ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. október 15.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
Egy megfelelő gráf.	2 pont	*Nem egyszerű gráf is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
{ }, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, y, z\}$	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Minden hiányzó vagy hibás részhalmazért 1 pontot (összesen legfeljebb 3 pontot) veszítsen a vizsgázó.

3.		
12	2 pont	*A b^{12} válasz is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
35 százalékkal	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
Egy megfelelő szám, például a 25.	2 pont	*Ha a vizsgázó olyan számot ad meg, amely relatív prím a 6-hoz, de nem összetett, akkor 1 pontot kapjon.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
A, C	2 pont	*Egy jó, vagy két jó és egy rossz válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
24	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8.		
(A koszinusztétel alapján az AC oldal hossza $\sqrt{2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot(-0{,}5)}=)\sqrt{19}\approx 4{,}36$ (egység).	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
Az egyenes meredeksége –0,4.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10. első megoldás		
19 liter = 19 000 cm^3	1 pont	
Az akvárium alapterülete 1000 cm^2.	1 pont	
19 000 = $1000\cdot m$, ahonnan m = 19 cm magasan áll a víz az akváriumban.	1 pont	
(25 – 19 =) 6 cm-re lesz a víz szintje az akvárium felső szélétől.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

10. második megoldás		
Az akvárium alapterülete 1000 cm^2,	1 pont	10 dm^2
így 1 liter = 1000 cm^3 víz betöltése éppen 1 cm-rel emeli a vízszintet.	2 pont	*1 liter = 1* dm^3 *éppen 0,1 dm-rel emeli a vízszintet.*
19 liter víz betöltése után tehát (25 – 19 =) 6 cm-re lesz a vízszint az akvárium felső szélétől.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

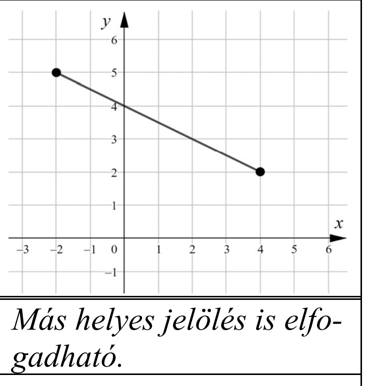
11. első megoldás		
A halmazokból $3\cdot 4$ = 12-féleképpen tudunk egy-egy számot kiválasztani (összes eset száma).	1 pont	
A szorzat akkor lesz negatív, ha az egyik halmazból pozitív, a másikból negatív számot választunk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A megfelelő számpárok: (–13; 1), (–13; 4), (–5; 1), (–5; 4) és (29; –17), összesen tehát 5 kedvező eset van.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{5}{12}$ (≈ 0,417).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

11. második megoldás		
A szorzat akkor lesz negatív, ha az egyik halmazból pozitív, a másikból negatív számot választunk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak valószínűsége, hogy az A halmazból negatív és a B halmazból pozitív számot választunk: $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy az A halmazból pozitív és a B halmazból negatív számot választunk: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$.	1 pont	
A keresett valószínűség ezek összege, azaz $\frac{5}{12}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
A jegyek átlaga 4.	1 pont	
A jegyek szórása $\left(\sqrt{\frac{1\cdot 2^2+2\cdot 1^2+1\cdot 0^2+4\cdot 1^2}{8}}=\right)\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1{,}25}\approx 1{,}12.$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

13. a)		
$f\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+4=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$=\frac{35}{8}=4{,}375$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. b)		
Az ábrázolt függvény grafikonja egy $-0{,}5$ meredekségű egyenesre illeszkedik,	1 pont	
a grafikon az y tengelyt a 4-nél metszi.	1 pont	
A vizsgázó az értelmezési tartományt helyesen veszi figyelembe.	1 pont	
A függvény értékkészlete: [2; 5].	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

