ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$x_1 = -2$; $x_2 = 4$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
30°	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
40 g	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$C \setminus A = \{1; 8\}$	1 pont	
$(A \cup B) \cap C = \{1; 2; 3; 5; 13\}$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5.		
14	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
$(3 \cdot 3 \cdot 2 =)$ 18	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{b} + 2\mathbf{f}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8.		
1458, 1848	2 pont	*Egy jó, vagy két jó és egy rossz válasz esetén 1 pont jár, minden más esetben 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

9.		
$\sin\alpha = \frac{0,6}{3}$	2 pont	
$\alpha \approx 11,5°$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
a) például (2; –1)	1 pont	
b) $2x - y = 3$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11.		
A sorozat hányadosa $q = -2$.	1 pont	$(-3) + 6 + (-12) + 24 +$ $+ (-48) + 96 + (-192) +$ $+ 384 + (-768) + 1536 =$
A sorozat első tagja $a_1 = -3$.	1 pont	
Az első tíz tag összege $S_{10} = -3 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{(-2) - 1} =$	1 pont	
= 1023.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
Módusz: 5 (jeles)	1 pont	
Medián: 4 (jó)	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

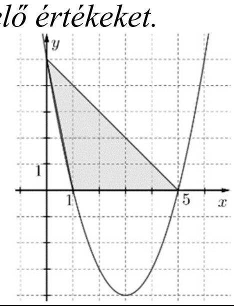
13. a)		
$\frac{4x}{12} + \frac{2x}{12} \geq \frac{3x}{12} + 230$	1 pont	
$\frac{3x}{12} \geq 230$	1 pont	
$x \geq 920$	1 pont	
80 ilyen háromjegyű szám van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

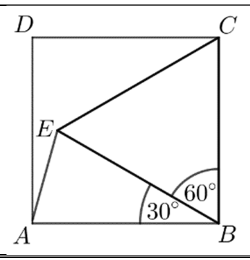
13. b)		
$3 \cdot 4^x + 4 \cdot 4^x = 896$	1 pont	
$7 \cdot 4^x = 896$	1 pont	
$4^x = 128$	1 pont	
$2^{2x} = 2^7$	1 pont	$x = \log_4 128$
(Mivel a 2-es alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $x = 3{,}5$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. a)		
$(x + 1)(x + 3)$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

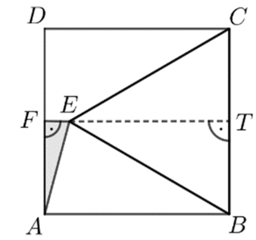
14. b)		
$y = (-6,5)^2 + 4 \cdot (-6,5) + 3 =$	1 pont	$y = (-6,5 + 1)(-6,5 + 3) =$
$= 19,25$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

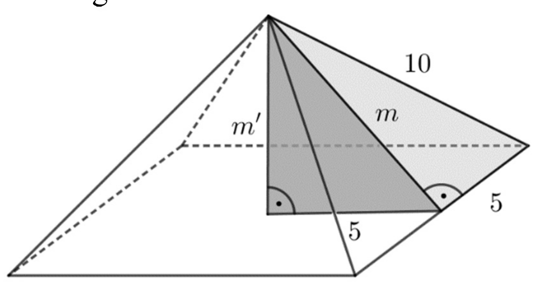
14. c)		
D	1 pont	
Az értékkészlet: $[-1; \infty[$.	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

14. d)		
A g értéke 0-ban 5, így az y tengelyt az $A(0; 5)$ pontban metszi a g grafikonja.	2 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó egy helyesen felrajzolt grafikonról olvassa le a megfelelő értékeket.*
Az $x^2 - 6x + 5 = 0$ egyenlet megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$,	2 pont	
így az x tengelyt a $B(1; 0)$ és a $C(5; 0)$ pontokban metszi a g grafikonja.	1 pont	
Az ABC háromszög (BC oldala 4 egység, a hozzá tartozó magasság 5 egység hosszú, így) területe $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ (területegység).	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. a) első megoldás		
A BCE háromszög szabályos, ezért $CBE\angle = 60°$.	1 pont	
Az ABE (egyenlő szárú) háromszögben tehát $ABE\angle = (90° - 60° =)\ 30°$.	1 pont	

(Az AE szakasz hosszát koszinusztétellel számolva:) $AE^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 30° \approx 38{,}58.$	2 pont	$\sin 15° = \dfrac{\frac{AE}{2}}{12}$
$AE \approx 6{,}21$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. a) második megoldás		
(BCE egyenlő oldalú háromszögben az ET magasság hossza Pitagorasz-tétellel:) $ET = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108}$.	2 pont	
(ET egyenese az AD oldalt az F felezőpontban metszi.) $EF = 12 - \sqrt{108} \approx 1{,}61$	1 pont	
(Az AEF derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:) $AE = \sqrt{6^2 + 1{,}61^2} \approx 6{,}21.$	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

