ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. október 15.

# MATEMATIKA

## KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

## JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a $\pi$ és az $e$ szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

# I.

| 1. | | |
|---|---|---|
| Egy megfelelő gráf. | 2 pont | *Nem egyszerű gráf is elfogadható.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 2. | | |
|---|---|---|
| $\{\ \}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, y, z\}$ | 3 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

*Megjegyzés: Minden hiányzó vagy hibás részhalmazért 1 pontot (összesen legfeljebb 3 pontot) veszítsen a vizsgázó.*

| 3. | | |
|---|---|---|
| 12 | 2 pont | *A $b^{12}$ válasz is elfogadható.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 4. | | |
|---|---|---|
| 35 százalékkal | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 5. | | |
|---|---|---|
| Egy megfelelő szám, például a 25. | 2 pont | *Ha a vizsgázó olyan számot ad meg, amely relatív prím a 6-hoz, de nem összetett, akkor 1 pontot kapjon.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 6. | | |
|---|---|---|
| A, C | 2 pont | *Egy jó, vagy két jó és egy rossz válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 7. | | |
|---|---|---|
| 24 | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |





| 18. b) harmadik megoldás | | |
|---|---|---|
| Annak a valószínűségét vizsgáljuk, hogy a hat kulcs közül a két 102-es kulcsot választjuk ki Aladár és Balázs számára (a többi kulcs kiosztása tetszőleges). | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A hat kulcs közül kettőt $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma). | 2 pont | |
| Egyetlen kedvező eset van: amikor Aladár és Balázs a 102-es szoba két kulcsát kapja. | 2 pont | |
| A keresett valószínűség így $\frac{1}{15}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| 18. c) első megoldás | | |
|---|---|---|
| Annak a valószínűsége, hogy egy adott tányért nem törnek össze a pincérek: $\frac{1999}{2000} = 0{,}9995$. | 1 pont | |
| $P$(legalább egyet összetörnek) = <br> = 1 – $P$(egyet sem törnek össze) = | 1 pont | |
| $= 1 - 0{,}9995^{150} \approx$ | 1 pont | |
| $\approx 1 - 0{,}928 = 0{,}072$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 18. c) második megoldás | | |
|---|---|---|
| Annak a valószínűsége, hogy a pincérek pontosan egy tányért törnek össze: <br> $P(1) = \binom{150}{1} \cdot 0{,}0005 \cdot 0{,}9995^{149} \approx 0{,}0696$. | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy a pincérek pontosan két tányért törnek össze: <br> $P(2) = \binom{150}{2} \cdot 0{,}0005^2 \cdot 0{,}9995^{148} \approx 0{,}0026$. | 1 pont | |
| $P(3) \approx 0{,}00006$ <br> Látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a pincérek három vagy több tányért törnek össze, a feladatra adott válasz szempontjából elhanyagolható. | 1 pont | |
| Így a kérdéses valószínűség a fenti két valószínűség összege, azaz körülbelül 0,072. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **18. b)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A hat vendég $6!(=720)$-féleképpen veheti el a kulcsokat (összes eset száma). | 1 pont | |
| Kedvező esetek azok, amikor Aladár és Balázs a két 102-es kulcsot veszi el valamilyen sorrendben. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Ezt 2-féleképpen tehetik meg. | 1 pont | |
| A többiek ekkor $4!(=24)$-féleképpen vehetik el a maradék kulcsokat. | 1 pont | |
| A kedvező esetek száma tehát $2\cdot 4!(=48)$. | 1 pont | |
| A keresett valószínűség így $\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **18. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az egyágyas szobába kerülő személyt 6-féleképpen választhatjuk ki. | 1 pont* | *A háromágyas szobába kerülő 3 személyt* $\binom{6}{3}=20$*-féleképpen választhatjuk ki.* |
| A maradék öt személyből a kétágyas szobába kerülő kettőt $\binom{5}{2}=10$-féleképpen választhatjuk ki. | 1 pont* | *A maradék három személyből a kétágyas szobába kerülő kettőt 3-féleképpen választhatjuk ki.* |
| A maradék három személy kerül a háromágyas szobába, az összes eset száma így $6\cdot 10=60$. | 1 pont* | $20\cdot 3=60$ |
| Ha Aladár és Balázs a kétágyas szobába kerül, akkor a társaság másik négy tagja közül 4-féleképpen választhatjuk ki az egyágyas szobába kerülő személyt. A kedvező esetek száma tehát 4. | 2 pont | |
| A keresett valószínűség így $\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| A hat személyt sorba állítjuk, és mindegyiküknek kiosztunk egy szobakulcsot. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Meg kell számolni egy darab 101-es, két darab 102-es és három darab 103-as kulcs lehetséges sorrendjeinek a számát (ismétléses permutáció). | 1 pont | |
| Az összes eset száma $\frac{6!}{2!\cdot 3!}=60$. | 1 pont | |





