sup>.

**Összesen:** **6 pont**

**16. d)**

A nyolc versenyzöt 8! (= 40 320)-féléképpen lehet beosztani a nyolc sárho (összes eset száma).

Ha Matyit és Sári egysütty kezeljük, akkor „hét” úszót! (= 5040)-féléképpen lehet sorba rendezni.

Matyi és Sári egy adott beosztásban helyet is cserélhetnek, így  $2 \cdot 7!$  (= 10 080) a kezvező esetek száma.

A kérdéses valószínűség  $\frac{2 \cdot 7!}{8!} =$

$\left( \frac{10\ 080}{40\ 320} \right) = 0,25$ .

**Összesen:** **6 pont**

**14. b) első megoldás**

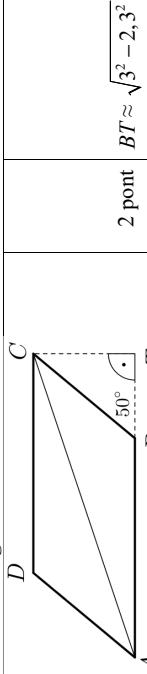
A parallelogramma  $B$  csúcsnál lévő szöge  $130^\circ$ .

Az  $ABC$  háromszög  $AC$  oldalára felírva a koszinusz-tételel:  $AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 130^\circ$ .

Ebből  $AC^2 \approx 53,28$ ,

így  $AC \approx 7,3 \text{ cm}$ .

**Összesen:** **4 pont**

**14. b) második megoldás**

A parallelogramma  $C$  csúcsából az  $AB$  egyenesre állíttott merőleges talppontja legyen  $T$ .  
 $BT = 3 \cdot \cos 50^\circ \approx 1,93$  (cm).

Az  $ATC$  derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt felirva  $AC^2 = AT^2 + CT^2 \approx 6,93^2 + 2,3^2$ , amiből  $AC \approx 7,3$  cm.

**Összesen:** **4 pont**

**14. c)**

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BC} = \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{a} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} \\ \overline{CD} &= \overline{BA} = \\ &= -(\overline{AD} + \overline{DB}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b} \end{aligned}$$

**Összesen:** **4 pont**

**15. a)**

$$\begin{aligned} \text{Az adathalmaz terjedelme } (11 - 3 =) 8, &\quad 1 \text{ pont} \\ \text{átlaga } 7, &\quad 1 \text{ pont} \\ \text{szórása } \sqrt{\frac{(9-7)^2 + (3-7)^2 + \dots + (10-7)^2}{9}} &= 1 \text{ pont} \\ &= \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3} \approx 2,67. & \quad 1 \text{ pont} \end{aligned}$$

**Összesen:** **5 pont**

**15. b)**

$$\begin{aligned} \text{Az } A \text{ esemény (a dobások összege } 5, 6, 7 \text{ vagy } 8) &\quad 1 \text{ pont} \\ \text{gyakorisága } 3, & \quad \text{így a relatív gyakoriság } \frac{3}{9}. & \quad 1 \text{ pont} \\ \text{Összesen: } & \quad \text{2 pont} \end{aligned}$$

**15. c)**

Két kochával egyszerre dobva az egyenlő valószínűségi elemi események száma: 36 (összes eset száma).

$$\begin{aligned} 5 &= 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1, \text{ ez 4 lehetőség.} \\ 6 &= 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1, \text{ ez 5 lehetőség.} \\ 7 &= 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1, \text{ ez 6 lehetőség.} \\ 8 &= 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2, \text{ ez 5 lehetőség.} \end{aligned}$$

A kedvező esetek száma erek összege, azaz 20.  
 $Az A$  esemény valószínűsége  $\frac{20}{36} \approx 0,56$ .

**Összesen:** **6 pont**

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó nem kilönbözteti meg a dobókockákat egymástól, így ebben a gondolatban részben rözsereedményei rendre 2, 3, 3 lehetségek, akkor a \*gal feljő 3 pontból 1 pontat kapjon.
2. Ha a vizsgázó például az alábbi táblázat alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11

**II. B**

<b>16. a)</b>	Az állítás igaz.	1 pont
	mert hétfőn, csütörtökön, pénteken és szombaton volt a legmagasabb nap a nömérőklet 30 °C felett, és ezenken a napokon 1200-nál több jegyet adtak el.	1 pont
	<b>Összesen:</b> <b>2 pont</b>	

**16. b)**

Az állítás megfordítása: <i>Ha az eladtott belépjegyek száma 1200-nál több, akkor aznap a legmagasabb napi hőmérséklet 30 °C-nál magasabb.</i>	1 pont
Az állítás hamis,	1 pont
mert például kedden (vagy vasárnap) 1200-nál több jegyet adtak el, de a legmagasabb napi hőmérséklet 30 °C alatt alakult.	1 pont
<b>Összesen:</b> <b>3 pont</b>	