13. c) **első megoldás**		
Megoldandó az $x^2 - 4x + 3 = -\frac{3}{4}$ egyenlet.	1 pont	
Az egyenlet gyökei: $x_1 = 1,5$; $x_2 = 2,5$.	2 pont	*Az $x^2 - 4x + 3,75 = 0$ egyenlet diszkriminánsa pozitív ($D = 1$).*
Tehát két olyan szám van, amelyhez a g függvény a $\left(-\frac{3}{4}\right)$-et rendeli.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. c) **második megoldás**		
Mivel $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$,	1 pont	
így a g függvény képe egy olyan felfelé nyíló parabola, melynek tengelypontja (2; –1).	1 pont	*Ez a 2 pont jár a g grafikonja és az $y = -\frac{3}{4}$ egyenes ábrázolásáért.*
A függvény minden (–1)-nél nagyobb értéket két helyen vesz fel.	1 pont	
Tehát két olyan szám van, amelyhez a g függvény a $\left(-\frac{3}{4}\right)$-et rendeli.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. a) **első megoldás**		
1,5 másodperc = $1,5 \cdot \frac{1}{3600}$ óra	1 pont	
Az autó 120 km/h sebességgel ennyi idő alatt $120 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{3600} =$	1 pont	
= 0,05 kilométert,	1 pont	
azaz 50 métert tesz meg.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. a) **második megoldás**		
120 km/h = $33\frac{1}{3}$ m/s	2 pont	
Az autó ezzel a sebességgel 1,5 másodperc alatt $1,5 \cdot 33\frac{1}{3} =$	1 pont	
= 50 métert tesz meg.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. a) harmadik megoldás		
1 óra 3600 másodperc, 1,5 másodperc ennek a 2400-ad része.	2 pont	
Az autó 120 km/h sebességgel ennyi idő alatt $120\,000 : 2400 =$	1 pont	
= 50 métert tesz meg.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. b)		
Egy autó 120 km/h átlagsebességgel 100 km-t $\frac{100}{120}$ óra alatt, 130 km/h-val haladva ugyanennyit $\frac{100}{130}$ óra alatt tesz meg.	2 pont	
Vagyis az alacsonyabb sebesség esetén 50 percre, a magasabb sebesség esetén kb. 46 percre van szükség a kérdéses távolság megtételéhez.	1 pont	$\frac{100}{120}-\frac{100}{130}\approx 0{,}064$ óra
Azaz kb. 4 perccel rövidebb idő szükséges 100 km megtételéhez a nagyobb átlagsebesség esetén.	1 pont	$0{,}064\cdot 60 = 3{,}84$ perc
Összesen:	**4 pont**	

14. c)		
Egy balesetet $360 : 1178 \approx 0{,}3056°$-os középponti szög jelöl a kördiagramon.	1 pont	$440 : 1178 \approx 0{,}3735$
A kérdéses szög ennek a 440-szerese,	1 pont	$0{,}3735\cdot 360$
azaz 134° a kért kerekítéssel.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. a) első megoldás		
(Jelölje a keresett számtani sorozat első tagját a_1, differenciáját d.) A feladat szövege alapján felírható a következő egyenletrendszer: $\left.\begin{matrix}2a_1+2d=8\\3a_1+9d=9\end{matrix}\right\}$.	2 pont	
Az egyik egyenletből a_1-et (vagy d-t) kifejezve: $a_1=\frac{8-2d}{2}=4-d$.	1 pont*	$d=4-a_1$
Ezt a másik egyenletbe helyettesítve: $12-3d+9d=9$, azaz $6d=-3$.	1 pont*	$3a_1+36-9a_1=9$ $-6a_1=-27$
Az egyenletrendszer megoldása $a_1=4{,}5$ és $d=-0{,}5$.	1 pont	
Az első tíz tag összege $S_{10}=\frac{2\cdot 4{,}5+9\cdot(-0{,}5)}{2}\cdot 10=22{,}5$.	2 pont	$4{,}5+4+3{,}5+\ldots+0=$ $=22{,}5$
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pont az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az első egyenletet 3-mal, a második egyenletet 2-vel megszorozva: $\left.\begin{array}{l} 6a_1 + 6d = 24 \\ 6a_1 + 18d = 18 \end{array}\right\}$	1 pont	
és az így kapott két egyenletet kivonva egymásból: $-12d = 6$.	1 pont	