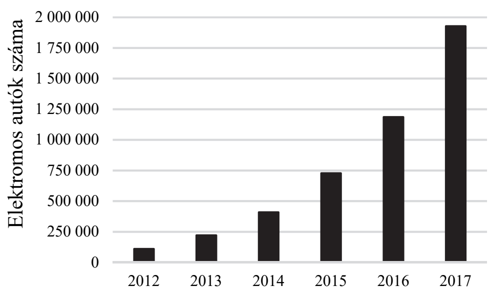
15. b)		
A feladat megértését tükröző ábra. 	1 pont	
A gúla oldallapjának magassága Pitagorasz-tétellel: $m = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$ ($\approx 8{,}66$) (cm).	1 pont	*Az alaplap átlója* $10\sqrt{2}$ (cm), *ennek fele* $5\sqrt{2}$ (cm).
A gúla magassága Pitagorasz-tétellel: $m' = \sqrt{(\sqrt{75})^2 - 5^2} = \sqrt{50}$ ($\approx 7{,}07$) (cm).	1 pont	$m' = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{50}$
A gúla térfogata: $V = \dfrac{10^2 \cdot \sqrt{50}}{3} \approx$	1 pont	
$\approx 235{,}7\ \text{cm}^3$.	1 pont	
Mivel 1 dm^3 = 1000 cm^3,	1 pont	8 kg/dm^3 = 8 g/cm^3,
így a gúla tömege $8 \cdot 0{,}2357 \approx 1{,}89$ kg.	1 pont	*így a gúla tömege* $8 \cdot 235{,}7 \approx 1886$ g.
Összesen:	**7 pont**	

II. B

16. a)

4 év = 48 hónap	1 pont	
(Az egyes hónapokban félretett összegek egy számtani sorozat egymást követő tagjai, az első tag 50 000, a differencia 1000, így) 48 hónap alatt $S_{48} = \frac{50\,000 + 50\,000 + 47 \cdot 1000}{2} \cdot 48 =$	2 pont	*a_{48} = 97 000 megállapításáért 1 pont jár.*
= 3 528 000 Ft-ot gyűjt összesen.	1 pont	
Tehát 4 év elegendő 3,5 millió Ft összegyűjtésére.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. b)



	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. c)

A modell alapján: $0{,}122 \cdot 2^{0{,}822x} = 25$.	1 pont	
$2^{0{,}822x} = \frac{25}{0{,}122}$ (≈ 204,9)	1 pont	
$0{,}822x \cdot \lg 2 = \lg 204{,}9$	1 pont	$0{,}822x = \log_2 204{,}9$
$x \approx 9{,}34$	1 pont	
A modell szerint az elektromos autók száma (2012 + 10 =) 2022-ben éri el a 25 milliót.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a modell alapján az egyes években gyártott autók számát helyes kerekítésekkel kiszámítja, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.
2. Ha a vizsgázó hivatkozik f szigorú monoton növekedésére, valamint helyesen kiszámolja f (9) és f (10) értékét, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

16. d) **első megoldás**		
1 típust 5-féleképpen, 4 típust szintén 5-féleképpen választhat ki a grafikus. 2 típust $\left(\binom{5}{2}=\right)$ 10-féleképpen, 3 típust szintén 10-féleképpen választhat ki. 5 típust 1-féleképpen választhat ki.	3 pont	
Összesen (5 + 5 + 10 + 10 + 1 =) 31-féleképpen alakulhat a reklámfüzet fedőlapja a megjelenített típusok szempontjából.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. d) **második megoldás**		
Mind az öt típus esetén két választási lehetőség van (szerepel vagy nem szerepel a fedőlapon). Ez összesen 2^5 (= 32) lehetőséget jelent.	2 pont	
Nem megfelelő az a kiválasztás, melyben egy típus sincs kiválasztva,	1 pont	
tehát 32 − 1 = 31-féleképpen alakulhat a reklámfüzet fedőlapja a megjelenített típusok szempontjából.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a)		
A Föld folyékony állapotú édesvízkészlete a teljes vízkészlet $(0{,}03\cdot 0{,}2 =)$ 0,006-szerese, azaz 1 400 000 000 · 0,006 =	2 pont	
= 8 400 000 (km^3).	1 pont	
A kérdéses gömb térfogatára $\frac{4}{3}r^3\pi = 8\,400\,000$,	1 pont	
azaz (a kért kerekítéssel) $r=\sqrt[3]{\frac{6300000}{\pi}}\approx 126$ (km) lenne ennek a gömbnek a sugara.	2 pont*	*Ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít, akkor legfeljebb 1 pont jár.*
Összesen:	**6 pont**	