| **8.** | | |
|---|---|---|
| (A koszinusztétel alapján az $AC$ oldal hossza $\sqrt{2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot(-0{,}5)}=)\sqrt{19}\approx 4{,}36$ (egység). | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **9.** | | |
|---|---|---|
| Az egyenes meredeksége $-0{,}4$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **10.** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| 19 liter = 19 000 $cm^3$ | 1 pont | |
| Az akvárium alapterülete 1000 $cm^2$. | 1 pont | |
| $19\,000=1000\cdot m$, ahonnan $m=19$ cm magasan áll a víz az akváriumban. | 1 pont | |
| $(25-19=)$ 6 cm-re lesz a víz szintje az akvárium felső szélétől. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **10.** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az akvárium alapterülete 1000 $cm^2$, | 1 pont | 10 $dm^2$ |
| így 1 liter = 1000 $cm^3$ víz betöltése éppen 1 cm-rel emeli a vízszintet. | 2 pont | 1 liter = 1 $dm^3$ *éppen* 0,1 dm-*rel emeli a vízszintet.* |
| 19 liter víz betöltése után tehát $(25-19=)$ 6 cm-re lesz a vízszint az akvárium felső szélétől. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

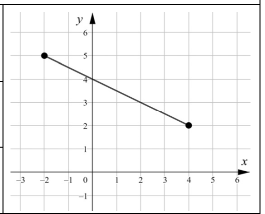
| **11.** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A halmazokból $3\cdot 4=12$-féleképpen tudunk egy-egy számot kiválasztani (összes eset száma). | 1 pont | |
| A szorzat akkor lesz negatív, ha az egyik halmazból pozitív, a másikból negatív számot választunk. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A megfelelő számpárok: $(-13; 1)$, $(-13; 4)$, $(-5; 1)$, $(-5; 4)$ és $(29; -17)$, összesen tehát 5 kedvező eset van. | 1 pont | |
| A keresett valószínűség $\frac{5}{12}(\approx 0{,}417)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **11. második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A szorzat akkor lesz negatív, ha az egyik halmazból pozitív, a másikból negatív számot választunk. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Annak valószínűsége, hogy az $A$ halmazból negatív és a $B$ halmazból pozitív számot választunk: $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}$. | 1 pont | |
| Annak valószínűsége, hogy az $A$ halmazból pozitív és a $B$ halmazból negatív számot választunk: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$. | 1 pont | |
| A keresett valószínűség ezek összege, azaz $\frac{5}{12}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **12.** | | |
|---|---|---|
| A jegyek átlaga 4. | 1 pont | |
| A jegyek szórása $\left(\sqrt{\frac{1\cdot 2^2+2\cdot 1^2+1\cdot 0^2+4\cdot 1^2}{8}}=\right)\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1{,}25}\approx 1{,}12.$ | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

## II. A

| **13. a)** | | |
|---|---|---|
| $f\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+4=$ | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $=\frac{35}{8}=4{,}375$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

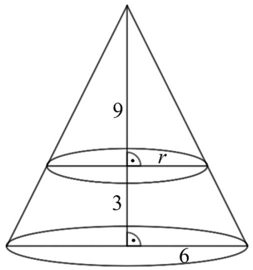
| **13. b)** | | |
|---|---|---|
| Az ábrázolt függvény grafikonja egy –0,5 meredekségű egyenesre illeszkedik, | 1 pont |  |
| a grafikon az $y$ tengelyt a 4-nél metszi. | 1 pont | |
| A vizsgázó az értelmezési tartományt helyesen veszi figyelembe. | 1 pont | |
| A függvény értékkészlete: [2; 5]. | 2 pont | *Más helyes jelölés is elfogadható.* |
| **Összesen:** | **5 pont** | |