15. a) második megoldás		
A számtani sorozat tulajdonságai alapján $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = 4$ és $a_4 = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} = 3$.	2 pont	
A differencia: $d = \frac{a_4 - a_2}{2} = -0{,}5$,	1 pont	
az első tag: $a_1 = a_2 - d = 4{,}5$.	1 pont	
A tizedik tag: $a_{10} = a_1 + 9d = 0$.	1 pont	
Az első tíz tag összege $S_{10} = \frac{4{,}5 + 0}{2} \cdot 10 = 22{,}5$.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. b)		
A háromszög átfogójának hosszát jelölje c, ekkor a két befogó hossza $a = c - 8$, illetve $b = c - 9$.	1 pont	*A rövidebb befogót b-vel jelölve a másik befogó hossza $a = b + 1$, az átfogó hossza $c = b + 9$.*
A Pitagorasz-tétel alapján: $(c - 8)^2 + (c - 9)^2 = c^2$.	1 pont	$(b + 1)^2 + b^2 = (b + 9)^2$
A zárójeleket felbontva: $c^2 - 16c + 64 + c^2 - 18c + 81 = c^2$,	1 pont	$b^2 + 2b + 1 + b^2 =$ $= b^2 + 18b + 81$
amiből $c^2 - 34c + 145 = 0$.	1 pont	$b^2 - 16b - 80 = 0$
Az egyenlet megoldásai: $c_1 = 5$ és $c_2 = 29$.	1 pont	$b_1 = -4$, $b_2 = 20$
Ha $c = 5$ lenne, akkor a befogók hosszára negatív értéket kapnánk, így ez nem megoldás.	1 pont	*$b = -4$ nem megoldása a feladatnak.*
Ha $c = 29$, akkor $a = 21$ és $b = 20$ (ami valóban megoldása a feladatnak).	1 pont	*Ha $b = 20$, akkor $a = 21$ és $c = 29$.*
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül helyesen adja meg a derékszögű háromszög oldalainak a hosszát, akkor ezért 1 pontot kapjon. További 1 pontot kapjon, ha igazolja, hogy ezek valóban egy derékszögű háromszög oldalai.

II. B

16. a) **első megoldás**		
A négy lapot összesen $4! = 24$-féleképpen rakhatjuk sorba (összes eset száma).	1 pont	
Az első helyen bármelyik szám állhat (4-féle lehetőség), másodikra az elsőnek lerakott számhoz képest ellenkező paritású két szám közül választhatunk. A harmadik és negyedik helyre rakható számokat az első kettő meghatározza.	1 pont*	1234, 1432, 3214, 3412, 2143, 2341, 4123, 4321
A kedvező esetek száma tehát $4 \cdot 2 = 8$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{8}{24}\left(=\frac{1}{3}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó a kedvezőtlen esetek számát helyesen határozza meg: azok a kedvezőtlen elrendezések, amelyekben az 1. és a 2. helyen, vagy a 2. és a 3. helyen, vagy a 3. és a 4. helyen, vagy az 1. és a 4. helyen páros szám áll. Mindegyik esetből* $2 \cdot 2 = 4$*, összesen tehát* $4 \cdot 4 = 16$ *kedvezőtlen eset van.*