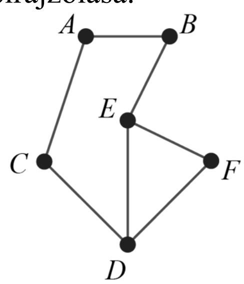
Megjegyzés: Ha (arra hivatkozva, hogy a 126 km *sugarú gömbbe még nem fér bele a Föld folyékony édesvízkészlete) a vizsgázó válasza* r = 127 km, *akkor a *-gal jelölt 2 pont jár.*

17. b)		
Ha a középső, kör alakú tartomány pl. sárga színű, akkor a hat sziromforma egyike sem lehet sárga.	1 pont	
Ekkor a szirmok váltakozva lehetnek kék, illetve zöld színűek, ami 2-féleképpen valósulhat meg.	1 pont	*Ha az egyik szirom kék (illetve zöld), akkor ez meghatározza a többi szirom színét.*

A szirmok körüli tartomány ekkor csak sárga lehet,	1 pont	
a külső tartomány pedig kék vagy zöld. Ez szintén 2 lehetőség.	1 pont	
Mivel a középső tartomány színe nemcsak sárga, hanem kék vagy zöld is lehet (3 lehetőség),	1 pont	
így a lehetséges színezések száma $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó szisztematikusan felsorolja az összes lehetséges színezést, és ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

17. c)		
Annak a valószínűsége, hogy Anna mind az öt nap szénsavmentes vizet kap: $0{,}8^5$ ($\approx 0{,}328$).	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy valaki szénsavmentes vizet kér, de szénsavasat kap, 0,2.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy Anna pontosan négy napon kap szénsavmentes vizet: $\binom{5}{1} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2$ ($\approx 0{,}410$).	2 pont	
A kérdéses valószínűség kb. (0,328 + 0,410 =) 0,738.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. a)		
Megfelelő gráf felrajzolása. 	2 pont	*Egy vagy két hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

18. b)		
A januárban eladott teljes árú jegyek számát jelölje x, ekkor a feladat szövege alapján: $4 \cdot x \cdot 250 + x \cdot 400 + 0{,}125 \cdot x \cdot 500 = 912\,600$.	2 pont	
Ebből $x = 624$ (teljes árú jegyet adtak el).	1 pont	
Összesen 2496 + 624 + 78 = 3198 jegyet adtak el.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. c) **első megoldás**		
Öt fő 5! = 120-féle sorrendben érkezhet meg (összes eset száma).	1 pont	
Ha legfeljebb egy lánynak kell fiúra várnia, akkor a két fiú vagy az első két érkező, vagy az első és a harmadik, vagy a második és a harmadik érkező lehet.	2 pont	
A fiúk minden ilyen esetben 2-féle sorrendben érkezhetnek, a lányok érkezési sorrendje pedig 3! = 6-féle lehet.	1 pont	
Összesen $(3 \cdot 2 \cdot 6 =)$ 36 kedvező eset van.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{36}{120} = 0{,}3$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. c) **második megoldás**		
Ha csak a nemeket különböztetjük meg egymástól,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
akkor a két fiú és a három lány összesen $\binom{5}{2}$= 10-féle sorrendben érkezhet meg.	2 pont	*FFLLL, FLFLL, FLLFL, FLLLF, LFFLL, LFLFL, LFLLF, LLFFL, LLFLF, LLLFF*
Ezek közül a feladatban szereplő feltétel szempontjából három érkezési sorrend kedvező: FFLLL, FLFLL, LFFLL.	2 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{3}{10} = 0{,}3$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. d)		
A felső görbe két félkörívének (sugara 12 cm, így) hossza összesen: $2 \cdot (0{,}5 \cdot 2 \cdot 12 \cdot \pi) = 24\pi$.	1 pont	
Ha az alsó görbénél az egyik félkör sugara r, akkor a másik félkör sugara $24 - r$.	1 pont	*Ha az alsó görbénél az egyik félkör átmérője d, akkor a másik félkör átmérője* $48 - d$.
Az alsó görbe két félkörívének hossza összesen: $r\pi + (24 - r)\pi =$	1 pont	$d\pi : 2 + (48 - d)\pi : 2 =$
$= 24\pi$,	1 pont	
így Dezsőnek igaza van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az alapján válaszol, hogy az alsó görbe félköreinek sugarára egy-egy konkrét értéket helyettesít be, akkor legfeljebb 3 pontot kapjon.