| **18. a) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az egyágyas szobák száma legyen $n$, ekkor kétágyas szobából $3n$, háromágyasból $65 - 4n$ darab van. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A feladat szövege alapján: $n + 3n\cdot 2 + (65 - 4n)\cdot 3 = 125$. | 2 pont | |
| $195 - 5n = 125$ | 1 pont | |
| $n = 14$ | 1 pont | |
| Háromágyas szobából $65 - 4n = 9$ darab van a szállodában. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: 14 darab egyágyas, 42 darab kétágyas és 9 darab háromágyas (összesen tehát 65) szoba van, ezekben összesen 14 + 84 + 27 = 125 férőhely van valóban. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **18. a) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| (Az egyágyas szobák száma legyen $e$, a kétágyas szobák száma $k$, a háromágyas szobák száma $h$.) A feladat szövege alapján: $\left.\begin{aligned} e+k+h&=65\\ k&=3e\\ e+2k+3h&=125\end{aligned}\right\}$. | 2 pont | |
| A $\left.\begin{aligned}4e+h&=65\\ 7e+3h&=125\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer első egyenletéből $h$-t kifejezve és a második egyenletbe helyettesítve: $7e+195-12e=125$, azaz $-5e=-70$. | 2 pont | |
| Az egyenletrendszer megoldása: $e = 14$, $k = 42$, $h = 9$. | 1 pont | |
| Háromágyas szobából 9 darab van a szállodában. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: 14 darab egyágyas, 42 darab kétágyas és 9 darab háromágyas (összesen tehát 65) szoba van, ezekben összesen 14 + 84 + 27 = 125 férőhely van valóban. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| 17. d) első megoldás | | |
|---|---|---|
| A feladat megértését tükröző ábra. A levágott csonkakúp fedőkörének sugarát jelölje *r*.   | 1 pont | |
| A hasonló háromszögek miatt $\frac{r}{9}=\frac{6}{12}$, | 1 pont | |
| így a keletkező csonkakúp fedőlapjának sugara 4,5 (cm). | 1 pont | |
| A csonkakúp térfogata $V=\frac{3\cdot\pi\cdot(6^2+6\cdot4{,}5+4{,}5^2)}{3}=$ | 1 pont | |
| $=83{,}25\pi$ cm$^3\approx 261{,}5$ cm$^3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| 17. d) második megoldás | | |
|---|---|---|
| Az eredeti kúp térfogata $V_e=\frac{6^2\cdot\pi\cdot12}{3}=144\pi\approx452{,}4$ (cm$^3$). | 1 pont | |
| A kúpból levágott kisebb kúp hasonló az eredetihez, a hasonlóság aránya $\lambda=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. | 1 pont | |
| A levágott kisebb kúp térfogatának és az eredeti kúp térfogatának aránya $\lambda^3=\frac{27}{64}$, | 1 pont | |
| így a levágott kúp térfogata $\lambda^3\cdot V_e\approx190{,}9$ (cm$^3$). | 1 pont | *A csonkakúp térfogata az eredeti kúp térfogatának az* $1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}$*-szerese.* |
| A csonkakúp térfogatát megkapjuk, ha az eredeti kúp térfogatából kivonjuk a levágott kúp térfogatát, azaz $V\approx(452{,}4-190{,}9=)\ 261{,}5$ cm$^3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |





| 13. c) első megoldás | | |
|---|---|---|
| Megoldandó az $x^2-4x+3=-\frac{3}{4}$ egyenlet. | 1 pont | |
| Az egyenlet gyökei: $x_1=1{,}5$; $x_2=2{,}5$. | 2 pont | *Az* $x^2-4x+3{,}75=0$ *egyenlet diszkriminánsa pozitív* ($D=1$). |
| Tehát két olyan szám van, amelyhez a *g* függvény a $\left(-\frac{3}{4}\right)$-et rendeli. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 13. c) második megoldás | | |
|---|---|---|
| Mivel $x^2-4x+3=(x-2)^2-1$, | 1 pont | |
| így a *g* függvény képe egy olyan felfelé nyíló parabola, melynek tengelypontja (2; –1). | 1 pont | *Ez a 2 pont jár a g grafikonja és az* $y=-\frac{3}{4}$ *egyenes ábrázolásáért.* |
| A függvény minden (–1)-nél nagyobb értéket két helyen vesz fel. | 1 pont | |
| Tehát két olyan szám van, amelyhez a *g* függvény a $\left(-\frac{3}{4}\right)$-et rendeli. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 14. a) első megoldás | | |
|---|---|---|
| 1,5 másodperc $=1{,}5\cdot\frac{1}{3600}$ óra | 1 pont | |
| Az autó 120 km/h sebességgel ennyi idő alatt $120\cdot1{,}5\cdot\frac{1}{3600}=$ | 1 pont | |
| = 0,05 kilométert, | 1 pont | |
| azaz 50 métert tesz meg. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 14. a) második megoldás | | |
|---|---|---|
| 120 km/h $=33\frac{1}{3}$ m/s | 2 pont | |
| Az autó ezzel a sebességgel 1,5 másodperc alatt $1{,}5\cdot33\frac{1}{3}=$ | 1 pont | |
| = 50 métert tesz meg. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 14. a) **harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| 1 óra 3600 másodperc, 1,5 másodperc ennek a 2400-ad része. | 2 pont | |
| Az autó 120 km/h sebességgel ennyi idő alatt $120\,000 : 2400 =$ | 1 pont | |
| $= 50$ métert tesz meg. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

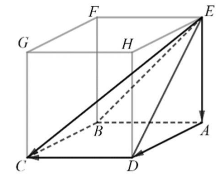
| 14. b) | | |
|---|---|---|
| Egy autó 120 km/h átlagsebességgel 100 km-t $\frac{100}{120}$ óra alatt, 130 km/h-val haladva ugyanennyit $\frac{100}{130}$ óra alatt tesz meg. | 2 pont | |
| Vagyis az alacsonyabb sebesség esetén 50 percre, a magasabb sebesség esetén kb. 46 percre van szükség a kérdéses távolság megtételéhez. | 1 pont | $\frac{100}{120} - \frac{100}{130} \approx 0{,}064$ óra |
| Azaz kb. 4 perccel rövidebb idő szükséges 100 km megtételéhez a nagyobb átlagsebesség esetén. | 1 pont | $0{,}064 \cdot 60 = 3{,}84$ perc |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

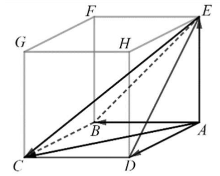
| 14. c) | | |
|---|---|---|
| Egy balesetet $360 : 1178 \approx 0{,}3056°$-os középponti szög jelöl a kördiagramon. | 1 pont | $440 : 1178 \approx 0{,}3735$ |
| A kérdéses szög ennek a 440-szerese, | 1 pont | $0{,}3735 \cdot 360$ |
| azaz 134° a kért kerekítéssel. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

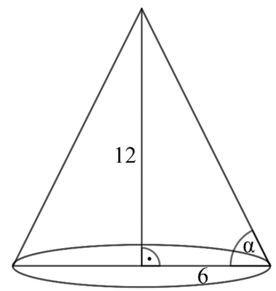
| 15. a) **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| (Jelölje a keresett számtani sorozat első tagját $a_1$, differenciáját $d$.) A feladat szövege alapján felírható a következő egyenletrendszer: $\left.\begin{matrix} 2a_1 + 2d = 8 \\ 3a_1 + 9d = 9 \end{matrix}\right\}$. | 2 pont | |
| Az egyik egyenletből $a_1$-et (vagy $d$-t) kifejezve: $a_1 = \frac{8-2d}{2} = 4 - d$. | 1 pont* | $d = 4 - a_1$ |
| Ezt a másik egyenletbe helyettesítve: $12 - 3d + 9d = 9$, azaz $6d = -3$. | 1 pont* | $3a_1 + 36 - 9a_1 = 9$<br>$-6a_1 = -27$ |
| Az egyenletrendszer megoldása $a_1 = 4{,}5$ és $d = -0{,}5$. | 1 pont | |
| Az első tíz tag összege $S_{10} = \frac{2 \cdot 4{,}5 + 9 \cdot (-0{,}5)}{2} \cdot 10 = 22{,}5$. | 2 pont | $4{,}5 + 4 + 3{,}5 + \ldots + 0 =$<br>$= 22{,}5$ |
| **Összesen:** | **7 pont** | |