16. a) **második megoldás**		
Ha csak a számok paritását tekintjük, akkor $\binom{4}{2} = 6$-féle sorrend lehetséges (összes eset száma).	2 pont	
Ebből 2 kedvező: páros-páratlan-páros-páratlan és páratlan-páros-páratlan-páros.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{2}{6}\left(=\frac{1}{3}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. a) **harmadik megoldás**		
Elsőre a négy szám közül bármelyiket választhatjuk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy a második szám paritása eltér az elsőre választott szám paritásától.	1 pont	
(Ha az elsőre választott két szám paritása különböző, akkor) $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a harmadikra választott szám paritása eltér a másodikra választott szám paritásától.	1 pont	
(Az utolsó szám mindenképp megfelelő lesz, így) a kérdéses valószínűség $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. b) **első megoldás**		
A kupac magassága n vágás és egymásra rakás után $0{,}1 \cdot 2^n$ (mm),	2 pont	
azaz $n = 20$ esetén kb. 105 000 mm.	1 pont	
Ez 105 méterrel egyenlő, ami több mint 100 méter, Lucának tehát igaza van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

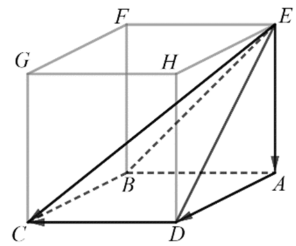
16. b) **második megoldás**		
10 vágás után $2^{10} = 1024$-szeres (több mint 1000-szeres),	1 pont	
azaz az első 10 vágás után több mint 100 mm = 1 dm lesz a kupac vastagsága.	1 pont	
A következő 10 vágásnál ismét 1024-szeresre változik a magasság, tehát 1000 dm-nél több lesz.	1 pont	
Ez több mint 100 méter, Lucának tehát igaza van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

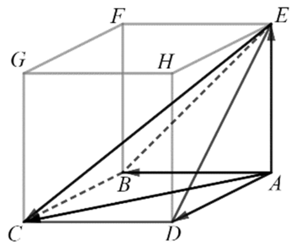
16. c) **első megoldás**		
Ha két téglalap hasonló, akkor megfelelő oldalaik aránya egyenlő.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az $EFGH$ téglalap egyik oldala 21 – 5 = 16 cm, másik oldala 29,7 – 5 = 24,7 cm hosszú.	1 pont	
Az EF és AB szakaszok aránya $\frac{16}{21}$ ($\approx 0{,}76$).	1 pont	
Az FG és BC szakaszok aránya $\frac{24{,}7}{29{,}7}$ ($\approx 0{,}83$).	1 pont	
A két arány nem egyenlő, így a két téglalap nem hasonló, Zsófinak tehát nincs igaza.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

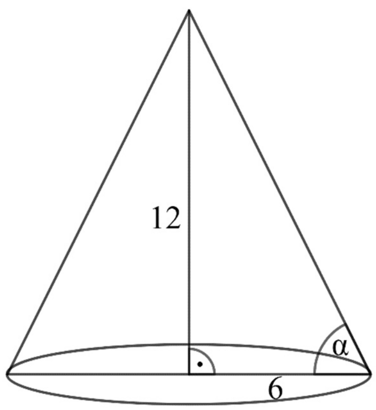
16. c) **második megoldás**		
A két téglalap (oldalaik párhuzamossága miatt) csak középpontosan lehetne hasonló.	1 pont	
A hasonlóság középpontja (az egyenlő margószélesség miatt) csak a téglalapok közös középpontja lehetne.	1 pont	
Például az AE egyenes ezen a ponton nem halad át,	1 pont	
mert nem átlóegyenese a téglalapnak (45°-os szöget zár be a téglalap oldalaival).	1 pont	
Így a két téglalap nem hasonló, Zsófinak tehát nincs igaza.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

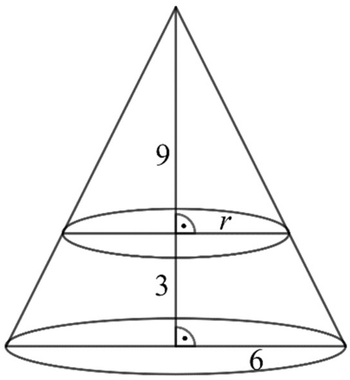
16. d)		
Az állítás igaz.	1 pont	
Az állítás megfordítása: *Ha két négyszög megfelelő szögei páronként egyenlők, akkor a két négyszög hasonló.*	1 pont	
Ez az állítás hamis.	1 pont	
Ellenpélda például egy négyzet és egy (nem négyzet) téglalap.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a c) feladatban szereplő téglalapokra hivatkozik.*
Összesen:	**4 pont**	

17. a)		
A gúla felszínét megkapjuk, ha a négyzet alakú alaplap területéhez hozzáadjuk két-két egybevágó derékszögű háromszög területét.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T_{ABCD} = 36$ (cm^2)	1 pont	
$T_{ABE} = T_{ADE} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ (cm^2)	1 pont	
(A *BCE*, illetve *CDE* derékszögű háromszög 6 cm hosszú oldalához tartozó magasság az *EB*, illetve az *ED* szakasz.) $EB = ED = 6\sqrt{2}$ (cm)	1 pont	
$T_{BCE} = T_{CDE} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$ ($\approx 25{,}5$ cm^2)	1 pont	
A felszín: $A = 36 + 2 \cdot 18 + 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{2} \approx 122{,}9$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. b) **első megoldás**		
$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$	1 pont	
$\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b) **második megoldás**		
$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$	1 pont	
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$	1 pont	
$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. c)		
A feladat megértését tükröző ábra. A kérdéses szöget jelöljük α-val. 	1 pont	
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{6}$	1 pont	
$\alpha \approx 63{,}4°$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. d) **első megoldás**		
A feladat megértését tükröző ábra. A levágott csonkakúp fedőkörének sugarát jelölje r. 	1 pont	
A hasonló háromszögek miatt $\frac{r}{9}=\frac{6}{12}$,	1 pont	
így a keletkező csonkakúp fedőlapjának sugara 4,5 (cm).	1 pont	
A csonkakúp térfogata $V=\frac{3\cdot\pi\cdot(6^2+6\cdot 4{,}5+4{,}5^2)}{3}=$	1 pont	
$= 83{,}25\pi\ \text{cm}^3 \approx 261{,}5\ \text{cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. d) **második megoldás**		
Az eredeti kúp térfogata $V_e=\frac{6^2\cdot\pi\cdot 12}{3}=144\pi\approx 452{,}4\ (\text{cm}^3)$.	1 pont	
A kúpból levágott kisebb kúp hasonló az eredetihez, a hasonlóság aránya $\lambda=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.	1 pont	
A levágott kisebb kúp térfogatának és az eredeti kúp térfogatának aránya $\lambda^3=\frac{27}{64}$,	1 pont	
így a levágott kúp térfogata $\lambda^3\cdot V_e\approx 190{,}9\ (\text{cm}^3)$.	1 pont	*A csonkakúp térfogata az eredeti kúp térfogatának az* $1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}$*-szerese.*
A csonkakúp térfogatát megkapjuk, ha az eredeti kúp térfogatából kivonjuk a levágott kúp térfogatát, azaz $V\approx(452{,}4-190{,}9=)\ 261{,}5\ \text{cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. a) **első megoldás**		
Az egyágyas szobák száma legyen n, ekkor kétágyas szobából $3n$, háromágyasból $65 - 4n$ darab van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feladat szövege alapján: $n + 3n \cdot 2 + (65 - 4n) \cdot 3 = 125$.	2 pont	
$195 - 5n = 125$	1 pont	
$n = 14$	1 pont	
Háromágyas szobából $65 - 4n = 9$ darab van a szállodában.	1 pont	
Ellenőrzés: 14 darab egyágyas, 42 darab kétágyas és 9 darab háromágyas (összesen tehát 65) szoba van, ezekben összesen 14 + 84 + 27 = 125 férőhely van valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. a) **második megoldás**		
(Az egyágyas szobák száma legyen e, a kétágyas szobák száma k, a háromágyas szobák száma h.) A feladat szövege alapján: $\left.\begin{aligned} e + k + h &= 65 \\ k &= 3e \\ e + 2k + 3h &= 125 \end{aligned}\right\}$.	2 pont	
A $\left.\begin{aligned} 4e + h &= 65 \\ 7e + 3h &= 125 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer első egyenletéből h-t kifejezve és a második egyenletbe helyettesítve: $7e + 195 - 12e = 125$, azaz $-5e = -70$.	2 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $e = 14$, $k = 42$, $h = 9$.	1 pont	
Háromágyas szobából 9 darab van a szállodában.	1 pont	
Ellenőrzés: 14 darab egyágyas, 42 darab kétágyas és 9 darab háromágyas (összesen tehát 65) szoba van, ezekben összesen 14 + 84 + 27 = 125 férőhely van valóban.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. b) **első megoldás**		
A hat vendég $6!(=720)$-féleképpen veheti el a kulcsokat (összes eset száma).	1 pont	
Kedvező esetek azok, amikor Aladár és Balázs a két 102-es kulcsot veszi el valamilyen sorrendben.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezt 2-féleképpen tehetik meg.	1 pont	
A többiek ekkor $4!(=24)$-féleképpen vehetik el a maradék kulcsokat.	1 pont	
A kedvező esetek száma tehát $2\cdot 4!(=48)$.	1 pont	
A keresett valószínűség így $\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. b) **második megoldás**		
Az egyágyas szobába kerülő személyt 6-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont*	*A háromágyas szobába kerülő 3 személyt* $\binom{6}{3}=20$*-féleképpen választhatjuk ki.*
A maradék öt személyből a kétágyas szobába kerülő kettőt $\binom{5}{2}=10$-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont*	*A maradék három személyből a kétágyas szobába kerülő kettőt 3-féleképpen választhatjuk ki.*
A maradék három személy kerül a háromágyas szobába, az összes eset száma így $6\cdot 10=60$.	1 pont*	$20\cdot 3=60$
Ha Aladár és Balázs a kétágyas szobába kerül, akkor a társaság másik négy tagja közül 4-féleképpen választhatjuk ki az egyágyas szobába kerülő személyt. A kedvező esetek száma tehát 4.	2 pont	
A keresett valószínűség így $\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A hat személyt sorba állítjuk, és mindegyiküknek kiosztunk egy szobakulcsot.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Meg kell számolni egy darab 101-es, két darab 102-es és három darab 103-as kulcs lehetséges sorrendjeinek a számát (ismétléses permutáció).	1 pont	
Az összes eset száma $\frac{6!}{2!\cdot 3!}=60$.	1 pont	