| 17. b) **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ | 1 pont |   |
| $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 17. b) **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$ | 1 pont |   |
| $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ | 1 pont | |
| $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 17. c) | | |
|---|---|---|
| A feladat megértését tükröző ábra.<br>A kérdéses szöget jelöljük α-val.<br>  | 1 pont | |
| $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{6}$ | 1 pont | |
| $\alpha \approx 63{,}4°$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **16. d)** | | |
|---|---|---|
| Az állítás igaz. | 1 pont | |
| Az állítás megfordítása:<br>*Ha két négyszög megfelelő szögei páronként egyenlők, akkor a két négyszög hasonló.* | 1 pont | |
| Ez az állítás hamis. | 1 pont | |
| Ellenpélda például egy négyzet és egy (nem négyzet) téglalap. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a c) feladatban szereplő téglalapokra hivatkozik.* |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **17. a)** | | |
|---|---|---|
| A gúla felszínét megkapjuk, ha a négyzet alakú alaplap területéhez hozzáadjuk két-két egybevágó derékszögű háromszög területét. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $T_{ABCD} = 36$ (cm²) | 1 pont | |
| $T_{ABE} = T_{ADE} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ (cm²) | 1 pont | |
| (A *BCE*, illetve *CDE* derékszögű háromszög 6 cm hosszú oldalához tartozó magasság az *EB*, illetve az *ED* szakasz.) $EB = ED = 6\sqrt{2}$ (cm) | 1 pont | |
| $T_{BCE} = T_{CDE} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$ ($\approx 25{,}5$ cm²) | 1 pont | |
| A felszín: $A = 36 + 2 \cdot 18 + 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{2} \approx 122{,}9$ cm². | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |





*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

| | | |
|---|---|---|
| Az első egyenletet 3-mal, a második egyenletet 2-vel megszorozva: $\left.\begin{array}{l} 6a_1 + 6d = 24 \\ 6a_1 + 18d = 18 \end{array}\right\}$ | 1 pont | |
| és az így kapott két egyenletet kivonva egymásból: $-12d = 6$. | 1 pont | |

| **15. a) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A számtani sorozat tulajdonságai alapján $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = 4$ és $a_4 = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} = 3$. | 2 pont | |
| A differencia: $d = \frac{a_4 - a_2}{2} = -0{,}5$, | 1 pont | |
| az első tag: $a_1 = a_2 - d = 4{,}5$. | 1 pont | |
| A tizedik tag: $a_{10} = a_1 + 9d = 0$. | 1 pont | |
| Az első tíz tag összege $S_{10} = \frac{4{,}5 + 0}{2} \cdot 10 = 22{,}5$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **15. b)** | | |
|---|---|---|
| A háromszög átfogójának hosszát jelölje *c*, ekkor a két befogó hossza $a = c - 8$, illetve $b = c - 9$. | 1 pont | *A rövidebb befogót b-vel jelölve a másik befogó hossza $a = b + 1$, az átfogó hossza $c = b + 9$.* |
| A Pitagorasz-tétel alapján: $(c-8)^2 + (c-9)^2 = c^2$. | 1 pont | $(b+1)^2 + b^2 = (b+9)^2$ |
| A zárójeleket felbontva:<br>$c^2 - 16c + 64 + c^2 - 18c + 81 = c^2$, | 1 pont | $b^2 + 2b + 1 + b^2 =$<br>$= b^2 + 18b + 81$ |
| amiből $c^2 - 34c + 145 = 0$. | 1 pont | $b^2 - 16b - 80 = 0$ |
| Az egyenlet megoldásai: $c_1 = 5$ és $c_2 = 29$. | 1 pont | $b_1 = -4$, $b_2 = 20$ |
| Ha $c = 5$ lenne, akkor a befogók hosszára negatív értéket kapnánk, így ez nem megoldás. | 1 pont | *$b = -4$ nem megoldása a feladatnak.* |
| Ha $c = 29$, akkor $a = 21$ és $b = 20$ (ami valóban megoldása a feladatnak). | 1 pont | *Ha $b = 20$, akkor $a = 21$ és $c = 29$.* |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül helyesen adja meg a derékszögű háromszög oldalainak a hosszát, akkor ezért 1 pontot kapjon. További 1 pontot kapjon, ha igazolja, hogy ezek valóban egy derékszögű háromszög oldalai.*