18. b) **harmadik megoldás**		
Annak a valószínűségét vizsgáljuk, hogy a hat kulcs közül a két 102-es kulcsot választjuk ki Aladár és Balázs számára (a többi kulcs kiosztása tetszőleges).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A hat kulcs közül kettőt $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma).	2 pont	
Egyetlen kedvező eset van: amikor Aladár és Balázs a 102-es szoba két kulcsát kapja.	2 pont	
A keresett valószínűség így $\frac{1}{15}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. c) **első megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy egy adott tányért nem törnek össze a pincérek: $\frac{1999}{2000} = 0{,}9995$.	1 pont	
P(legalább egyet összetörnek) = = 1 – P(egyet sem törnek össze) =	1 pont	
$= 1 - 0{,}9995^{150} \approx$	1 pont	
$\approx 1 - 0{,}928 = 0{,}072$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. c) **második megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy a pincérek pontosan egy tányért törnek össze: $P(1) = \binom{150}{1} \cdot 0{,}0005 \cdot 0{,}9995^{149} \approx 0{,}0696.$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a pincérek pontosan két tányért törnek össze: $P(2) = \binom{150}{2} \cdot 0{,}0005^{2} \cdot 0{,}9995^{148} \approx 0{,}0026.$	1 pont	
$P(3) \approx 0{,}00006$ Látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a pincérek három vagy több tányért törnek össze, a feladatra adott válasz szempontjából elhanyagolható.	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség a fenti két valószínűség összege, azaz körülbelül 0,072.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	