## II. B

| **16. a)** első megoldás | | |
|---|---|---|
| A négy lapot összesen 4! = 24-féleképpen rakhatjuk sorba (összes eset száma). | 1 pont | |
| Az első helyen bármelyik szám állhat (4-féle lehetőség), másodikra az elsőnek lerakott számhoz képest ellenkező paritású két szám közül választhatunk. A harmadik és negyedik helyre rakható számokat az első kettő meghatározza. | 1 pont* | 1234, 1432, 3214, 3412, 2143, 2341, 4123, 4321 |
| A kedvező esetek száma tehát $4 \cdot 2 = 8$. | 1 pont | |
| A kérdéses valószínűség $\frac{8}{24}\left(=\frac{1}{3}\right)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó a kedvezőtlen esetek számát helyesen határozza meg: azok a kedvezőtlen elrendezések, amelyekben az 1. és a 2. helyen, vagy a 2. és a 3. helyen, vagy a 3. és a 4. helyen, vagy az 1. és a 4. helyen páros szám áll. Mindegyik esetből $2 \cdot 2 = 4$, összesen tehát $4 \cdot 4 = 16$ kedvezőtlen eset van.*

| **16. a)** második megoldás | | |
|---|---|---|
| Ha csak a számok paritását tekintjük, akkor $\binom{4}{2} = 6$-féle sorrend lehetséges (összes eset száma). | 2 pont | |
| Ebből 2 kedvező: páros-páratlan-páros-páratlan és páratlan-páros-páratlan-páros. | 1 pont | |
| A kérdéses valószínűség $\frac{2}{6}\left(=\frac{1}{3}\right)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **16. a)** harmadik megoldás | | |
|---|---|---|
| Elsőre a négy szám közül bármelyiket választhatjuk. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy a második szám paritása eltér az elsőre választott szám paritásától. | 1 pont | |
| (Ha az elsőre választott két szám paritása különböző, akkor) $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a harmadikra választott szám paritása eltér a másodikra választott szám paritásától. | 1 pont | |
| (Az utolsó szám mindenképp megfelelő lesz, így) a kérdéses valószínűség $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |





| **16. b)** első megoldás | | |
|---|---|---|
| A kupac magassága *n* vágás és egymásra rakás után $0{,}1 \cdot 2^n$ (mm), | 2 pont | |
| azaz $n = 20$ esetén kb. 105 000 mm. | 1 pont | |
| Ez 105 méterrel egyenlő, ami több mint 100 méter, Lucának tehát igaza van. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **16. b)** második megoldás | | |
|---|---|---|
| 10 vágás után $2^{10} = 1024$-szeres (több mint 1000-szeres), | 1 pont | |
| azaz az első 10 vágás után több mint 100 mm = 1 dm lesz a kupac vastagsága. | 1 pont | |
| A következő 10 vágásnál ismét 1024-szeresre változik a magasság, tehát 1000 dm-nél több lesz. | 1 pont | |
| Ez több mint 100 méter, Lucának tehát igaza van. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **16. c)** első megoldás | | |
|---|---|---|
| Ha két téglalap hasonló, akkor megfelelő oldalaik aránya egyenlő. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Az *EFGH* téglalap egyik oldala 21 – 5 = 16 cm, másik oldala 29,7 – 5 = 24,7 cm hosszú. | 1 pont | |
| Az *EF* és *AB* szakaszok aránya $\frac{16}{21}$ ($\approx 0{,}76$). | 1 pont | |
| Az *FG* és *BC* szakaszok aránya $\frac{24{,}7}{29{,}7}$ ($\approx 0{,}83$). | 1 pont | |
| A két arány nem egyenlő, így a két téglalap nem hasonló, Zsófinak tehát nincs igaza. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **16. c)** második megoldás | | |
|---|---|---|
| A két téglalap (oldalaik párhuzamossága miatt) csak középpontosan lehetne hasonló. | 1 pont | |
| A hasonlóság középpontja (az egyenlő margószélesség miatt) csak a téglalapok közös középpontja lehetne. | 1 pont | |
| Például az *AE* egyenes ezen a ponton nem halad át, | 1 pont | |
| mert nem átlóegyenese a téglalapnak (45°-os szöget zár be a téglalap oldalaival). | 1 pont | |
| Így a két téglalap nem hasonló, Zsófinak tehát nincs igaza. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |